第21卷第3期 湖南工业大学学报 Vol.21 No.3
2007年5月 Journal of Hunan University of Technology May 2007

一类平面五次系统的极限环的存在唯一性

刘兴国[1]，黄立宏[2]

(1.湖南工业大学 信息与计算科学系，湖南 株洲 412008；2. 湖南大学 数学与计量经济学院，湖南 长沙 410082)

摘　要：研究一类平面五次多项式系统，利用基于Poincaré思想的形式级数法进行了中心焦点的判定，借助Dulac函数法讨论了闭轨的不存性，利用Hopf分支理论分析建立从平衡点分支出极限环的若干充分条件，利用Л.А.Черкас和Л.И.Жилевыч的唯一性定理分析得到了极限环唯一性与稳定性的若干充分条件。

关键词：中心；焦点；极限环；存在性；唯一性

中图分类号：O175.12　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1673-9833(2007)03-0021-06

The Existence Uniqueness of Limit Cycles for a Class of Plane Five-Degree System

Liu Xingguo[1]，Huang Lihong[2]

(1.Department of Information and Computing Science, Hunan University of Technology, Zhuzhou Hunan 412008, China；
2.College of Mathematics and Econometrics, Hunan University, Changsha 410082 ,China)

Abstract：Studying on a class of planar quintic polynomial systems, the center and focus are judged by the formal series method. then by the Dulac function, the non-existence of closed orbit is discussed. And after Hopf bifurcation theory, some sufficient conditions for the existence of limit cycles of such systems are also obtained. Furthermore, with the theorem of Л.А.Черкас and Л.И.Жилевыч, some sufficient conditions for the uniqueness and stability of limit cycles of such systems are established .

Key words：center；focus；limit cycle；existence；uniqueness

1　背景知识

由常微分方程来直接研究和判断解的性质，这是常微分方程定性理论的基本思想。极限环问题是常微分方程定性理论研究的主要问题之一。自从H.Poincaré在他的论文《微分方程所定义的积分曲线》中发现极限环以来，极限环问题立刻受到众多数学家的重视。关于极限环的研究大体上可分为两个方面，一个方面是关于极限环的存在性、稳定性、个数及它们的相对位置等问题；另一方面是关于极限环随系统中参数的变化而产生或消失的问题。现有研究中关于极限环存在性问题的工作多一些，而唯一性的工作较少，至于个数和相对位置问题因其难度较大，已有的工作相对更少。

著名数学家D.Hilbert于1900年在巴黎国际数学家大会上提出了23个数学难题，其中第16个问题的后一半是：给定微分方程$\frac{dy}{dx}=\frac{P_n(x,y)}{Q_n(x,y)}$（其中$P_n$、$Q_n$是关于$x,y$的次数不高于$n$的实系数多项式），问它最多有多少个极限环及它们的相对位置，即对于一切这样的n次多项式，能否具体算出极限环的上界（自然依赖于n）。有关这一问题只有法国数学家H.Dulac在1932年证明了对每个这样的系统，极限环的个数是有限的。80年代初Dulac的证明被发现有误，后来Yu.S.Ilyashenko

收稿日期：2007-03-20
基金项目：国家自然科学基金资助项目（10371034），国家博士点专项科研基金资助项目（20050532023）
作者简介：刘兴国（1966-），男，湖南岳阳人，湖南工业大学副教授，主要从事微分方程理论及应用方面的教学与研究；
黄立宏（1963-），男，湖南湘阴人，湖南大学教授，博士生导师，主要从事神经网络动力系统及微分与差分方程方面的研究.

（1991）和J.Ecalle（1987）各自独立地弥补了此漏洞。另外，只对限制性很强的一类极限环，即强稳定性和强不稳定性极限环，S.P.Diliberto于1950年给出了极限环的个数和上界，参见文献[1-5]。

关于极限环理论，国内外很多学者做了大量的工作，特别是在平面二次系统极限环的存在性、唯一性、个数和相对位置等方面。秦元勋，蒲富全对二次系统提供了在奇点附近构造出具有3个极限环的具体例子的办法。后来史松龄、陈兰荪和王明淑举出了平面二次系统至少有4个极限环的例子，破除了平面二次系统极限环个数的上界是3的传统猜测，对 $n=2$ 时的Hilbert第16个问题是一个大的推进。我国著名学者叶彦谦先生所领导的工作组将二次系统分为3类方程来加以研究。对完全Ⅰ类方程，在其专著《多项式微分系统定性理论》的第12节，证明了在参数取值不同的情况下，恰好有47种不同的全局结构相图，并且可以画出来，得到这种确定、完整的结果是花费了巨大的劳动的。至于二次系统中的Ⅱ类、Ⅲ类方程，情况更复杂，还没有如此完整的结果，文献[1]中说已经得到超过1 000种的拓扑结构相图，并且估计这个数值有望超过2 000。到目前为止，对于二次系统较好的研究结果是：二次系统至少有4个极限环。

