一类拟线性退化椭圆型偏微分方程的正解

欧云华[1]，叶　钰[2]

（1.湖南工业大学 数学系，湖南 株洲 412007；2.长沙理工大学 数学与计算科学学院，湖南 长沙 410076）

摘　要：讨论了拟线性退化椭圆型偏微分方程的正解问题，给出了正解的存在性结果；同时还讨论了另一类拟线性退化椭圆型偏微分方程的正解存在性问题。

关键词：第一特征值；不动点指数；正解

中图分类号: O175.26　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1008-2611(2007)01-0041-05

Positive Solutions of Degenerate Quasilinear Elliptic Equations

Ou Yunhua[1]，Ye Yu[2]

（1. Department of Mathematics，Hunan University of technology，Zhuzhou Hunan 412007，China；
2.Institute of Math & Compute Science，Changsha University of Science and Technology，Changsha 410076，China)

Abstract: Positive solutions problem on the following degenerate quasilinear elliptic equations is discussed. It shows that the existence of positive solutions and meanwhile discusses positive solutions about anotherguess degenerate quasilinear elliptic equations.

Key words：the principal eigenvalue；fixed point index；positive solutions.

0　引言

本文考虑下列一类拟线性退化椭圆型方程的正解问题：

$$\begin{cases}-\mathrm{div}\boldsymbol{A}(x,\nabla u)=\lambda a(x)|u|^{p-2}u+f(x,u,\lambda),\\ 0\le u(x)\in W_0^{1,p}(\Omega),\quad p>1。\end{cases}\tag{1}$$

式中：Ω是R^N中具有光滑边界的有界区域；

$0\le\lambda\in R^+,\quad 0<a(x)\in L^\infty(\Omega)$；

f满足一定条件。

不难发现，当a（x）满足适当的条件时，特征值问题$\begin{cases}-\mathrm{div}\boldsymbol{A}(x,\nabla u)=\lambda a(x)|u|^{p-2}u,\\ u\in W_0^{1,p}(\Omega),\end{cases}$存在正的第一特征值$\lambda_1$以及相应的正特征函数$u_1$，这样便可以讨论当$0\le\lambda<\lambda_1$时方程（1）正解存在性问题。最近几年，对于方程（1）的特例（p-Laplacian算子）$-\Delta_p u=\lambda a(x)|u|^{p-2}u+f(x,u,\lambda)(x\in\Omega)$在有界区域内的解存在性问题受到了广泛的关注。这里$\Delta_p u=\mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$。当$p=2$时，Amann[1]以及Ambrosetti和Hess[2]做出了相应的结果；而Ambrosetti，Azorero和Peral等人，运用拓扑度的理论考虑了$p>1$的一般情况。另一方面，当Ω是无界区域时，相应的结果可以从Y.S Huang [3]的论文中获得。另外，亦可以从文献[3]知：当h（x）是正的不恒为零$C_0^\infty(\Omega)$函数时，方程$-\Delta_p u=\lambda a(x)|u|^{p-2}u+h(x)$ 在Ω有界，以及$\lambda=\lambda_1$时是无解的。

本文主要运用的方法基于Amann在文献[1]中介绍的不动点指数理论，同样也可以从文献[3]中得到不动点指数的性质，如正规性，同伦性等。

收稿日期：2006-12-12
基金项目：湖南省教育厅基金资助项目（05C024）
作者简介：欧云华（1957-），男，湖南益阳人，湖南工业大学副教授，主要从事基础数学的教学与研究.

1 辅助性结论

研究如下偏微分方程的正解问题：

$$\begin{cases}-\mathrm{div}\boldsymbol{A}(x,\nabla u)=\lambda a(x)|u|^{p-2}u+f(x,u,\lambda),\\ u\geq 0,\\ u\in W_0^{1,p}(\Omega),\end{cases} \qquad (2)$$

式中：$\lambda\in R^+$，$1<P<N$。

首先引进本文所需要的一些假设和记号。

记$\begin{cases}P^*=\dfrac{Np}{N-p},\\ p'=\dfrac{p}{p-1}。\end{cases}$

在索伯列夫空间$X=W_0^{1,p}(\Omega)$，可以定义等价范数$\|u\|=\left(\int_\Omega|\nabla u|^p\,\mathrm{d}x\right)^{1/p}$，并且记<·,·>是$X^*$到$X$的对偶积，

