强阻尼非线性 Kirchhoff 方程的局部解

张再云

（湖南理工学院 数学系，湖南 岳阳 414006）

摘　要：研究一类强阻尼非线性 Kirchhoff 型方程初边值问题局部解的存在性，利用 Galerkin 方法和改进的第二能量方法得到主要结果：当 $M(r)$和 $g(u)$满足一定条件且初值充分小时，方程存在唯一局部解。

关键词：Galerkin 方法；改进的第二能量方法；局部解

中图分类号：O175.29　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1673-9833(2007)02-0043-03

Local Solution of Nonlinear Degenerate Kirchhoff Equation with Strong Damp

Zhang Zaiyun

（Department of Mathematics，Hunan Institute of Science and Technology，Yueyang Hunan 414006，China）

Abstract: The existence of local solution of nonlinear Kirchhoff type equation of strong damp of initial boundary value is studied by utilizing Galerkin's method and modified second energy method. There exists a unique local solution if $M(r)$ and $g(u)$ satisfy some conditions and initial value is small enough.

Key words: Galerkin's method; modified second energy method; local solution

1　定理的提出

在文献[1]中，G . Kirchhoff 提出了固定弹性弦终端的微小振动模型: $u''-M\left(\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)\Delta u=f$。当$n$=1时，$M(r)=a+br,\ a,b>0$。后来，很多人研究了Kirchhoff型的波方程[2-9]。在文献[3]中，Kosuke Ono研究了带初始和边界条件的方程$u''-M\left(\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)\Delta u+\delta u'=f(u)$，$u(x,t)=0$，$x\in\partial\Omega$，$u(x,0)=u_0(x)$，$u'(x,0)=u_1(x)$，这里$M(r)\geq 0$，$M(r)$为局部Lipschitz函数，形如$M(r)=a+br^s$ $(a,b,r,s>0)$。并且讨论了两种情况，第一种是非退化型，即：$a,b>0$；第二种为退化型，即：$a=0,\ b>0$，[3，4] 然而对于这类强阻尼非线性Kirchhoff型方程，没有任何结果。

本文考虑如下问题：

$$\begin{cases}u''-M\left(\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)\Delta u+\beta u'-\Delta u'+g(u)=0;\\ u(x,t)=0,\ x\in\partial\Omega;\\ u(x,0)=u_0(x),\ u'(x,0)=u_1(x),\ (x,t)\in Q=\Omega\times[0,T]。\end{cases}\tag{1}$$

这里$\Omega\subset R^n$是具有光滑边界$\partial\Omega$的有界域，$u_0\in D(A)=H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$，$u_1\in H_0^1(\Omega)$，$f\in L^2(\Omega)=H$。记$V=H_0^1(\Omega)$，$H=L^2(\Omega)$，$V$和$H$为通常的Sobolev空间，分别给出他们的数积与范数，数积用$((\cdot,\cdot))$和$(\cdot,\cdot)$表示，范数用$\|\cdot\|$和$|\cdot|$表示。在V中，考虑数积$((u,v))=\left(\int_\Omega\nabla u\cdot\nabla v\mathrm{d}x\right)^{\frac12}$，范数$\|u\|=\left(\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac12}$，在$H$中，考虑数积$(u,v)=\int_\Omega uv\mathrm{d}x$，范数$|u|=\left(\int_\Omega u^2\mathrm{d}x\right)^{\frac12}$。假设$V\subset H$连续且为紧嵌入，记$u''=u_{tt}$，$u'=u_t$。

在本文中，C，c_i表示不同的正常数。由于要克服非线性项$M(r)$和$g(u)$的困难，引入改进的第二能量方法证明当初值充分小时，方程存在唯一的局部解。

若给出如下一些必要的假设：

收稿日期：2006-12-22

基金项目：湖南省教育厅基金资助项目（06C383）

作者简介：张再云(1975-)，男，湖南宁乡人，湖南理工学院讲师，硕士，主要从事应用偏微分方程方面的研究.