对于三次系统，纯数学与应用数学工作者们做了大量的研究工作，也取得了丰富的研究成果，但所得结论相对二次系统而言，远没有这么确定和完善。К.С.Сиьрский认为，没有二次项的三次系统在原点周围有5个极限环。1977年，B.I.Anorl从分支理论的角度来研究三次系统，得到了包围多个奇点的极限环，并且极限内有多个奇点，同时进一步提出了弱化D.Hilbert问题：$(n-1)$次Hamilton系统的极限环个数及分布。1989年，西班牙数学家A.Cima给出了三次系统的所有闭轨分枝，一共有54种，但没有证明是否能够实现它们。目前三次系统较好的研究结果是在高次扰动下有13个极限环。

对于五次或五次以上的系统，人们进行了许多尝试，但仅取得了较少的研究成果，其主要原因是五次或高于五次的代数方程没有一般的求解公式，系统奇点的计算与奇点类型的判定要么非常困难，要么难以实现。这也许是D.Hilbert第16问题100多年来无法取得突破性进展的重要原因。

尽管Hilbert第16问题至今仍悬而未解，但常微分方程定性理论的研究在众多中外数学工作者的共同努力下得到了蓬勃发展，在平面多项式系统和Liénard系统的研究中更是取得了大量成果，如文献[7-16]。定性理论在常微分方程的研究中往往有其独到的功能。当前，由于电子计算机的迅猛发展，给定性理论提供了有力的工具，同时定性理论分析往往给数字计算提供了理论依据。定性理论已成为从事许多学科和尖端技术研究的不可缺少的数学工具，常微分方程定性理论已之泛应用于包括自动控制理论，航天技术，生物科学，经济学等多个学科与领域，并且定性的思想和技巧已逐渐渗透到其他数学分支，例如泛函微分方程与偏微分方程等。因而，定性理论的进一步研究，不仅在数学理论上而且在实际应用上，都具有极其重要的意义。

在微分方程定性理论中，中心焦点的判定是个困难又麻烦的问题，对于平面高次多项式微分系统尤其如此。而根据Hopf分支理论来分析从平衡点分支出极限环的条件和所生成环的稳定性时，又必须对中心焦点作出详细的分析。本文对如下的一类高次微分系统进行定性分析：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y\left(1+x+x^2\right)\equiv P(x,y),\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-x+\delta y+a_1xy+a_2x^2y+\\ \qquad a_3x^4+a_4x^4y\equiv Q(x,y)。\end{cases}\tag{1}$$

其中，δ，$a_i\,(i=1,2,3,4,5)$均为任意实常数。本文运用基于Poincaré思想的形式级数法对系统$(1)\big|_{\delta=0}$进行了中心焦点的判定，借助Dulac函数法讨论了闭轨的不存在性；依据Hopf分支理论根据参数变化时焦点稳定性的变化分析得到了极限环存在的充分条件；通过将系统进行变换转化为Liénard方程，再通过构造对比系统和运用微分方程比较原理来验正Л.А.Черкас和Л.И.Жилевыч的极限环唯一性定理中所需条件，然后依据该定理分析得到了多种条件下极限环的唯一性和稳定性。

2　平衡点的性态

引理1　对于系统（1），当$\delta\neq0$时，有：

（ⅰ）若$a_3=0$，则有限处实奇点只有$O(0,0)$，且当$-2<\delta<0$时为稳定的粗焦点，当$0<\delta<2$时为不稳定的粗焦点；

（ⅱ）若$a_3\neq0$，则有限处实奇点有2个，为$O(0,0)$和$N\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{a_3}},0\right)$，且$O(0,0)$点性态同上，$N\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{a_3}},0\right)$是系统（1）的鞍点。

当$\delta=0$时，显然$O(0,0)$是系统（1）所对应线性系统的中心，我们需要对奇点$O(0,0)$进行中心焦点的判定，下面采用基于Poincaré思想的形式级数法分析当$\delta=0$时奇点$O(0,0)$的性态。

