

# 单个囚禁离子的运动态与光场的量子纠缠

郑小娟<sup>1</sup>, 廖湘萍<sup>1,2</sup>

(1.中南大学 物理科学与技术学院, 湖南 长沙 410083; 2.湖南工业大学 物理与电子工程系, 湖南 株洲 412007)

**摘要:** 提出一个制备涉及光场和单个囚禁离子振动运动的 Bell 态方案。如果选择合适的相互作用时间及合适的初态, 就很容易制备纠缠光-运动态。证明: 使用不同的运动边带和恰当的离子相对相位, 所有 4 个 Bell 态都能制备出来。方案的显著特点是没有兰姆-狄克近似, 因而制备这些纠缠态的时间大大缩短。

**关键词:** 量子纠缠; 囚禁离子; Bell 态

**中图分类号:** O431

**文献标识码:** A

**文章编号:** 1673-9833(2007)03-0027-03

## Quantum Entanglement between Motional State of a Single Trapped Ion and Light Field

Zheng Xiaojuan<sup>1</sup>, Liao Xiangping<sup>1,2</sup>

(1.College of Physics Science and Technology, Central South University, Changsha 410083, China;

2.Department of Physics and Electronics Engineering, Hunan University of Technology, Zhuzhou Hunan 412007, China)

**Abstract:** A generation method of Bell-type states is proposed which is involving light and the vibrational motion of a single trapped ion. Entangled light-motional state may be readily generated if a conditional measurement of the ionics internal electronic state is made after an appropriate interaction time and a suitable preparation state. The research shows that all four Bell states may be generated by using different motional sidebands (either blue or red), as well as adequate ionic relative phases. The distinct advantage of the scheme are similar to Lamb-Dicke approximation, which greatly decreased the operation speed.

**Key words:** quantum entanglement; trapped ion; Bell states

## 0 引言

量子纠缠现象是量子理论最重要的特性之一, 是量子力学不同于经典物理最不可思议的特征。它不仅为检验定域理论违背量子力学提供了有力的工具<sup>[1,2]</sup>, 而且它是量子信息处理的基本资源<sup>[3]</sup>。例如, 它用于量子隐形传态<sup>[4-6]</sup>、量子稠密编码<sup>[7,8]</sup>等。近几年来, 人们选择各种量子系统作为产生量子纠缠最合适的候选系统: 核磁共振系统(简称 NMR)、腔 QED 系统、量子点系统以及离子阱系统。其中, 腔 QED 系统总是引起广泛关注, 这是因为光子适合于快速而可靠的远距离量子信息传送, 而且腔 QED 提供了腔之间的通讯机制。因此, 人们提出许多在腔 QED 中把原子和腔模纠

缠起来的方案<sup>[9,10]</sup>。

近几年来, 由于囚禁离子的腔 QED 技术的发展, 人们尝试将囚禁离子系统和腔 QED 系统 2 种方案结合起来<sup>[11,12]</sup>, 利用离子同时与 2 个外场发生的相互作用, 提出了一些量子纠缠以及量子信息处理的实现方案, 并且取得了令人鼓舞的成就。这类系统有着很多潜在的优点和应用。其一, 在这个系统里出现了 3 个量子自由度, 也就是说有 3 个量子子系统: 离子内部能级、势阱声子场和腔的光子场。这一点对量子信息的传送尤其重要。其二, 利用这个系统可以使得势阱离子与腔场有较长的相互作用时间, 这对解决量子计算过程中的退相干问题很有好处。

本文使用高 Q 腔中单个两能级囚禁离子, 提出一

收稿日期: 2007-04-18

基金项目: 湖南省自然科学基金资助项目(06JJ4003, 06JJ2014)

