加权Sobolev空间的非奇异坐标变换

张宏伟[1,2]，鲁祖亮[1]，蔡海涛[2]

(1.长沙理工大学 数学与计算科学学院，湖南 长沙 410077；2.中南大学 数学科学与计算技术学院，湖南 长沙 410075)

摘 要：利用加权Sobolev空间中的非奇异坐标变换和仿射变换，建立了从有界集到有界集的可逆坐标变换，同时，讨论了有限单元的仿射变换和存在扰动的等参变换的性质。

关键词：非奇异坐标变换；加权Sobolev空间；仿射变换

中图分类号：O175.2 **文献标识码**：A **文章编号**：1008-2611(2007)01-0034-03

Nonsingularity Coordinate Transform of Weighted Sobolev Spaces

Zhang Hongwei[1, 2]，Lu Zuliang[1]，Cai Haitao[2]

（1.Institute of Math & Computing Science，Changsha University of Science and Technology，Changsha 410077，China；
2.Institute of Mathematical Sciences & Computing Technology，Central South University，Changsha 410075，China）

Abstract: Reversible coordinate transformation is established from bound set to bound set by making use of nonsingu-larity coordinate transformation and affine transformation in weighted Sobolev spaces and at the same time， the characteristic is aslo discussed with affine transformation and perturbative oparametric of finite element.

Key words：nonsingularity coordinate transform；weighted Sobolev spaces；affine transform

1 基本概念

坐标变换是图形学中很基本的操作，无论绘制二维图形还是多维图形都经常会遇到。同时，坐标变换也是空间变换的一种主要手段，特别是在工业生产中经常利用一些重要的变换去解决一些实际工作中存在的问题（如非线性变换、非奇异坐标变换、仿射变换和Fourier变换等）。

非奇异坐标变换和仿射变换[1-3]作为数学理论研究中的2种重要的转换手段，在数值分析、偏微分理论、有限元的研究中都具有重要的作用。加权Sobolev空间[4, 5]是在一般的Sobolev空间的基础上提出来的，是为了适应工业需要，而演变成的一种有用的工具。本文中，我们将加权Sobolev空间与非奇异坐标变换和仿射变换联系起来，考虑在加权Sobolev空间的非奇异坐标变换的性质，并将其应用于有限单元的仿射变换中，得到了一些很好的性质。

定义1 映射：$f: R^n \to R^n$称为非奇异坐标变换，若存在n阶方阵$\boldsymbol{A}$（可逆矩阵），满足$f(x)=\boldsymbol{A}x, x\in R^n$。

定义2 映射：$f: R^n \to R^n$称为仿射变换（由非奇异线性变换和平移组成），若存在n阶方阵$\boldsymbol{A}$（可逆矩阵）及n维向量$\boldsymbol{b}$，满足$f(x)=\boldsymbol{A}x+\boldsymbol{b}, x\in R^n$。

定义3 设$p\in(1,\infty)$，$w: R^n \to R^+$是一个局部Lebesgue可积函数，这样就有一个Radan测度μ满足：$\mu(E)=\int_E w(x)\mathrm{d}x,\ \forall E\subset R^n$。用$L^p(\Omega, \mu)$表示$\mu$测度意义下的$L^p$-空间，然后，引进加权Sobolev空间，$H^{m,p}(\Omega, \mu)$，$W^{m,p}(\Omega, \mu)$的定义：

$H^{m,p}(\Omega,\mu)\equiv\left\{\phi\in C^m(\Omega,\mu):\|\phi\|_{m,p}<\infty\right\}$关于范数$\|\cdot\|_{m,p}$的完备化；

$W^{m,p}(\Omega,\mu)\equiv\left\{\phi\in L^p(\Omega,\mu): D^\alpha\phi\in L^p(\Omega,\mu), 0\le|\alpha|\le m\right\}$；其中$D^\alpha\phi$为广义函数意义下的偏导数，且

$$\|\phi\|_{m,p}^p=\sum_{|\alpha|\le m}\left\|D^\alpha\phi\right\|_{L^p(\Omega,\mu)}^p。$$