定理1　对于系统（1），当$\delta=0$时，有：

（ⅰ）当$a_2>0$时，$O(0,0)$为一阶不稳定细焦点；

（ⅱ）当$a_2=0$时，$O(0,0)$为一阶稳定细焦点；

(ⅲ)当$a_2=0$，$a_1a_3+a_4>0$时，$O(0,0)$为二阶不稳定细焦点；
(ⅳ)当$a_2=0$，$a_1a_3+a_4<0$时，$O(0,0)$为二阶稳定细焦点；
(Ⅴ)当$a_2=0$，$a_1a_3+a_4=0$时，$O(0,0)$为中心。

证明　当$\delta=0$时，

令$F(x,y)=x^2+y^2+F_3+F_4+\cdots$，其中$F_k(x,y)$是$x$与$y$的$k$次齐次多项式（$k=3,4,\cdots$），则有：

$$\left.\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}\right|_{(1)}=\left(2x+\frac{\partial F_3}{\partial x}+\frac{\partial F_4}{\partial x}+\cdots\right)\left(y+xy+x^2y\right)+\left(2y+\frac{\partial F_3}{\partial y}+\frac{\partial F_4}{\partial y}+\cdots\right)\left(-x+a_1xy+a_2x^2y+a_3x^4+a_4x^4y\right)。\quad(1)$$

令式(2)右端的3次幂项为0，有

$$y\frac{\partial F_3}{\partial x}+2x^2y-x\frac{\partial F_3}{\partial y}+2a_1xy^2=0\ 。$$

将上式取极坐标$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$，并消去$r^3$后可得：

$$\frac{\mathrm{d}F_3(\cos\theta,\sin\theta)}{\mathrm{d}\theta}=2\cos^2\theta\sin\theta+2a_1\cos\theta\sin^2\theta。$$

得$F_3(\cos\theta,\sin\theta)=-\frac{2}{3}\cos^3\theta+\frac{2}{3}a_1\sin^3\theta$，

即$F_3(x,y)=-\frac{2}{3}x^3+\frac{2}{3}a_1y^3$ 。

令式（2）右端的4次幂项为0，有

$$y\frac{\partial F_4}{\partial x}+xy\frac{\partial F_3}{\partial x}+2x^3y-x\frac{\partial F_4}{\partial y}+a_1xy\frac{\partial F_3}{\partial y}+2a_2x^2y^2=0,$$

即$x\frac{\partial F_4}{\partial y}-y\frac{\partial F_4}{\partial x}=2a_2x^2y^2+2a_1^2xy^3$。

将上式取极坐标　$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$，并消去$r^4$化简得：

$$D_4=\frac{\mathrm{d}F_4(\cos\theta,\sin\theta)}{\mathrm{d}\theta}=2a_2\cos^2\theta\sin^2\theta+2a_1^2\cos\theta\sin^3\theta\ 。$$

下面分3种情形进行讨论。

①当$a_2\neq0$时，因为

$$\int_0^{2\pi}\left[2a_2\cos^2\theta\sin^2\theta+2a_1^2\cos\theta\sin^3\theta\right]\mathrm{d}\theta=2a_2\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\sin^2\theta\mathrm{d}\theta\neq0\ 。$$

改取F_4满足方程$\frac{\mathrm{d}F_4(\cos\theta,\sin\theta)}{\mathrm{d}\theta}=D_4-C_4$。其中，

$C_4=\frac{a_2}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\sin^2\theta\mathrm{d}\theta$，且$C_4$与$a_2$同号。

设$\Phi(x,y)=x^2+y^2+F_3+F_4$，则有：

$$\left.\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}\right|_{(1)}=C_4r^4+o\left(r^4\right)。$$

从而当$a_2>0$时，$O(0,0)$为一阶不稳定细焦点，当$a_2<0$时，$O(0,0)$为一阶稳定细焦点。

②当$a_2=0,\ a_1a_3+a_4\neq0$时，则有：

$$F_4(x,y)=\frac{2}{4}a_1^2y^4。$$

令式（2）右端的5次幂项为0，有

$$y\frac{\partial F_5}{\partial x}+xy\frac{\partial F_4}{\partial x}+x^2y\frac{\partial F_3}{\partial x}-x\frac{\partial F_5}{\partial y}+a_1xy\frac{\partial F_4}{\partial y}+2a_3x^4y=0,$$

化简得（注意到$a_2=0$）：

$$x\frac{\partial F_5}{\partial y}-y\frac{\partial F_5}{\partial x}=-2(1-a_3)x^4y+2a_1^3xy^4,$$