作者简介: 郑小娟(1971-), 女, 湖南隆回人, 中南大学教师, 博士生, 主要从事量子光学与量子信息处理方面的研究。

个制备离子运动和腔场的量子纠缠态的简单方案。本方案不需要兰姆-狄克近似,因而操作速度大大提高。而文献[12]中却使用了兰姆-狄克近似。

## 1 模型

考虑把一个离子囚禁于一线性阱中,并把整个装置放在一个高品质的腔中。腔沿着阱轴放置(见图1)。离子被冷却到很低的温度,它可以在它的平衡位置附近做频率为 $\nu$ 的微小振动。描述离子内外态自由度与腔场相互作用的哈密顿量<sup>[12]</sup>为:

$$H = \nu a^\dagger a + \omega b^\dagger b + \frac{\omega_0}{2} \sigma_z + g(\sigma^+ + \sigma)(b^\dagger + b) \sin[\eta(a^\dagger + a) + \varphi], \quad (1)$$

式中: $a^\dagger$ 和 $a$ 分别为量子化的原子振动(频率为 $\nu$ )的产生算符和湮灭算符;

$b^\dagger$ 和 $b$ 分别为腔场(频率为 $\omega$ )的产生算符和湮灭算符;

$g$ 是离子-腔场的耦合常数;

$\eta$ 是Lamb-Dicke参数;

$\omega_0$ 是原子跃迁频率;

$\varphi$ 表示离子的运动态相对量子化腔场的驻波的相对位置。

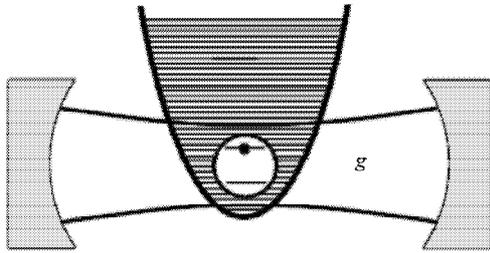


图1 囚禁于线性阱中的单个两能级离子与单个腔模场相互作用示意图

Figure 1 Diagram of a two-level ion trapped in a linear trap interacting with a single cavity-mode field

考虑腔场与第 $k$ 个蓝振动边带共振的情况,即腔场的频率选为 $\omega = \omega_0 + k\nu$ ,这里的 $k$ 是正整数,在旋波近似下以及么正算符

$$\hat{U}_0(t) = \exp(-i\nu t a^\dagger a) \exp(-i\omega t b^\dagger b) \exp\left(-i\frac{\omega_0}{2} t \sigma_z\right)$$

定义的相互作用表象中,系统的哈密顿算符为:

$$H_I^{(+)} = g e^{-\frac{\eta^2}{2}} \eta^k \sin\left(\varphi + k\frac{\pi}{2}\right) \times \left[ \sigma_+ b \sum_{n=0}^{\infty} (i\eta)^{2n} \frac{a^{+(n+k)} a^n}{n!(n+k)!} + H.c. \right]. \quad (2)$$

如果考虑腔场与第 $k$ 个红振动边带共振的情况,

即腔场的频率选为 $\omega = \omega_0 - k\nu$ ,这里的 $k$ 是正整数,在同样的旋波近似下以及同样的么正算符定义的相互作用表象中,系统的哈密顿算符为:

$$H_I^{(-)} = g e^{-\frac{\eta^2}{2}} \eta^k \sin\left(\varphi + k\frac{\pi}{2}\right) \times \left[ \sigma_+ b \sum_{n=0}^{\infty} (i\eta)^{2n} \frac{a^{+n} a^{n+k}}{n!(n+k)!} + H.c. \right], \quad (3)$$

2个哈密顿算符的最终形式为:

$$H_I^{(+)} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \Omega_{m,l+1}^k (|e, m+k, l\rangle \langle g, m, l+1| + |g, m, l+1\rangle \langle e, m+k, l|), \quad (4)$$

$$H_I^{(-)} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \Omega_{m,l+1}^k (|e, m, l\rangle \langle g, m+k, l+1| + |g, m+k, l+1\rangle \langle e, m, l|), \quad (5)$$

$$\Omega_{m,l+1}^k = g e^{-\frac{\eta^2}{2}} \eta^k \sin\left(\varphi + k\frac{\pi}{2}\right) \sqrt{\frac{m!(l+1)}{(m+k)!}} \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\eta)^{2n}}{n!} \frac{(m+k)!}{(m-n)!(n+k)!}. \quad (6)$$