假设1：$M(\lambda)\in C^1([0,\infty),R),\lambda\ge 0$；

假设2：$M(\lambda)$为Lipschitz 局部连续，$0<m_0\le M(\lambda)\le m_1$，$0\le M'(\lambda)\le C$；

假设3：$g(u)\in C^1([0,\infty),R)$，$|g(u)|\le C|u|$，$|g'(u)|\le C$，$g(u)u'\ge 0$；

假设4：$\beta>0$；

假设5：$\dfrac{|\nabla u_0|^2}{m_0}+|\Delta u_1|^2<\varepsilon(\varepsilon>0)$。

则有如下定理。

定理1 设方程（1）满足假设1~5，则方程存在唯一局部解$u(x,t)$，且$u\in L^\infty([0,T],D(A)),u'\in L^\infty([0,T],V)$，$u''\in L^\infty([0,T],H)$。

2 定理的证明

用Galerkin逼近方法构造方程的逼近解u_m和改进的第二能量方法，可以得到下面的引理和重要的先验估计。

引理1 若满足定理的条件，则有方程（1）存在唯一的解u_m，且$u_m\in L^\infty([0,T],D(A))$，$u'_m\in L^\infty([0,T],V)$，$u''_m\in L^\infty([0,T],H)$，$u_m$为（1）的逼近解。

证明 运用Galerkin逼近方法构造方程的逼近解u_m。设$\{\lambda_j\}_{j=1}^m$为$-\Delta\omega=\lambda\omega$的特征值序列，记$w_j$为对应的特征值$\lambda_j$的特征函数，取$w_j$为$V$的标准正交基，则$V_m=span\{w_1,w_2,\cdots,w_m\}\subset V$，

$(\nabla w_j,\nabla v)=\lambda_j(w_j,v)(\forall v\in V)$。

首先构造逼近解u_m，记$u_m=\sum_{j=1}^m g_{jm}w_j(j=1,2,\cdots,m)$，$g_{jm}$由下面的微分方程决定：

$$(u''_m,w_j)+M\left(|\nabla u_m|^2\right)(\nabla u_m,\nabla w_j)+\beta(u'_m,w_j)-(\Delta u'_m,w_j)+(g(u_m),w_j)=0,\tag{2}$$

初始条件为：

$$\begin{cases}u_m(0)=u_m^0=\sum_{j=1}^m(u_0,w_j)w_j,\\ u'_m(0)=u_m^1=\sum_{j=1}^m(u_1,w_j)w_j。\end{cases}\tag{3}$$

式中u_m^0,u_m^1的取值满足：$u_m^0\to u_0$在$D(A)$中强收敛，$u_m^1\to u_1$在V中强收敛。显然式（2）、（3）存在解u_m[9]。

因此，可得到式（1）的逼近方程：

$$(u''_m,v)+M\left(|\nabla u_m|^2\right)(\nabla u_m,\nabla v)+\beta(u'_m,v)-(\Delta u'_m,v)+(g(u_m),v)=0(\forall v\in V_m)。\tag{4}$$

用下面的先验估计证明引理。

估计1 在式（4）中取$v=2u'_m$，则得到：

$$(u''_m,2u'_m)+M\left(|\nabla u_m|^2\right)(\nabla u_m,2\nabla u'_m)+\beta(u'_m,2u'_m)+2(\nabla u'_m,\nabla u'_m)+(g(u_m),2u'_m)=0,$$

由假设3、4和Young不等式得：

$$\frac{d}{dt}|u'_m|^2+M\left(|\nabla u_m|^2\right)\frac{d}{dt}|\nabla u_m|^2\le 0;$$