$P=\{u\in X\,|\,u\geq 0\}$，

$P^*=\{f\in X^*\,|\,\langle f,u\rangle\geq 0,\quad\forall u\in P\}$，

$P_\varepsilon=\{u\in P\,|\,\|u\|<\varepsilon\}$。

同时还假设$0<a(x)\in L^\infty(\Omega)$以及泛函$f$满足下列条件：

f_1）$f:\Omega\times R\times R^+\to R^+$几乎处处在$x\in\Omega$关于（$s$，$\lambda$）连续，并且对于任给$(s,\lambda)\in R^+\times R^+$，$f(\cdot,s,\lambda)$是可测的；

f_2）对于几乎处处$x\in\Omega$以及$s\in R^+$，$f(x,s,\lambda)\leq c(\lambda)\left(\sigma(x)+\rho(x)s^{q-1}\right)$，其中$c(\lambda)\geqslant 0$连续，$p<q<p^*$，$0\leq\rho(x)\in L^\infty(\Omega)$，

$0\leq\sigma(x)\in L^{(p^*)'}(\Omega)\cap L^{N/p}(\Omega)$；

f_3）对于几乎处处$x\in\Omega$，λ在有界区间上有$\lim\limits_{s\to 0}\dfrac{f(x,s,\lambda)}{a(x)s^{p-1}}=0$。定义方程（2）的弱解。如果对于$(\lambda,u)\in R^+\times P$满足下列积分等式

$\int_\Omega A(x,\nabla u)\nabla v=\int_\Omega(\lambda a(x)u^{p-1}+f(x,u,\lambda))v,\ \ \forall v\in X$，

这里$A(x,\xi):\Omega\times R^N\to R^N$满足下列几个条件：

A_1）$\boldsymbol{A}$是向量值函数，而且映射$x\to\boldsymbol{A}(x,\xi)$，对于任意给的$\xi\in R^N$是可测的，对几乎处处$x\in\Omega$关于$\xi$是连续的。

A_2）Lipschitz型不等式：

$|A(x,\xi)-A(x,\tau)|\leq b|\xi-\tau|(|\xi|+|\tau|)^{p-2}$。

A_3）单调不等式：

$$(A(x,\xi)-A(x,\tau))(\xi-\tau)\geq\begin{cases}a|\xi-\tau|^p,\quad p\geq 2,\\ a|\xi-\tau|^2(|\xi|+|\tau|)^{p-2},\quad 1<p<2。\end{cases}$$

A_4）齐次性条件：

$A(x,t\xi)=|t|^{p-2}tA(x,\xi),\ \ t\in R,\ \ t\neq 0$。

可以从上述的A_2）～A_4）条件中得到：

A_5）$a|\xi|^p\leq A(x,\xi)\xi\leq b|\xi|^p\ (\forall\xi\in R^N)$，其中$a,b>0$。

根据条件A_5）给出空间$X=W_0^{1,p}(\Omega)$的等价范数$\|u\|=\left(\int_\Omega A(x,\nabla u)\nabla u\mathrm{d}x\right)^{1/p}$。

为了说明λ_1是简单的并且不存在其它的特征值，它所对应的特征函数是不变号的，给出条件A_6)，可以得到推广的Picone's Identity。

A_6）$\boldsymbol{A}(x,\xi)\eta\leq(\boldsymbol{A}(x,\xi)\xi)^{\frac{p-1}{p}}(\boldsymbol{A}(x,\eta)\eta)^{\frac{1}{p}}$，当且仅当$\xi=k\eta$时取等号，其中$k$为常数。

定义光滑泛函：$T:\Omega\times R^n\to R$，即可以写成$T=T(x,\zeta)=T(x_1,\cdots,x_n,\zeta_1,\cdots,\zeta_n)$，这里$\zeta\in R^n,x\in\Omega$。记$D_\zeta T=(T_{\zeta_1},\cdots,T_{\zeta_n})$，其中$T_{\zeta_i}$为$T$对变量$\zeta_i(1\leq i\leq n)$求偏导。不妨记$I(\omega)=\int_\Omega T(x,\nabla\omega)\mathrm{d}x,\ \omega\in X$，并假设$T$满足下列条件：

T_1）强制性条件：存在$\alpha>0$，对任给$\zeta\in R^n,x\in\Omega$有$T(x,\zeta)\geq\alpha|\zeta|^p$；