可得：$F_5(x,y)=\frac{2}{5}(1-a_3)x^5+\frac{2}{5}a_1^3y^5$ 。

令式（2）右端的6次幂项为0，有：

$$y\frac{\partial F_6}{\partial x}+xy\frac{\partial F_5}{\partial x}+x^2y\frac{\partial F_4}{\partial x}-x\frac{\partial F_6}{\partial y}+a_1xy\frac{\partial F_5}{\partial y}+a_3x^4\frac{\partial F_3}{\partial y}+2a_4x^4y^2=0,$$

化简得：

$$x\frac{\partial F_6}{\partial y}-y\frac{\partial F_6}{\partial x}=2(a_1a_3+a_4)x^4y^2+2(1-a_3)x^5y+2a_1^4xy^5。$$

将上式取极坐标$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$，并消去$r^6$化简得：

$$D_6=\frac{\mathrm{d}F_6(\cos\theta,\ \sin\theta)}{\mathrm{d}\theta}=2(a_1a_3+a_4)\cos^4\theta\sin^2\theta+2(1-a_3)\cos^5\theta\sin\theta+2a_1^4\cos\theta\sin^5\theta。$$

因为当$a_1a_3+a_4\neq0$时，

$$\int_0^{2\pi}D_6\mathrm{d}\theta=2(a_1a_3+a_4)\int_0^{2\pi}\cos^4\theta\sin^2\theta\mathrm{d}\theta\neq0,$$

改取F_6满足方程$\frac{\mathrm{d}F_6(\cos\theta,\sin\theta)}{\mathrm{d}\theta}=D_6-C_6$，

其中$C_6=\frac{a_1a_2+a_4}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos^4\theta\sin^2\theta\mathrm{d}\theta$，且$C_6$与$a_4$同号。

设$\Psi(x,y)=x^2+y^2+F_3+F_4+F_5+F_6$，则有：

$$\left.\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}t}\right|_{(1)}=C_6r^6+o\left(r^6\right)\ 。$$

所以，当$a_2=0$，$a_1a_3+a_4>0$时，$O(0,0)$为2阶不稳定细焦点；当$a_2=0$，$a_1a_3+a_4<0$时，$O(0,0)$为2阶稳定细焦点。

③当$a_2=0$，$a_1a_3+a_4=0$时，由上面的分析易知$O(0,0)$为中心。

3 极限环的存在唯一性与稳定性

定理 2 下列条件之一成立时，系统（1）在全平面上不存在闭轨。

(ⅰ) $a_2>0$，$a_1a_3+a_4\geq 0$，$\delta\geq 0$;
(ⅱ) $a_2<0$，$a_1a_3+a_4\leq 0$，$\delta\leq 0$;
(ⅲ) $a_2\geq 0$，$a_1a_3+a_4>0$，$\delta\geq 0$;
(ⅳ) $a_2\leq 0$，$a_1a_3+a_4<0$，$\delta\leq 0$;
(ⅴ) $a_2\geq 0$，$a_1a_3+a_4\geq 0$，$\delta>0$;
(ⅵ) $a_2\leq 0$，$a_1a_3+a_4\leq 0$，$\delta<0$。

证明 当$a_1\neq 0$时，令$L(y)=a_1y-1=0$，则有：

$$\left.\frac{\mathrm{d}L(y)}{\mathrm{d}t}\right|_{(1)}=\delta+a_2x^2+(a_1a_3+a_4)x^4。$$

于是可知$y=\dfrac{1}{a_1}$是系统（1）于定理相应条件下的无切直线，取Dulac函数（当a_1=0时，取$B(x,y)=-(1+x+x^2)^{-1}$），$B(x,y)=(a_1y-1)^{-1}(1+x+x^2)^{-1}$，则

$$\operatorname{div}(BP,BQ)\big|_{(1)}=-\frac{\delta+a_2x^2+(a_1a_3+a_4)x^4}{(a_1y-1)^2(1+x+x^2)}。$$

因为在定理的条件之一成立时，上式定号且其零值仅在x=0处取得，所以在定理条件之一成立时系统（1）在全平面上不存在闭轨。

定理 3 当a_2=0，$a_1a_3+a_4=0$，$\delta=0$时，系统(1)在全平面上不存在极限环。

证明 由定理2的证明知，$\operatorname{div}(BP,BQ)\big|_{(1)}\equiv 0$时，系统(1)存在连续可微的积分因子$B(x,y)$，因而在全平面上不存在极限环。

引理 2 在系统（1）包围奇点$O(0,0)$的闭轨存在区域中，总有$a_3x^3<1$。

证明 对系统(1)而言，当$a_3\neq 0$时，有

$$\left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{1-\sqrt[3]{a_3}x=0}=y\left(1+\sqrt[3]{a_3}+\sqrt[3]{a_3}^{\,2}\right)。$$