其中: $l$ 和 $m$ 分别为腔场的光子数和囚禁离子振动模的声子数。方程(4)、(5)对应的时间演化算符为

$$\hat{U}^{(\pm)}(t) = \exp(-iH_I^{(\pm)} t). \quad (7)$$

按照方程(7),可以得到初始态为 $|g, m, l\rangle$ 和 $|e, m, l\rangle$ 的时间演化:

对 $\omega = \omega_0 + k\nu$ 的情况有:

$$\begin{cases} |g, m, l\rangle \rightarrow |g, m, l\rangle, & l=0, \\ |g, m, l\rangle \rightarrow \cos(\Omega_{m,l}^k t) |g, m, l\rangle - \\ \quad i \sin(\Omega_{m,l}^k t) |e, m+k, l-1\rangle, & l>0, \\ |e, m, l\rangle \rightarrow |e, m, l\rangle, & m < k, \\ |e, m, l\rangle \rightarrow \cos(\Omega_{m-k,l+1}^k t) |e, m, l\rangle - \\ \quad i \sin(\Omega_{m-k,l+1}^k t) |g, m-k, l+1\rangle, & m \geq k, \end{cases} \quad (8)$$

对 $\omega = \omega_0 - k\nu$ 的情况有:

$$\begin{cases} |g, m, l\rangle \rightarrow |g, m, l\rangle, & m < k \text{ 或 } l=0, \\ |g, m, l\rangle \rightarrow \cos(\Omega_{m-k,l}^k t) |g, m, l\rangle - \\ \quad i \sin(\Omega_{m-k,l}^k t) |e, m-k, l-1\rangle, & m \geq k \text{ 且 } l>0, \\ |e, m, l\rangle \rightarrow |e, m, l\rangle, \\ |e, m, l\rangle \rightarrow \cos(\Omega_{m,l+1}^k t) |e, m, l\rangle - \\ \quad i \sin(\Omega_{m,l+1}^k t) |g, m+k, l+1\rangle. \end{cases} \quad (9)$$

## 2 4个Bell态的制备

假设初始时整个系统处于下列态:

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|e\rangle + e^{i\phi}|g\rangle)|1\rangle|0\rangle, \quad (10)$$

其中腔场处于真空态, 囚禁离子的振动模处于第一激发态 $|1\rangle$ 。现在把光场的频率调为第一蓝边带, 即 $\omega = \omega_0 + \nu$ , 并令 $\phi = 0$ , 则按照方程(8), 系统的态随时间演化为:

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos(\Omega_{0,1}^1 t)|e, 1, 0\rangle - i\sin(\Omega_{0,1}^1 t)|g, 0, 1\rangle + e^{i\phi}|g, 1, 0\rangle), \quad (11)$$

选择相互作用时间满足 $\sin(\Omega_{0,1}^1 t) = 1$ 时, 即相互作用

时间 $t = \tau = \frac{\pi e^{\eta^2/2}}{2g\eta}$ 时, 探测离子的内态, 则系统的态演

化为:

$$|\psi(\tau)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{i\phi}|1, 0\rangle - i|0, 1\rangle), \quad (12)$$

这就是涉及量子化腔场和离子振动模的 Bell 类型的纠缠态。

假设初始时整个系统处于态:

$$|\psi'(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|e\rangle + e^{i\phi}|g\rangle)|0\rangle|0\rangle, \quad (13)$$

其中腔场和囚禁离子的振动模都处于真空态。现在把光场的频率调为 $\omega = \omega_0 - \nu$ , 并令 $\phi = 0$ , 则按照方程(9), 系统的态随时间演化为:

$$|\psi'(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos(\Omega_{0,1}^1 t)|e, 0, 0\rangle - i\sin(\Omega_{0,1}^1 t)|g, 1, 1\rangle + e^{i\phi}|g, 0, 0\rangle), \quad (14)$$