T_2）凸性条件：对任给$\zeta\in R^n$，$x\in\Omega$，

$\sum\limits_{i,j=1}^n T_{\zeta_i\zeta_j}(x,\zeta)\zeta_i\zeta_j\geq 0$。

当$D_{\nabla u}T(x,\nabla u)=A(x,\nabla u)$时，回顾拟线性算子的特征值问题：

$$\begin{cases}-\mathrm{div}\boldsymbol{A}(x,\nabla u)=\lambda a(x)|u|^{p-2}u,\\ u\in W_0^{1,p}(\Omega)。\end{cases} \qquad (3)$$

注意到式（3）的第一特征值λ_1可由下列带约束的变分问题来建立

$$\lambda_1=\inf\left\{I(v)\mathrm{d}x:\int_\Omega a(x)|v|^p\,\mathrm{d}x=1\right\}, \qquad (4)$$

事实上，由式（4）和Sobolev's不等式易知$\lambda_1>0$；且由强制性条件T_1）和凸性条件T_2）易得式（4）的极小化序列$\{u_n\}$有界以及泛函$u|\to\int_\Omega a(x)u^p\mathrm{d}x$[4]的弱连续性可知存在$u_0\in W_0^{1,p}(\Omega)$，使得式（4）取到极小值，从而由Euler-Lagrange原理可得u_0是方程（2）的弱解。如果u_0能最小化式（2），则$|u_0|$也能最小化它，所以不妨假设$u_0\geq 0$；又由Harnack不等式[5]知$u_0>0$，也就是说存在一个正的特征函数相应于第一特征值λ_1。运用文献[6]($a(x)\equiv 1,\Omega$有界）相似的方法可以证明λ_1是简单的、并且不存在其它的特征值、它所对应的特征函数是不变号的。在这里$a(x)\in L^\infty(\Omega)$，所以有如下的命题成立。

命题1　1）式（3）存在正的、且简单的（即只对应一个线性无关的特征函数）第一特征值 λ_1。

2）对于第一特征值 λ_1 对应的特征函数 u_1 为正，并且 λ_1 是唯一的、特征值中所对应的特征函数是不变号的。

下面介绍不动点指数的有关内容。首先定义算子

$$L: X \to X^*,\quad G_1: P \to P^*,\quad G_2: R^+ \times P \to P^*:$$

$$\langle L(u), v\rangle = \int_\Omega A(x, \nabla u)\nabla v \mathrm{d}x,$$

$$\langle G_1(u), v\rangle = \int_\Omega a(x) u^{p-1} v \mathrm{d}x,$$

$$\langle G_2(\lambda, u), v\rangle = \int_\Omega f(x, u, \lambda) v \mathrm{d}x, \forall v \in C_0^\infty(\Omega)。\quad (5)$$

如果算子$F: X \to X^*$把X中弱收敛的子列映射成X^*中强收敛的子列，称算子F全连续。从文献[3]易得到算子G_1，G_2是全连续的。为方便讨论，利用文献[3]的两个引理：

引理1 上述定义的算子L有界，严格单调和连续，且其逆算子L^{-1}有界，连续。

引理2　$L^{-1}(P^*) \subset P$　。

由引理1和引理2，便可以运用拓扑度定义下述算子的不动点指数：

$$L(u) = F(u),\quad u \in P。\quad (6)$$

由于P是X中的凸闭子集，所以它是X的收缩核。令U是P的有界开子集，如果算子$F: \overline{U} \to P^*$全连续，并且式（6）在∂U上无解，那么，算子是全连续并且在∂U上无不动点。据此可以利用Amann[1]定义不动点指数$i(L^{-1}\circ F, U) = \deg(id - L^{-1}\circ F \circ \rho, \rho^{-1}(U), 0)$，这里$\rho: X \to P$是任意的收缩映射。

考虑式（6）中关于算子F的不动点指数，记

$\mathrm{ind}(F, U) = i(L^{-1}\circ F, U)$。

可以根据ind（F，U）的定义以及不动点指数相应的性质[1]，得到它具有下述性质：

命题2 [3]

1）如果$q \in L(U)$，那么$F(u) \equiv q$, $\mathrm{ind}(F, U) = 1$；

2）如果$\mathrm{ind}(F, U) \neq 0$，那么式（6）存在一个解$u \in U$；

3）对于任给开子集$V \subset U$并且式（6）在$\overline{U} \setminus V$上无解，则$\mathrm{ind}(F, U) = \mathrm{ind}(F, V)$；