因$1+\sqrt[3]{a_3}+\sqrt[3]{a_3}^{\,2}>0$，从而可知直线$1-\sqrt[3]{a_3}x=0$分别被系统(1)的鞍点$N\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{a_3}},0\right)$与所分割成的两部分是无切的，故系统(1)包围奇点$O(0,0)$的闭轨不能与直线$1-\sqrt[3]{a_3}x=0$相交，否则此闭轨将包围指数为+1的奇点$O(0,0)$与鞍点$N\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{a_3}},0\right)$，这是不可能的。所以包围奇点$O(0,0)$的闭轨若存在，则当$a_3>0$时，它必位于直线$1-\sqrt[3]{a_3}x=0$的左方；当$a_3<0$时，它必位于直线$1-\sqrt[3]{a_3}x=0$的右方，从而$a_3x^3<1$，当$a_3$=0时结论自然成立。

定理 4 下列条件之一成立时，系统(1)在$O(0,0)$外围至少存在一个极限环，且$\delta<0$时所产生的环内不稳定，$\delta>0$时所产生的环内稳定。

(ⅰ) $a_2>0$，$-1<<\delta<0$；
(ⅱ) $a_2<0$，$0<\delta<<1$；
(ⅲ) $a_2=0$，$a_1a_3+a_4>0$，$-1<<\delta<0$；
(ⅳ) $a_2=0$，$a_1a_3+a_4<0$，$0<\delta<<1$。

证明 在定理条件(ⅰ)或(ⅲ)下，系统$(1)|_{\delta=0}$以$O(0,0)$为不稳定细焦点。而当$-1<<\delta<0$时，系统（1）以$O(0,0)$为稳定粗焦点。当δ从零开始减小时，系统（1）的奇点$O(0,0)$由不稳定的细焦点变为稳定的粗焦点。从物理学角度来看，奇点由吸收能量到释放能量，此过程中必产生等幅振荡。再依据Hopf分支理论知，在此两种参数条件下，系统（1）在点$O(0,0)$外围至少产生一个不稳定的极限环。

在定理条件(ⅲ)或(ⅳ)下，系统$(1)|_{\delta=0}$以$O(0,0)$为稳定细焦点。而当$0<\delta<<1$时，系统（1）以$O(0,0)$为不稳定粗焦点。当δ从零开始增大时，系统（1）的奇点$O(0,0)$由稳定的细焦点变为不稳定的粗焦点。从物理学角度来看，奇点由释放能量到吸收能量，此过程中必产生等幅振荡。再依据Hopf分支理论知，在此两种参数条件下，系统（1）在点$O(0,0)$外围至少产生一个稳定的极限环。

定理 5 下列条件之一成立时，系统(1)在$O(0,0)$外围至多存在一个极限环，且当$\delta<0$时，若存在极限环则不稳定；当$\delta>0$时，若存在极限环则稳定。

(ⅰ) $a_3=0$，$a_4=0$，$a_2>0$，$\delta<0$;
(ⅱ) $a_3=0$，$a_4=0$，$a_2<0$，$\delta>0$;
(ⅲ) $a_3=0$，$a_4>0$，$a_2\geq 0$，$\delta<0$;
(ⅳ) $a_3=0$，$a_4<0$，$a_2\leq 0$，$\delta>0$；
(ⅴ) $a_3\neq 0$，$a_1a_3+a_4\geq 0$，$a_2>0$，$-a_2\leq\delta<0$，$f\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt[3]{a_3}}\right)<0$；
(ⅵ) $a_3\neq 0$，$a_1a_3+a_4\leq 0$，$a_2<0$，$0<\delta\leq -a_2$，$f\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt[3]{a_3}}\right)>0$；
(ⅶ) $a_3\neq 0$，$a_4=0$，$a_1a_3\geq 0$，$a_2>0$，$-a_2\leq\delta<0$；
(ⅷ) $a_3\neq 0$，$a_4=0$，$a_1a_3\leq 0$，$a_2<0$，$0<\delta\leq -a_2$；
(ⅸ) $a_3\neq 0$，$a_4>0$，$a_1a_3+a_4\geq 0$，$a_2>0$，$-a_2\leq\delta<0$；
(ⅹ) $a_3\neq 0$，$a_4<0$，$a_1a_3+a_4\leq 0$，$a_2<0$，$0<\delta\leq -a_2$。

其中，$f(x)=-\left(a_4x^4+a_2x^2+a_1x+\delta\right)\left(1+x+x^2\right)^{-1}$，$x_1$与$x_2$分别为方程$f(x)=0$于定理相应条件下的最大负根与最小正根。