当n=2时，$H^m(\Omega,\mu)=W^{m,2}(\Omega,\mu)$且

收稿日期：2006-11-20
基金项目：国家自然科学基金资助项目（60474070），湖南省教育厅优秀青年资金资助项目（05B022）
作者简介：张宏伟(1966-)，男，山东惠民人，长沙理工大学副教授，博士，主要从事偏微分方程理论研究.

$\|\cdot\|_m=\|\cdot\|_{m,2}$， $\|\cdot\|=\|\cdot\|_{0,2}$[4, 5]。

定义4 在任意n维的欧氏空间中，设新坐标为$\hat{x}=\{\hat{x}_1,\hat{x}_2,\cdots,\hat{x}_n\}$，旧坐标为$x=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，仿射变换$x=F_e(\hat{x})=\boldsymbol{T}_e\hat{x}+\boldsymbol{b}_e$把$x$空间中的任意单纯形变换到$\hat{x}$空间的单纯形，其中$\boldsymbol{T}_e$为$n\times n$阶方阵，$\boldsymbol{b}_e$为列阵，称仿射变换为有限元间的仿射变换[2]。

定义5 通过等参变换$\hat{x}=\tilde{F}_e(x)+E(x)$，把任意曲边元素变换成标准元素，这种等参变换称为有限单元的仿射变换部分$\tilde{F}_e(x)$和扰动部分$E(x)$[3]。

定义6 R^n的子集G到H可逆变换$\varPhi$称为m−光滑的，若$\varPhi=(\varPhi_1,\varPhi_2,\cdots,\varPhi_n)$和$\varPhi$的逆$\varPsi=(\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_n)$的各分量满足：$\varPhi_1,\varPhi_2,\cdots,\varPhi_n\in C^m(\bar{G})$和$\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_n\in C^m(\bar{H})$[4]。

本文中用C表示一个与变量无关的通用正常数。

2 主要结果和证明

定理1 设映射$\varPsi$: $W^{m,p}(G,\mu)\to W^{m,p}(H,\mu)$是一个非奇异坐标变换，则$\varPsi$把加权$W^{m,p}(G,\mu)$空间中的有界集变换到加权$W^{m,p}(H,\mu)$空间上的有界集。

证 根据非奇异坐标变换的定义，假设D为加权$W^{m,p}(G,\mu)$空间中的有界集，则存在可逆矩阵$\boldsymbol{A}$，使得$\varPsi(x)=\boldsymbol{A}x,\forall x\in D$。为论述方便，定义$\lambda_{\min}$和$\lambda_{\max}$分别为最小和最大特征值。

因为D在加权$W^{m,p}(G,\mu)$空间中的有界，所以有$\|u\|_{m,p,D}<\infty$。不失一般性，假设矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值为$\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}$，又因矩阵$\boldsymbol{A}$可逆，于是可知存在$c_0>0$和$C_0<M$，使得：$c_0<\lambda_{\min}\leqslant\lambda_{\max}<C_0$。进而可对$\boldsymbol{A}x$在加权$W^{m,p}(H,\mu)$空间上的范数进行估计。

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{A}x\|_{m,p,H}&=\Big\{\sum_{|\alpha|\le m}\|D^\alpha(\boldsymbol{A}x)\|^p_{L^p(H,\mu)}\Big\}^{\frac{1}{p}}=\\&\Big\{\sum_{|\alpha|\le m}\int_H|D^\alpha(\boldsymbol{A}x)|^p\,w(x)\mathrm{d}x\Big\}^{\frac{1}{p}}\le\\&\Big\{\sum_{|\alpha|\le m}\int_H|D^\alpha(\lambda_{\max}x)|^p\,w(x)\mathrm{d}x\Big\}^{\frac{1}{p}}\le\\&C_0\Big\{\sum_{|\alpha|\le m}\int_H|D^\alpha(x)|^p\,w(x)\mathrm{d}x\Big\}^{\frac{1}{p}}=\\&C_0\|x\|_{m,p,H}\,,\end{aligned}\tag{1}$$