同样选择相互作用时间满足 $\sin(\Omega_{0,1}^1 t) = 1$ 时, 即相互作用

时间为 $t = \tau = \frac{\pi e^{\eta^2/2}}{2g\eta}$ 时, 探测离子的内态, 则系统的态演化为:

$$|\psi'(\tau)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{i\phi}|0, 0\rangle - i|1, 1\rangle), \quad (15)$$

这也是涉及量子化腔场和离子振动模的 Bell 类型的纠缠态。

事实上, 如果在方程(12)和方程(15)中选择 $\phi = \pm \frac{\pi}{2}$ , 并在探测离子的内态后, 得到下列4个态:

$$|\psi\rangle_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1, 0\rangle \pm |0, 1\rangle),$$

$$|\psi'\rangle_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0, 0\rangle \pm |1, 1\rangle).$$

显然, 这是4个 Bell 态。

### 3 实验可行性分析

接下来讨论本方案在实验上的可行性。因为纠缠

态的制备涉及到腔模、囚禁离子的振动模和离子的内态, 而对方案产生有害效果的因素主要是腔的衰减和离子的自发辐射, 所以必须考虑在纠缠态的制备过程中腔的衰减和离子的自发辐射。考虑 $^{40}\text{Ca}^+$ 中的基态 $|g = S_{1/2}\rangle$ 和激发态 $|e = D_{5/2}\rangle$ 。按照文献[13], 选择离子-腔的耦合常数为 $g = 2\pi \times 134 \text{ Hz}$ , 那么, 在方案中, 制备想要的纠缠态的时间可达到 $10^{-3} \text{ s}$ , 而文献[12]中所需的时间达到 $10^{-2} \text{ s}$ 。因此, 本方案的时间短得多, 这对实验是非常重要的。不管耦合强度取多少, 在方案中制备所需要的态的标度时间(离子-场的耦合常数 $g$ 和时间 $t$ 的乘积)比文献[12]中的短很多, 这是由于本方案不受兰姆-狄克参数的限制。兰姆-狄克参数可取到0.9多, 而文献[12]中必须要满足 $\eta \ll 1$ 。在目前最精确的实验上<sup>[14]</sup>, 离子的亚稳态 $|D_{5/2}\rangle$ 的寿命为1.1689 s, 这个时间比离子-光场相互作用时间长很多, 所以, 由于自发辐射的损失可以忽略。另外, 目前可获得的高 $Q$ 腔的衰减时间约为0.2 s<sup>[15]</sup>, 这个时间比相互作用时间长得多。因此, 不必考虑腔的衰减对态制备的影响。故本方案在实验上是可行的。

## 4 结语

本文研究了高品质腔中单个囚禁离子的运动态与光场态的量子纠缠, 并在特定的相互作用时间制备了4个 Bell 态。方案的显著特点是不受兰姆-狄克参数的影响, 因而操作速度大大提高, 这为实验上制备量子纠缠态提供了新的可能途径。

### 参考文献:

- [1] Bell J S. On the Einstein, Podolsky, Rosen Paradox[J]. Physics (Long Island City, N.Y.), 1964 (1): 195-200.
- [2] Greenberger D M, Horne M A, Zeilinger A. Bell's theorem without inequalities[J]. Am. J. Phys., 1990, 58: 1131-1143.
- [3] Nielsen M A, Chuang I L. Quantum Computation and Quantum Information[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2000.
- [4] Zheng S B. Scheme for approximate conditional teleportation of an unknown atomic state without the Bell-state measurement [J]. Phys. Rev. A, 2004, 69: 064302-1~3.
- [5] Bennett C H, Brassard G, Crépeau C, et al. Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels [J]. Phys. Rev. Lett., 1993, 70: 1895-1899.
- [6] Ye L, Guo G C. Scheme for teleportation of an unknown atomic state without the Bell-state measurement[J]. Phys. Rev. A, 2004, 70: 054303-1~3.
- [7] Ye Liu, Guo Guang-Can. (下转第51页)