由假设1、2得：$\dfrac{d}{dt}|u'_m|^2+m_0\dfrac{d}{dt}|\nabla u_m|^2\le C$；

由Gronwall 不等式得$|u'_m|^2+|\nabla u_m|^2\le C$，即$|u'_m|\le C$，$|\nabla u_m|\le C$。

估计2 在式（4）中取$v=-2\Delta u'_m$，则得到：

$$(u''_m,-2\Delta u'_m)+M\left(|\nabla u_m|^2\right)(\Delta u_m,-2\Delta u'_m)+\beta(u'_m,-2\Delta u'_m)-(\Delta u'_m,-2\Delta u'_m)+(g(u_m),-2\Delta u'_m)=0$$

$$\Rightarrow\frac{d}{dt}|\nabla u'_m|^2+M\left(|\nabla u_m|^2\right)\frac{d}{dt}|\Delta u_m|^2+2\beta|\nabla u'_m|^2+2|\Delta u'_m|^2\le|g(u_m)||2\Delta u'_m|。$$

由Young不等式和假设2~4得：

$$\frac{d}{dt}|\nabla u'_m|^2+M\left(|\nabla u_m|^2\right)\frac{d}{dt}|\Delta u_m|^2\le C\left(|\nabla u_m|^2+|\nabla u'_m|^2\right)。$$

由估计1和假设4得：

$$\frac{d}{dt}|\nabla u'_m|^2+M\left(|\nabla u_m|^2\right)\frac{d}{dt}|\Delta u_m|^2\le c_1+c_2|\nabla u'_m|^2。\tag{5}$$

为了克服非线性项$M\left(|\nabla u_m|^2\right)$，我们引入改进的第二能量方法，建立能量泛函：

$$E(t)=\frac{d}{dt}|\Delta u_m|^2+\frac{1}{a(t)}\frac{d}{dt}|\nabla u'_m|^2-\frac{a'(t)}{a^2(t)}|\nabla u'_m|^2。\tag{6}$$

这里$a(t)=M\left(|\nabla u_m|^2\right)$。 (7)

由式（5~7）得：

$$\frac{d}{dt}E(t)+\frac{a'(t)}{a^2(t)}|\nabla u'_m|^2\le\frac{c_1+c_2|\nabla u'_m|^2}{a(t)}。$$

因由假设1、2知$a'(t)>0,\ 0<m_0\le a(t)\le m_1$，所以

$\dfrac{d}{dt}E(t)\le\dfrac{c_1+c_2|\nabla u'_m|^2}{m_0}\le\dfrac{c_1+c_2E(t)}{m_0}$，即

$\dfrac{d}{dt}E(t)\le c_3+c_4E(t)$，这里$c_3=\dfrac{c_1}{m_0}$，$c_4=\dfrac{c_2}{m_0}$。

由Gronwall不等式得：

$$E(t)\le E(0)e^{-c_4t}+c_3(1-e^{-c_4t})。\tag{8}$$

由假设5和式（8）得$E(t)\le C$，从而$|\nabla u'_m|^2+|\Delta u_m|^2\le C$，即$|\nabla u'_m|\le C$，$|\Delta u_m|^2\le C$。

估计3 在式（4）中取$v=2\Delta^2u'_m$，则得到：

$$\frac{d}{dt}|\Delta u'_m|^2+M\left(|\nabla u_m|^2\right)\frac{d}{dt}|\nabla\Delta u_m|^2+2\beta|\Delta u'_m|^2+2|\nabla\Delta u'_m|^2=2(\nabla g(u_m),\nabla\Delta u'_m)。$$

由Young不等式和假设2~4得：

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\Delta u_m'|^2+M\left(|\nabla u_m|^2\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\nabla\Delta u_m|^2\le C$，从而

$|\Delta u_m'|^2+|\nabla\Delta u_m|^2\le C$，即$|\Delta u_m'|^2\le C$，$|\nabla\Delta u_m|\le C$。

估计4　在式（4）中取$v=2u_m''$，则得到：$|u_m''|\le m_1|\Delta u_m|+\beta|u_m'|+|g(u_m)|$，由估计1、2和假设2、4得到$|u_m''|\le C$。