故可知$\boldsymbol{A}x$在加权$W^{m,p}(H,\mu)$空间上有界，所以得到$\varPsi$把加权$W^{m,p}(G,\mu)$空间中的有界集变换到加权$W^{m,p}(H,\mu)$空间上的有界集。

定理2 设映射$\psi(x)=\boldsymbol{A}x,x\in W^{m,p}(\varOmega,\mu)$，且$n\times n$矩阵$\boldsymbol{A}$是正定矩阵或正交矩阵，则$\varPsi$把加权$W^{m,p}(G,\mu)$空间中的有界集变换到加权$W^{m,p}(H,\mu)$空间上的有界集。

证 当$\boldsymbol{A}$是正定矩阵时，根据定义可知，$\forall x\in R^{1\times n}\neq 0$，$x\boldsymbol{A}x'>0$。于是得到存在可逆矩阵$\boldsymbol{B}\in R^{n\times n}$，使得$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}$。于是，令可逆矩阵$\boldsymbol{B}$的特征值为$\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}$，则存在$c_0>0$和$C_0<M$，使得：$c_0<\lambda_{B\min}\leqslant\lambda_{B\max}<C_0$，进而得到

$$c_0^2<\lambda_{A\min}\le\lambda_{A\max}<C_0^2\ 。\tag{2}$$

结合式(2)，类似式(1)的方法，可以证明：$\varPsi$把加权$W^{m,p}(G,\mu)$空间中的有界集变换到加权$W^{m,p}(H,\mu)$空间上的有界集。

当$\boldsymbol{A}$是正交矩阵时，由定义可知，$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{I}_n$，其中$\boldsymbol{I}_n$代表$n$阶方阵。故$\boldsymbol{A}$是可逆矩阵，且$\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$。于是，直接利用定理1的结论得到，$\varPsi$把加权$W^{m,p}(G,\mu)$空间中的有界集变换到加权$W^{m,p}(H,\mu)$空间上的有界集。

综上所述，得到定理2成立。

如果u是G上的可测函数，$\varPsi$是m−光滑的，则可以用$ku(y)=u(\varPsi^{-1}(y))$来定义一个H上的可测函数。下面证明k将有界集映射到有界集。

定理3 设$\varPsi$是m−光滑($m\geqslant 1$)，则k把加权$W^{m,p}(G,\mu)$空间中的有界集变换到加权$W^{m,p}(H,\mu)$空间上的有界集。

证 $\forall u\in W^{m,p}(\varOmega,\mu)$，由于$p\in(1,\infty)$，$W^{m,p}(G,\mu)=H^{m,p}(W,\mu)$[5]，于是存在一个序列$\{u_n\}$，其中$u_n\in C^\infty(G)$，使得$\{u_n\}$在$W^{m,p}(G,\mu)$空间的范数下收敛到$u$。

利用弱导数定义有$D^\alpha(k(u_n))=(-1)^{|\alpha|}k(D^\alpha u_n)$。于是得到关于$u_n$的一般性的弱导数形式：

$$D^\alpha(k(u_n))(y)=\sum_{|\beta|\le|\alpha|}\varDelta_{\alpha,\beta}k(D^\beta u_n)(y)\,,\tag{3}$$

其中$\varDelta_{\alpha,\beta}$是由$\varPsi^{-1}$的各分量构成的多项式，且$\varPsi^{-1}$的分量的次数不超过$|\beta|$。