证明 在时间变换$\mathrm{d}\tau=\dfrac{1}{1+x+x^2}\mathrm{d}t$下，系统（1）可化为：

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{d\tau}=y,\\[2mm] \dfrac{dy}{d\tau}=-\dfrac{x(1-a_3x^3)}{1+x+x^2}+y\dfrac{\delta+a_1x+a_2x^2+a_4x^4}{1+x+x^2}。\end{cases}\tag{3}$$

于是可知式（3）等价于下列形式的Liénard方程：

$$\frac{d^2x}{d\tau^2}-\frac{\delta+a_1x+a_2x^2+a_4x^4}{1+x+x^2}\frac{dx}{d\tau}+\frac{x\left(1-a_3x^3\right)}{1+x+x^2}=0。\tag{4}$$

将式（4）进一步写成下面的等价形式：

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{d\tau}=-\phi(y)-F(x),\\[2mm] \dfrac{dy}{d\tau}=g(x)。\end{cases}\tag{5}$$

其中：$g(x)=\dfrac{x(1-a_3x^3)}{1+x+x^2}$，$\phi(y)=y$，

$$F(x)=\int_0^x f(x)dx=-\int_0^x\frac{\delta+a_1u+a_2u^2+a_4u^4}{1+u+u^2}du。$$

则有$f(x)$，$g(x)$，$\phi(y)$连续可微，$\phi(y)=y$单调递增，且$y\phi(y)=y^2>0$，$y\neq 0$；$f(0)=F'(0)=-\delta$。由引理2知，在包围原点的闭轨存在的区域中总有$a_3x^3<1$，从而

$$xg(x)=\frac{x^2\left(1-a_3x^3\right)}{1+x+x^2}>0,\ x\neq 0。$$

取$f_1(x)=f(x)+g(x)[0+0F(x)]=f(x)=$

$$-\frac{a_4x^4+a_2x^2+a_1x+\delta}{1+x+x^2}。$$

因$f_1(0)=f(0)=-\delta$，当$a_4\neq 0$时，则有：

$f_1(\pm\infty)=-\infty\,\mathrm{sgn}a_4$，$\mathrm{sgn}[f_1(\pm\infty)f_1(0)]=\mathrm{sgn}(a_4\delta)$。此时若$a_4$与$\delta$异号，则必存在$x_1<0<x_2$，使得$f_1(x_1)=f_1(x_2)=0$；当$a_4=0$，$a_2\neq 0$时，则有$f_1(\pm\infty)=a_2$，$\mathrm{sgn}[f_1(\pm\infty)f_1(0)]=\mathrm{sgn}(a_2\delta)$，此时若$a_2$与$\delta$异号，则必存在$x_1<0<x_2$，使得$f_1(x_1)=f_1(x_2)=0$；或当$a_3\neq 0$且$f\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt[3]{a_3}}\right)$均与$\delta$同号时，则必存在$-\dfrac{1}{\sqrt[3]{|a_3|}}<x_1<0<x_2<\dfrac{1}{\sqrt[3]{|a_3|}}$，使得$f_1(x_1)=f_1(x_2)=0$。若$f_1(x)=0$有多个根，则取$x_1$为最大的负根，$x_2$为最小的正根，于是在区间$[x_1,x_2]$上，当$\delta<0$，$a_4>0$或$\delta<0$，$a_4=0$，$a_2>0$或$\delta<0$，$f\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt[3]{a_3}}\right)<0$时$f_1(x)\geq 0$；当$\delta>0$，$a_4<0$或$\delta>0$，$a_4=0$，$a_2<0$或$\delta>0$，$f\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt[3]{a_3}}\right)>0$时$f_1(x)\leq 0$。系统（1）亦可写成：

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y\left(1+x+x^2\right)\equiv P(x,y),\\[2mm] \dfrac{dy}{dt}=-x\left(1-a_3x^3\right)-\left(1+x+x^2\right)f_1(x)y\equiv Q(x,y)。\end{cases}$$

而当$f_1(x)=f(x)\equiv 0$时，系统（1）变为

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y\left(1+x+x^2\right)\equiv P_1(x,y),\\[2mm] \dfrac{dy}{dt}=-x\left(1-a_3x^3\right)\equiv Q_1(x,y)。\end{cases}\tag{6}$$