4）令U_1，U_2是U中的两个不相交的开子集，并且式（6）在$\overline{U} \setminus (U_1 \cup U_2)$上无解，则有

$\mathrm{ind}(F, U) = \mathrm{ind}(F, U_1) + \mathrm{ind}(F, U_2)$；

5）设I是R上的紧区间，定义全连续算子$H: I \times \overline{U} \to P^*$，并且对于$(t, u) \in I \times \partial U$方程$L(U) = H(t, u)$无解，则指数$\mathrm{ind}(H(\cdot, u))$与$t \in I$无关；

6）设Γ是R上非空的紧区间，U是有$\Gamma \times P$界的开子集，对于给定的$\lambda \in \Gamma$，定义$U_\lambda = \{u \in P \mid (\lambda, u) \in U\}$，如果算子$h: \overline{U} \to P^*$是全连续的，并且对于$u \in \partial U$方程$L(u) = h(\lambda, u)$无解，则可以定义指数$\mathrm{ind}(h(\lambda, \cdot), U_\lambda)$并且它与$\lambda$无关。

利用命题2可以得到下面的结果。

命题3　设U是ρ中有界的开子集，$0 \in U$，且$Q: \overline{U} \to P^*$是全连续算子，如果有

$\langle L(u), u\rangle > \langle Q(u), u\rangle, \forall u \in \partial U$，则$\mathrm{ind}(Q, U) = 1$。

证明　因为$0 \in U, 0 = L(0) \in L(U)$，由命题2中1）知$\mathrm{ind}(0, U) = 1$。令$H(t, u) = tQ(u), t \in [0,1]$，由$u \neq 0$知$\langle L(u), u\rangle > 0$，从而有

$$\langle L(u) - tQ(u), u\rangle = (1-t)\langle L(u), u\rangle + t\langle L(u) - Q(u), u\rangle > 0,\quad \forall u \in \partial U,$$

所以有方程$L(u) = H(t, u)$在$[0,1] \times \partial U$上无解，运用命题2中5）可得

$$\mathrm{ind}(Q, U) = \mathrm{ind}(H(1, u), U) = \mathrm{ind}(H(0, u), U) = \mathrm{ind}(0, U) = 1。$$证毕！

2　主要结果

定理1　假设f满足下列条件：

f_1′）$f: \Omega \times R^+ \times R^+ \to R^+$是Carathodory函数，就是说$f(x, \cdot, \cdot)$几乎处处在$x \in \Omega$关于（$s, \lambda$）连续，并且对于任给$(s, \lambda) \in R^+ \times R^+$, $f(\cdot, s, \lambda)$是可测的；

f_2′）对于几乎处处$x \in \Omega, s \in R^+$,

$f(x, s, \lambda) \le c(\lambda)\left(\alpha(x) + \beta(x) s^{p-1}\right)$，这里

$0 \le \alpha(x) \in L^{(p^*)'}(\Omega)$和$0 \le \beta(x) \in L^\infty(\Omega)$；

f_3′）对于几乎处处$x \in \Omega$有$\lim\limits_{s\to\infty} \dfrac{f(x, s, \lambda)}{a(x) s^{p-1}} = 0$成立，

那么，当$0 \leqslant \lambda < \lambda_1$时，式（2）在$W_0^{1,p}(\Omega)$存在非负解。

为了证明此定理，需要下面的结果。

引理3　基于定理1的条件，则有

$$\lim_{\|u\|\to\infty} \sup_{\|\phi\|\le 1} \int_\Omega \frac{f(x, u, \lambda)}{\|u\|^{p-1}} |\phi| = 0。$$

证明　见文献[3]引理4.2。

定理1的证明：令$F(\lambda, u) = \lambda G_1(u) + G_2(\lambda, u)$，这里$G_1$、$G_2$的定义见式（5）；由条件$f_1$′）和$f_2$′）可知，$F: R^+ \times P \to P^*$为全连续算子。下面说明存在$R > 0$使得式（7）成立：

$$\langle L(u), u\rangle > \langle F(\lambda, u), u\rangle,\ \forall u \in \partial P_R。\quad (7)$$