取$\varphi(y)\in D(H)$，对式(3)在H上进行积分，利用分部积分得到

$$\begin{aligned}&(-1)^{|\alpha|}\int_H k(u_n)(y)D^\alpha\varphi(y)w(y)\mathrm{d}y=\\&\sum_{|\beta|\le|\alpha|}\int_H k(D^\alpha u_n)(y)\varDelta_{\alpha,\beta}w(y)\varphi(y)\mathrm{d}y\,,\end{aligned}\tag{4}$$

然后，利用$y=\varPsi(x)$对区域进行变换得到

$$\begin{aligned}&(-1)^{|\alpha|}\int_G u_n(x)D^\alpha\varphi(\psi(x))w(\psi(x))|\det\psi'(x)|\mathrm{d}x=\\&\sum_{|\beta|\le|\alpha|}\int_G D^\beta u_n(x)\varDelta_{\alpha,\beta}(\psi(x))w(\psi(x))\varphi(\psi(x))|\det\psi'(x)|\mathrm{d}x。\end{aligned}\tag{5}$$

因为$|\beta|\leqslant m$时，在$L^p(G,\mu)$中有$D^\beta u_n\to D^\beta u,n\to\infty$，于是，对式(5)取极限，然后返回式(4)中，有

$$\begin{aligned}&(-1)^{|\alpha|}\int_H k(u)(y)D^\alpha\varphi(y)w(y)\mathrm{d}y=\\&\sum_{|\beta|\le|\alpha|}\int_H k(D^\alpha u)(y)\varDelta_{\alpha,\beta}w(y)\varphi(y)\mathrm{d}y\ 。\end{aligned}\tag{6}$$

因此，$\forall u\in W^{m,p}(H,\mu)$在弱意义下式(3)也成立。

利用式(3)的极限形式得到

$$\int_H |D^\alpha(k(u))(y)|^p\, w(y)\mathrm{d}y =$$

$$\int_H \Big|\sum_{|\beta|\le|\alpha|} \Delta_{\alpha,\beta}(y)k(D^\beta u)(y)\Big|^p\, w(y)\mathrm{d}y \le$$

$$\left(\sum_{|\beta|\le|\alpha|}1\right)^p \max_{|\beta|\le|\alpha|}\left(\sup_{y\in H}|\Delta_{\alpha,\beta}(y)|^p \int_H |(D^\beta u)((y))|^p\, w(y)\mathrm{d}y\right)\le$$

$$C\max_{|\beta|\le|\alpha|}\int_H |D^\beta u(y)|^p\, w(y)\mathrm{d}y\ 。\qquad (7)$$

于是，利用式（7）和范数的等价性得到 $\|k(u)\|_{m,p,H}\le C\|u\|_{m,p,H}$，故上述结论成立。

定理4 设 $\Psi: W^{m,p}(G,\mu)\to W^{m,p}(H,\mu)$ 是一个仿射变换，则 Ψ 把加权 $W^{m,p}(G,\mu)$ 空间中的有界集变换到加权 $W^{m,p}(H,\mu)$ 空间上的有界集。

证 因为 $\Psi: W^{m,p}(G,\mu)\to W^{m,p}(H,\mu)$ 是一个仿射变换，根据仿射变换的定义，存在 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$（可逆矩阵）及 n 维向量 $\boldsymbol{b}$，满足 $\psi(x)=\boldsymbol{A}x+\boldsymbol{b}, x\in W^{m,p}(G,\mu)$。