定理的证明

为了方便，记u_m的子列仍然为u_m。由估计1~4得到下面的收敛性：

$u_m\to u$　在$L^\infty([0,T],D(A))$中弱$*$收敛；

$u_m'\to u'$　在$L^\infty([0,T],V)\cap L^\infty([0,T],H)$中弱$*$收敛；

$u_m''\to u''$　在$L^\infty([0,T],H)$中弱收敛。

又由假设2，$M(\lambda)$为Lipschitz局部连续，从而由Arzela-Ascoli定理可得：$M\left(|\nabla u_m|^2\right)\to M\left(|\nabla u|^2\right)$在$L^\infty([0,T],H)$中强收敛。

因此，对式（4）两边取极限得

$$u''-M\left(\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)\Delta u+\beta u'-\Delta u'+g(u)=0\ 。$$

下证唯一性

若u，v为（1）的解，设$w=u-v$，则有：

$$w''-M\left(|\nabla u|^2\right)\Delta w+\beta w'-\Delta w'=-\left[g(u)-g(v)\right]-\left[M\left(|\nabla u|^2\right)-M\left(|\nabla v|^2\right)\right]\Delta v。\qquad(9)$$

$w(0)=0$，$w'(0)=0$。　（10）

在式（9）中，两边与$2w'$在H作内积，由假设3可得：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|w'|^2+M\left(|\nabla u_m|^2\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\nabla w|^2+2\beta|w'|^2+2|\nabla w'|^2\le 2C|w||w'|+\left(\left[M\left(|\nabla u|^2\right)-M\left(|\nabla v|^2\right)\right]\Delta v,w'\right)。\qquad(11)$$

又由假设2得：

$$\left|M\left(|\nabla u|^2\right)-M\left(|\nabla v|^2\right)\right|\le C|\nabla w|。\qquad(12)$$

由Young不等式得：

$$2|w||w'|\le|w|^2+|w'|^2。\qquad(13)$$

综合式（11~13）得：

$$|\nabla w(t)|^2+|w'(t)|^2\le C\int_0^t|\nabla w(s)|^2+|w'(s)|^2\mathrm{d}s。$$

由Gronwall不等式得$w=0$，即$u=v$。因此，方程（1）存在唯一局部解。

致谢：衷心感谢导师肖跃龙教授的指导。

参考文献：

[1] Kirchhoff G. Vorlesungen uber mechamic[J]. Tauber LEIPZIG，1883，2(2):1-10.

[2] Mederious Z A，Limaco J，Menezes S B. Vibrations of Elastics String: Mathematical aspect[J]. Journal of computational analysis and applications，2002，4(2):91-127.

[3] Kosuke Ono. Global existence，decay and blow-up of solutions for some mildly degenerate nonlinear Kirchhoff strings[J]. Journal of differential equations，1997，137(2) : 273-301.

[4] Kosuke Ono. Global existence，asymptotic behavior and non-global existence of solutions for damped nonlinear wave equations of Kirchhoff type in the whole space[J]. Mathematic and Mechanics in the Applied Science，2000，23(2):535-560.

[5] Gda silva M D，Mediros L A，Binazutti A C. Vibrations of Elastics String:Unilateral problem[J]. JCAA，2002，4(3):1-23.

[6] Limaco J，Ferrel L A Mediros. Kirchhoff-Carrier elastic strings in non-cylindrical domains[J]. PORTUGALIAE MATHEMATICA，1998，55(3):465-500.

[7] EBIHARE Y，Mediros L A，MILLA Mivanda M. Local solutions for nonlinear degenerate hyperbolic equations[J]. Nonlinear Anal. T. M. A.，1986，10:27-40.

[8] Julio G Dix. Decay of solutions of a degenerate hyperbolic equation[J]. Electronic Journal of differential equations，1998，21:1-10.

[9] Teman R. Infinite dimensional dynamics systems in mechanics and physics[J]. Applied Mathematical Science, 1998, 68: 135-137.