易算得$PQ_1-P_1Q=y^2\left(1+x+x^2\right)^2f_1(x)$，而当$x\in[x_1,x_2]$时$f_1(x)$在定理相应条件下定号，此时$PQ_1-P_1Q$亦定号。根据比较原理，当$x\in[x_1,x_2]$时，系统（1）的闭轨线与系统（6）的闭轨线必重合或不相交。显然，系统（1）的闭轨线与系统（6）的闭轨线不重合，从而在带域$x_1\leq x\leq x_2$中，系统（1）与系统（6）的闭轨不能相交。而当$a_3=0$时，原点是系统（6）的唯一奇点且为中心，自然系统（6）的闭轨将充满带域$x_1\leq x\leq x_2$；当$a_3\neq 0$时原点为系统（6）的中心，$N\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{a_3}},0\right)$为系统（6）的鞍点，只要当$a_3>0$时$-\infty<x_1<0<x_2<\dfrac{1}{\sqrt[3]{a_3}}$，而当$a_3<0$时$\dfrac{1}{\sqrt[3]{a_3}}<x_1<0<x_2<+\infty$，系统（6）的闭轨将充满带域$x_1\leq x\leq x_2$。若系统（1）的闭轨线不完全包含区间$[x_1,x_2]$，则系统（1）经过区间$[x_1,x_2]$上任一点的闭轨必与系统（6）的闭轨相交，得出矛盾。因而系统（1）的闭轨若存在则必包含定理相应条件下的区间$[x_1,x_2]$。记

$$T=\frac{d}{dx}\left(\frac{f_1(x)}{g(x)}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{a_4x^4+a_2x^2+a_1x+\delta}{a_3x^4-x}\right)=$$

$$\frac{-2a_2a_3x^5-3(a_1a_3+a_4)x^4-4a_3\delta x^3-a_2x^2+\delta}{(a_3x^4-x)^2}=$$

$$\frac{-3(a_1a_3+a_4)x^4-a_2x^2(1-a_3x^3)+\delta(1-a_3x^3)-}{(a_3x^4-x)\cdot}\rightarrow$$

$$\leftarrow\frac{3(a_2+\delta)(1-a_3x^3)-3(a_2+\delta)}{(a_3x^4-x)}。$$

结合上面的分析，根据Д.А.Черкас和Л.И.Жилевыч的唯一性定理我们有：

①当定理的条件(ⅰ)或(ⅲ)成立时，$T<0$，从而$\dfrac{f_1(x)}{g(x)}$在$(-\infty,x_1)$和$(x_2,+\infty)$中单调不增，且$f(0)>0$，所以系统（1）在$O(0,0)$点外围至多存在一个不稳定的极限环。

②当定理的条件(ⅱ)或(ⅳ)成立时，$T>0$，从而

$\frac{f_1(x)}{g(x)}$在$(-\infty, x_1)$和$(x_2, +\infty)$中单调不减，且$f(0)<0$，所以系统（1）在$O(0, 0)$点外围至多存在一个稳定的极限环。

③当定理的条件(Ⅴ)或(Ⅶ)或(Ⅸ)成立时，$T<0$ $(x\neq 0)$，从而$\frac{f_1(x)}{g(x)}$在$(-\infty, x_1)$和$\left(x_2, \frac{1}{\sqrt[3]{a_3}}\right)$或$\left(\frac{1}{\sqrt[3]{a_3}}, x_1\right)$和$(x_2, +\infty)$上单调不增，且$f(0)>0$，所以系统（1）在$O(0, 0)$点外围至多存在一个不稳定的极限环。

④当定理的条件(ⅵ)或(Ⅷ)或(Ⅹ)成立时，$T>0$ $(x\neq 0)$，从而$\frac{f_1(x)}{g(x)}$在$(-\infty, x_1)$和$\left(x_2, \frac{1}{\sqrt[3]{a_3}}\right)$或$\left(\frac{1}{\sqrt[3]{a_3}}, x_1\right)$和$(x_2, +\infty)$上单调不减，且$f(0)<0$，所以系统（1）在$O(0, 0)$点外围至多存在一个稳定的极限环。定理证毕。

由定理4与定理5易得下面的定理6。

定理6　下列条件之一成立时，系统(1)在$O(0, 0)$外围存在唯一极限环，且当$\delta<0$时极限环不稳定，$\delta>0$时极限环稳定。

(ⅰ) $a_3=0$，$a_4=0$，$a_2>0$，$-1<<\delta<0$;

(ⅱ) $a_3=0$，$a_4=0$，$a_2<0$，$0<\delta<<1$;

(ⅲ) $a_3=0$，$a_4>0$，$a_2\geq 0$，$-1<<\delta<0$;