由于 $\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵，由定理1的式（1）可知 $\boldsymbol{A}x$ 在加权 $W^{m,p}(H,\mu)$ 空间上有界。另一方面，由 $\Psi(x)$ 的构造可知

$$\|\boldsymbol{A}x+\boldsymbol{b}\|_{m,p,H}=\left\{\sum_{|\alpha|\le m}\|D^\alpha(\boldsymbol{A}x+\boldsymbol{b})\|^p_{L^p(H,\mu)}\right\}^{\frac{1}{p}}=$$

$$\left\{\sum_{|\alpha|\le m}\|D^\alpha \boldsymbol{A}x+D^\alpha\boldsymbol{b}\|^p_{L^p(H,\mu)}\right\}^{\frac{1}{p}}\le$$

$$\left\{\sum_{1\le|\alpha|\le m}\|D^\alpha \boldsymbol{A}x\|^p_{L^p(H,\mu)}+\|\boldsymbol{b}\|_{L^p(H,\mu)}\right\}^{\frac{1}{p}}\ 。\qquad (8)$$

由 $L^p(H,\mu)$ 空间的定义，存在 $M>0$，使得 $\|\boldsymbol{b}\|_{L^p(H,\mu)}\le M$。于是，结合式（8）和式（1）得

$$\|\boldsymbol{A}x+\boldsymbol{b}\|_{m,p,H}\le C\left\{\sum_{|\alpha|\le m}\|D^\alpha(\boldsymbol{A}x)\|^p_{L^p(H,\mu)}\right\}^{\frac{1}{p}}\le C\|x\|_{L^p(H,\mu)}\ 。$$

所以，定理4的结论成立。

有限元子空间 S_h 完全可由元素族 Ω_e 中的节点集 Σ_e 和 Ω_e 上的形状函数 $\{\psi_i^{(e)}\}_{i=1}^{NG}$ 所确定。这三要素不妨记作 $(\Omega_e,\Sigma_e,\Psi^e)$，其中 $\psi^{(e)\mathrm{T}}=\{\psi_1^{(e)},\psi_2^{(e)},\cdots,\psi_{NG}^{(e)}\}$。

对于仿射变换 $\hat{x}=\psi(x)=F_e(x)=\boldsymbol{T}_e x+\boldsymbol{b}_e$，如果成立

$$\hat{\Omega}=F_e(\Omega_e), \hat{\Sigma}=F_e(\Sigma_e)\ ,\ \psi^{(e)}=\hat{\psi}\circ F_e^{-1}\ ,\qquad (9)$$

则称有限元 $(\Omega_e,\Sigma_e,\psi^e)$ 和有限元 $(\hat{\Omega},\hat{\Sigma},\hat{\psi})$ 仿射等价。而一族有限元称为仿射族，若它所有的有限元都仿射等价于一个单一的有限元，则称其为它的参考有限元。

推论1 设 Ψ 是一个有限单元中的仿射变换，则 Ψ 把加权 $W^{m,p}(\Omega,\mu)$ 空间中的有界集变换到加权 $W^{m,p}(\hat{\Omega},\mu)$ 空间上的有界集。

证 在仿射变换 $\hat{x}=\psi(x)=\boldsymbol{F}_e(x)=\boldsymbol{T}_e x+\boldsymbol{b}_e$ 中，因为 $\boldsymbol{T}_e$ 是 $n\times n$ 阶可逆的方阵，$\boldsymbol{b}_e$ 为列阵，此时 $\boldsymbol{b}_e$ 为一个常量矩阵，故由定理4可知，Ψ 把加权 $W^{m,p}(\Omega,\mu)$ 空间中的有界集变换到加权 $W^{m,p}(\hat{\Omega},\mu)$ 空间上的有界集。于是，上述结论成立。

一些多个节点的等参变换可以表示为两部分，其一是仿射变换部分，其二是扰动部分，即

$$\hat{x}=\psi(x)=\tilde{F}_e(x)+E(x)\ ,$$

其中扰动部分线性地依赖于各边中点的偏差（以6节点的三角剖分而言）：

$$E(x)=\sum_{i=4}^{6}\hat{\psi}_i(x)(x_i-\tilde{x}_i)\ ,\ \{x_i-\tilde{x}_i, y_i-\tilde{y}_i\}_{i=4}^{6}\ ,$$