事实上，如果式（7）不真，即存在序列$\{u_n\}, \|u_n\| \to \infty$，使得

$$\langle L(u_n), u_n\rangle \le \langle F(\lambda, u_n), u_n\rangle,\quad (8)$$

令$z_n=\dfrac{u_n}{\|u_n\|}$，那么，由式（8）以及算子L的定义可得

$$\langle L(z_n),z_n\rangle\le\lambda\langle G_1(z_n),z_n\rangle+\langle G_2(\lambda,u_n)/\|u\|^{p-1},z_n\rangle。\tag{9}$$

基于$\|z_n\|=1$和$W_0^{1,p}(\Omega)$的自反性，不妨假设$z_n\xrightarrow{\text{weakly}}\bar{z}$，对式（9）两边取极限，由引理3、泛函$z\mapsto\langle G_1(z),z\rangle$的弱连续性以及式（4）对$\lambda_1$的定义可得：

$$\lambda_1\langle G_1(\bar{z}),\bar{z}\rangle=\int_\Omega A(x,\nabla\bar{z})\nabla\bar{z}\le$$
$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega A(x,\nabla z_n)\nabla z_n\le\lambda\langle G_1(\bar{z}),\bar{z}\rangle,$$

从而有$\lambda\ge\lambda_1$，这是个矛盾；故式（7）成立。由命题3可知$\operatorname{ind}(F(\lambda,u),P_R)=1$，就是说式（2）存在非负解。

注：如果对于几乎处处$x\in\Omega$，$f(x,0,\lambda)=0$，而且基于u=0是式（2）的解，那么，可以称u=0是式（2）的平凡解。

推论1 假设f满足定理1的条件，$0<a(x)\in L^\infty(\Omega)$且$1<\gamma<p$，则当$\lambda\geqslant0$时，下列偏微分方程$-\operatorname{div}A(x,\nabla u)=\lambda a(x)u^{\gamma-1}u+f(x,u,\lambda)$存在非负解，式中$u\ge0$，$u\in W_0^{1,p}(\Omega)$。

证明 定义算子$\overline{H}:R^+\times P\to P^*$为

$\langle\overline{H}(\lambda,u),v\rangle=\int_\Omega(\lambda a(x)u^{\gamma-1}+f(x,u,\lambda))v\mathrm{d}x$。由定理1的证明可知只需说明对任给充分大$R$>0，$\operatorname{ind}(\overline{H}(\lambda,u),P_R)=1$即可。运用命题3证明$\operatorname{ind}(\overline{H}(\lambda,u),P_R)=1$；若不然存在序列$\{u_n\},\|u_n\|\to\infty$，使得$\langle L(u_n),u_n\rangle\le\left\langle\overline{H}(\lambda,u_n),u_n\right\rangle$，即

$$\int_\Omega A(x,\nabla u_n)\nabla u_n\le\lambda\int_\Omega a(x)u_n^{\ \gamma}+\int_\Omega f(x,u_n,\lambda)u_n。$$

对上式两边除以$\|u\|^p$可得：

$$a\le\int_\Omega\frac{A(x,\nabla u_n)\nabla u_n}{\|u\|^p}\le\lambda\int_\Omega\frac{a(x)u_n^{\ \gamma}}{\|u\|^p}+\int_\Omega\frac{f(x,u_n,\lambda)u_n}{\|u\|^p}。$$

由Holder不等式及Sobolev不等式可将上式的左边化为

$$\lambda\int_\Omega\frac{a(x)u_n^\gamma}{\|u\|^p}+\int_\Omega\frac{f(x,u_n,\lambda)u_n}{\|u\|^p}\le$$
$$\lambda C\|u_n\|^{\gamma-p}+\int_\Omega\frac{f(x,u_n,\lambda)}{\|u\|^{p-1}}\frac{u_n}{\|u_n\|},$$

然而，当$\|u\|\to\infty$，有

$\lambda C\|u_n\|^{\gamma-p}+\int_\Omega\frac{f(x,u_n,\lambda)}{\|u\|^{p-1}}\frac{u_n}{\|u_n\|}\to0$，这是个矛盾，故$\langle L(u_n),u_n\rangle>\left\langle\overline{H}(\lambda,u_n),u_n\right\rangle$，从而由命题3可得$\operatorname{ind}(\overline{H}(\lambda,u),P_R)=1$。证毕！

考虑下列拟线性偏微分方程问题正非平凡解的存在性：

$$\begin{cases}-\operatorname{div}\boldsymbol{A}(x,\nabla u)=g(x,u),\\ u(x)\ge0,\\ u(x)\in W_0^{1,p}(\Omega)。\end{cases}\tag{10}$$