(ⅳ) $a_3=0$，$a_4<0$，$a_2\leq 0$，$0<\delta<<1$；

(Ⅴ) $a_3\neq 0$，$a_1a_3+a_4\geq 0$，$a_2>0$，$-a_2\leq\delta<0$，$|\delta|<<1$，$f\left(\pm\frac{1}{\sqrt[3]{a_3}}\right)<0$;

(ⅵ) $a_3\neq 0$，$a_1a_3+a_4\leq 0$，$a_2<0$，$0<\delta\leq -a_2$，$|\delta|<<1$，$f\left(\pm\frac{1}{\sqrt[3]{a_3}}\right)>0$;

(ⅶ) $a_3\neq 0$，$a_4=0$，$a_1a_3\geq 0$，$a_2>0$，$-a_2\leq\delta<0$，$|\delta|<<1$；

(ⅷ) $a_3\neq 0$，$a_4=0$，$a_1a_3\leq 0$，$a_2<0$，$0<\delta\leq -a_2$，$|\delta|<<1$；

(ⅸ) $a_3\neq 0$，$a_4>0$，$a_1a_3+a_4\geq 0$，$a_2>0$，$-a_2\leq\delta<0$，$|\delta|<<1$;

(Ⅹ) $a_3\neq 0$，$a_4<0$，$a_1a_3+a_4\leq 0$，$a_2<0$，$0<\delta\leq -a_2$，$|\delta|<<1$; 。

其中，$f(x)=-\left(a_4x^4+a_2x^2+a_1x+\delta\right)\left(1+x+x^2\right)^{-1}$，$x_1$与$x_2$分别为方程$f(x)=0$于定理相应条件下最大的负根与最小的正根，且条件(ⅶ)~(Ⅹ)中，当$a_3>0$时要求$-\infty<x_1<0<x_2<\frac{1}{\sqrt[3]{a_3}}$，而当$a_3<0$时要求$\frac{1}{\sqrt[3]{a_3}}<x_1<0<x_2<+\infty$。

参考文献：

[1] 叶彦谦. 多项式微分系统的定性理论[M]. 上海：上海科学技术出版社，1995.

[2] 张芷芬，丁同仁，黄文灶，等. 微分方程定性理论[M]. 北京：科学出版社，1985.

[3] 叶彦谦. 极限环论[M]. 上海：上海科技出版社，1984.

[4] 张锦炎，冯贝叶. 常微分方程几何理论与分支问题[M]. 北京：北京大学出版社，2000.

[5] Jaume Giné. On some open problems in planar differential systems and Hilbert's 16th problem[J]. Chaos，Solitons and Fractals，2007，31(5)：1118-1134.

[6] 马知恩. 一类三次系统极限环的存在唯一性[J]. 数学年刊，1986, 7A（1）：1-6.

[7] 刘德明. 一类三次多项式系统的定性分析[J]. 数学年刊，1991, 12A（1）：1-7.

[8] Zheng Zuo-Huan. On the limit cycles for a class of planar systems[J]. Nonlinear Analysis，1995，24(4)：605-614.

[9] Chen Haibo，Liu Yirong，Zeng Xianwu. Center conditions and bifurcation of limit cycles at degenerate singular points in a quintic polynomial differential system[J]. Bulletin des Sciences Mathématiques，2005，129(2)：127-138.

[10] Liu Xing-Guo. Limit Cycles in Class of Bio-Chemistry Reaction Systems，Dynamics of Continuous，Discrete and Impulsive Systems[J]. A: Mathematical Analysis，2005，12 (5)：675-684.

[11] Lynch S. Limit cycles of generalized Liénard equations[J]. Applied Mathematics Letters，1995，8(6)：15-17.

[12] Huang Lihong，Chen Yuming，Wu Jianhong. Boundedness of Solutions For a Class of Nonlinear Planar Systems[J]. Tohoku Math.j.，2002，54：393-417.

[13] Li B Y，Zhang Z F. A Note on a Result of G. S. Petrov About the Weakened 16th Hilbert Problem[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications，1995，190(2)：489-516.

[14] Kooij R E. Real Polynomial Systems of Degree n with $n+1$ Line Invariants[J]. Journal of Differential Equations，1995，116(2)：249-264.

[15] Armengol Gasull，Hector Giacomini. A New Criterion for Controlling the Number of Limit Cycles of Some Generalized Liénard Equations[J]. Journal of Differential Equations，2002，185(1)：54-73.

[16] Lawrence M Perko，Shü Shih-Lung. Existence, uniqueness, and nonexistence of limit cycles for a class of quadratic systems in the plane[J]. Journal of Differential Equations，1984，53 (2)：146-171.