其中 $\tilde{x}_i,\tilde{y}_i(i=4,5,6)$ 表示直边三角形各边的中点。

定理5 设 Ψ 是有限单元中的等参变换 $\hat{x}=\psi(x)=\tilde{F}_e(x)+E(x)$，则 Ψ 把加权 $W^{m,p}(\Omega,\mu)$ 空间中的有界集变换到加权 $W^{m,p}(\hat{\Omega},\mu)$ 空间上的有界集。

证 因为 $\Psi(x)$ 是由仿射变换和扰动两部分构成，利用三角不等式有

$$\|\psi(x)\|_{m,p,\hat{\Omega}}\le\|\tilde{F}_e(x)\|_{m,p,\hat{\Omega}}+\|E(x)\|_{m,p,\hat{\Omega}}\ 。\qquad (10)$$

由定理4的推论和式（10），可将证明转化为 $\|E(x)\|_{m,p,\hat{\Omega}}\le C\|x\|_{m,p,\hat{\Omega}}$。

下面以6节点三角剖分为例给出证明。

选取6节点三角剖分时，则有 $\Psi(x)$ 的扰动部分为

$$E(x)=\sum_{i=4}^{6}\hat{\psi}_i(x)(x_i-\tilde{x}_i)\ ,\{x_i-\tilde{x}_i, y_i-\tilde{y}_i\}_{i=4}^{6}\ ,$$

其中 $\tilde{x}_i,\tilde{y}_i(i=4,5,6)$ 表示直边三角形各边的中点。

结合式（9）有 $\hat{\psi}_i(x)=F_e\circ\psi_i^e(x)$，这里取 $\lambda_{F_{e\max}}<M$，对 $E(x)$ 进行估计：

$$\|E(x)\|_{m,p,\hat{\Omega}}=\left\|\sum_{i=4}^{6}F_e\circ\psi_i^e(x)(x_i-\tilde{x}_i)\right\|_{m,p,\hat{\Omega}}=$$

$$\left\{\int_{\hat{\Omega}}\sum_{|\alpha|\le m}\left|D^\alpha\sum_{i=4}^{6}F_e\circ\psi_i^e(x)(x_i-\tilde{x}_i)\right|^p w(x)\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{p}}\le$$

$$\left\{\int_{\hat{\Omega}}\sum_{|\alpha|\le m}\left|D^\alpha\sum_{i=4}^{6}M\psi_i^e(x)(x_i-\tilde{x}_i)\right|^p w(x)\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{p}}=$$

$$\left\{\int_{\hat{\Omega}}\sum_{0\le|\alpha|\le 1}\left|D^\alpha\sum_{i=4}^{6}M\psi_i^e(x)(x_i-\tilde{x}_i)\right|^p w(x)\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{p}}=$$

$$CM\left\{\int_{\hat{\Omega}}\left|\sum_{i=4}^{6}\psi_i^e(x)(x_i-\tilde{x}_i)\right|^p w(x)\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{p}}\le C\|x\|_{m,p,\hat{\Omega}}\ 。$$

于是证明了6节点三角剖分的情况，其它更多节点情况的证明和此类似。所以，定理5成立。

参考文献：

[1] Brenner Susanne C，Scott L Ridgway. The mathematical theory of finite element methods[M]. Russian: Springer-verlag press，1994.

[2] Lin Q，Zhu Q D. The preprocessing and postprocessing for the Finite Element Method[M]. Shang Hai:Sci & Tech.Press，1994.

[3] 张宏伟，鲁祖亮. 四分之一空间中的延拓定理[J]. 长沙理工大学学报：自然科学版，2006，3(2):77-81.

[4] Adams R A. Sobolev spaces[M]. New York-San Francisco-London：Academic Press，1975.

[5] 张宏伟，鲁祖亮. 强局部Lipschitz性质下的嵌入定理[J]. 湖南理工学院学报：自然科学版，2006，19(3):8-11.