这里p>1且g首先满足下列条件：

g_1）$g:\Omega\times R^+\to R^+$是Carathodory函数；

g_2）对于几乎处处$x\in\Omega,s\in R^+,g(x,s)\le a(x)+\beta(x)s^{p-1}$，这里$0\le\alpha(x)\in L^{(p^*)'}(\Omega)\bigcap L^{N/P}(\Omega)$和$0\le\beta(x)\in L^\infty(\Omega)$，那么，有下列的结果：

定理2 假设g满足条件g_1）、g_2），$0<a(x)\in L^\infty(\Omega)$且下列极限值关于$x\in\Omega$一致存在：

g_3） $\lim\limits_{s\to0}\dfrac{g(x,s)}{a(x)s^{p-1}}=\underline{\lambda}<\lambda_1$；

g_4） $\lim\limits_{s\to\infty}\dfrac{g(x,s)}{a(x)s^{p-1}}=\bar{\lambda}>\lambda_1$，

那么，式（10）存在正的非平凡解。

证明 定义算子$G:P\to P^*$为：

$$\langle G(u),v\rangle=\int_\Omega g(x,u)v,\forall v\in W_0^{1,p}(\Omega)。\tag{11}$$

由条件g_1）和g_2）可得算子G为全连续算子。

步骤1 对于充分小的$r>0$，$\operatorname{ind}(G,P_r)=1$。

首先说明对于充分小的r>0，方程$L(u)=tG(u)$，$t\in[0,1]$在∂P_r上无解；若不然，则可以找到序列$\{u_n\}$和{t_n}，且有$u_n\to0$，$u_n\ne0$，$t_n\to\bar{t}\in[0,1]$，使得$L(u_n)=t_nG(u_n)$。令$z_n=\dfrac{u_n}{\|u_n\|}$，由条件A_4）知：

$$\int_\Omega A(x,\nabla v_n)\nabla\phi=t_n\int_\Omega\frac{g(x,u_n)}{\|u_n\|^{p-1}}\phi,\forall\phi\in X,\tag{12}$$

又根据条件g_3）可以将函数$g(x,s)$写成：

$$g(x,s)=\underline{\lambda}a(x)s^{p-1}+f(x,s)\ ,\tag{13}$$

这里$f(x,s)$对于几乎处处$x\in\Omega$有

$$\lim_{s\to0}\frac{f(x,s)}{a(x)s^{p-1}}=0\ 。\tag{14}$$

由式（13）可以将式（12）写成

$$\int_\Omega A(x,\nabla v_n)\nabla\phi=t_n\underline{\lambda}\int_\Omega a(x)v_n^{\ p-1}\phi+t_n\int_\Omega\frac{f(x,u_n)}{\|u_n\|^{p-1}}\phi\ 。\tag{15}$$

不失一般性，不妨设在X中$z_n\xrightarrow{\text{weakly}}\bar{z}$，由式（13）和（14），可以知道$\bar{z}$满足方程$-\operatorname{div}\boldsymbol{A}(x,\nabla u)=\bar{t}\bar{\lambda}a(x)u^{p-1}$。取$\varphi=z_n$且对式（15）两边令$n\to\infty$取极限得：

$$\bar{t}\underline{\lambda}\int_\Omega a(x)\bar{z}^p\mathrm{d}x=1\ ,\tag{16}$$

由式（16）知$\bar{z}\neq 0$且有$\lambda_1=\bar{t}\underline{\lambda}$，方程$L(u)=tG(u), t\in[0,1]$在$\partial P_r$上无解，从而有：

$$\operatorname{ind}(G,P_r)=\operatorname{ind}(0,P_r)=1\quad。\qquad（17）$$

步骤2　对于充分大的$R>0$，$\operatorname{ind}(G,P_R)=0$。

令$Q(t,u)=t\bar{\lambda}G_1(u)+(1-t)G(u),\quad 0\le t\le 1$。这里$G_1$，$G$定义见式（5）和（10）。由$G_1$，$G$的定义易知算子$Q:[0,1]\times P\to P^*$为全连续算子。现说明方程$L(u)=Q(t,u)$对充分大$R>0$在$\partial P_R$上无解；若不然，则可以找到序列$\{u_m\}$与$\{t_n\}$，使得$\|u\|\to\infty$，$t_n\to t\in[0,1]$且满足$L(u_n)=Q(t_n,u_n)$，即对$\forall\varphi\in X$，有

$$\int_\Omega A(x,\nabla u_n)\nabla u_n=t_n\bar{\lambda}\int_\Omega a(x)u_n^{p-1}\phi+(1-t_n)\int_\Omega g(x,u_n)\phi\quad。（18）$$

同样，令$z_n=\dfrac{u_n}{\|u_n\|}$，且设在X中$z_n\xrightarrow{\text{weakly}}\bar{z}$，对式（18）两边除以$\|u_n\|^{p-1}$可得

$$\int_\Omega A(x,\nabla z_n)\nabla\phi=t_n\bar{\lambda}\int_\Omega a(x)z_n^{p-1}\phi+(1-t_n)\int_\Omega\frac{g(x,u_n)}{\|u_n\|^{p-1}}\phi=$$

$$\bar{\lambda}\int_\Omega a(x)z_n^{p-1}\phi+(1-t_n)\int_\Omega\frac{g(x,u_n)-\bar{\lambda}a(x)u_n^{p-1}}{\|u\|^{p-1}}|\phi|,\qquad（19）$$

取$f(x,u,\lambda)=g(x,u_n)-\bar{\lambda}a(x)u_n^{p-1}$，由条件$g_4$）以及引理3可知：

$$\lim_{x\to\infty}\sup_{\|\phi\|\le1}\int_\Omega\frac{g(x,u_n)-\bar{\lambda}a(x)u_n^{p-1}}{\|u\|^{p-1}}|\phi|=0。\qquad（20）$$

由式（19）和（20），运用步骤1的推导有：$\bar{z}(\bar{z}\neq 0)$满足方程$-\operatorname{div}\boldsymbol{A}(x,\nabla u)=\bar{\lambda}a(x)u^{p-1}$，所以方程$L(u)=Q(t,u)$对充分大$R>0$在$\partial P_R$上无解，从而有：

$$\operatorname{ind}(G,P_R)=\operatorname{ind}(Q(0,u),P_R)=$$
$$\operatorname{ind}(Q(1,u),P_R)=\operatorname{ind}(\bar{\lambda}G_1,P_R)=0。\qquad（21）$$

步骤3　最后证明$\operatorname{ind}(G,p_R\setminus P_r)\neq 0$。

由式（17）、（21）及命题2中的4）可得：

$$\operatorname{ind}(G,P_R\setminus\overline{P_r})=\operatorname{ind}(G,P_R)-\operatorname{ind}(G,P_r)=-1,$$

从而式（10）存在非平凡解。证毕！

定理3　假设g满足g_1）、g_2），$0<a(x)\in L^\infty(\Omega)$且下列极限值关于$x\in\Omega$一致存在：

g_3´）　$$\lim_{s\to0}\frac{g(x,s)}{a(x)s^{p-1}}=\underline{\mu}>\lambda_1;$$

g_4´）　$$\lim_{s\to\infty}\frac{g(x,s)}{a(x)s^{p-1}}=\bar{\mu}<\lambda_1,$$

那么，式（10）存在正的非平凡解。

证明　运用定理2同样的推导，可以说明对任给充分小的$r>0$，$\operatorname{ind}(G,P_r)$且对任给充分大的$R>0$，$\operatorname{ind}(G,P_R)=1$，从而由步骤3可知定理3成立。证毕！

参考文献：

[1] Amann H. Fixed point equations and nonlinear eigenvalue problems in ordered Banach spaces[J]. SIAM Rev.，1976，18：620-708.

[2] Ambrosetti A，Hess P. Positive solutions of asymptotically linear elliptic problems[J]. J.Math.Anal.Appl., 1980, 73：411-422.

[3] Huang Y S. Positive solutions of quasilinear elliptic equations，Topologic Methods in Nonlinear Analysis[J].J.Juliusz. Schauder.Center, 1998（12）：91-107.

[4] KBEN-NAOUM，A，TROSETLER，C，WILLEM M. Extrema problems with critical Sobolev exponents on unbounded domains[J]. Nonlinear Analysis，1996，26：823-833.

[5] Lucio Damascelli，Berardino Sciunzi. Harnack inequailities，maximum and comparison principals，and regularity of positive solutions of m-laplace equations[J].Calc.Var.，2005，25（2）：139-159.

[6] Lindqvist P. Ontheequation 0[J]. Proc.Amer.Math.Soc.，1990, 109：157-164.