第 34 卷第 2 期 湖南工业大学学报 Vol.34 No.2
2020 年 3 月 Journal of Hunan University of Technology Mar. 2020

doi:10.3969/j.issn.1673-9833.2020.02.002

算术结构拉普拉斯矩阵最大特征值的上界

王盈盈，王狄建，侯耀平

（湖南师范大学 数学系，湖南 长沙 410081）

摘 要：对连通图 G 算术结构的拉普拉斯矩阵 $\boldsymbol{L}(G,\boldsymbol{d})$ 最大特征值$\lambda_1\big(\boldsymbol{L}(G,\boldsymbol{d})\big)$的上界进行了研究，先得到了上界$\sum_{i=1}^{n} r_i$，再得到一个更好的上界$\lambda_1 \leqslant \frac{1}{2}\max\limits_{i\sim j}\left(d_i+d_j+\sum\limits_{k\sim i,k\nsim j}\frac{r_k}{r_i}+\sum\limits_{k\sim j,k\nsim i}\frac{r_k}{r_j}+\sum\limits_{k\sim i,k\sim j}\left|\frac{r_k}{r_i}-\frac{r_k}{r_j}\right|\right)$。

关键词：算术结构；拉普拉斯矩阵；最大特征值；上界

中图分类号：O157.6 **文献标志码**：A **文章编号**：1673-9833(2020)02-0006-04

引文格式：王盈盈，王狄建，侯耀平．算术结构拉普拉斯矩阵最大特征值的上界 [J]. 湖南工业大学学报，2020，34(2)：6-9，14.

Upper Bound for Maximum Eigenvalue of Laplacian Matrix with Arithmetic Structure

WANG Yingying，WANG Dijian，HOU Yaoping

（Department of Mathematics，Hunan Normal University，Changsha 410081，China）

Abstract：An investigation has been made of the upper bound of the maximum eigenvalue $\lambda_1\big(\boldsymbol{L}(G,\boldsymbol{d})\big)$ of the Laplacian matrix $\boldsymbol{L}(G,\boldsymbol{d})$ of the connected graph G arithmetic structure. First the upper bound $\sum_{i=1}^{n} r_i$ can be worked out, thus further obtaining a better upper bound $\lambda_1 \leqslant \frac{1}{2}\max\limits_{i\sim j}\left(d_i+d_j+\sum\limits_{k\sim i,k\nsim j}\frac{r_k}{r_i}+\sum\limits_{k\sim j,k\nsim i}\frac{r_k}{r_j}+\sum\limits_{k\sim i,k\sim j}\left|\frac{r_k}{r_i}-\frac{r_k}{r_j}\right|\right)$.

Keywords：arithmetical structure；Laplacian matrix；largest eigenvalue；upper bound

1 研究背景

对于一个连通图 G，如果向量$(\boldsymbol{d},\boldsymbol{r})\in\mathbf{N}_+^V\times\mathbf{N}_+^V$，则称$(\boldsymbol{d},\boldsymbol{r})$为 G 的算术结构；如果条件

$$\begin{cases}\gcd\left(r_v \mid v\in V\right)=1,\\ \boldsymbol{L}\left(G,\boldsymbol{d}\right)\boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{0}^{\mathrm{T}},\end{cases} \qquad (1)$$

满足，则$(G,\boldsymbol{d},\boldsymbol{r})$是算术图。其中：$\mathbf{N}_+$ 是正整数集；V 是图 G 的点集；$\boldsymbol{L}(G,\boldsymbol{d})=\mathrm{diag}(d_1,d_2,\cdots,d_n)-\boldsymbol{A}(G)$，$\boldsymbol{A}(G)$ 是 G 的邻接矩阵，定义为

$$\boldsymbol{A}(G)=(a_{ij}),\quad a_{ij}=\begin{cases}1, & i\sim j,\\ 0, & 其他,\end{cases}$$ $i\sim j$ 表示 i 与 j 相邻；

$\boldsymbol{d}$、$\boldsymbol{r}$ 都为列向量，所有的元素都是正整数，$\boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}$ 为向

收稿日期：2020-01-02

基金项目：国家自然科学基金资助项目（119710164），湖南省自然科学基金资助项目（2019JJ40184），湖南省研究生创新基金资助项目（CX2018B287）

作者简介：王盈盈（1994-），女，河南商丘人，湖南师范大学硕士生，主要研究方向为图论及其应用，E-mail：785672089@qq.com

量 $\boldsymbol{r}$ 的转置矩阵。

给定一个简单图 G，其拉普拉斯矩阵为

$$L(G)=\mathrm{diag}(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n)-A(G),$$

其中 $\mathrm{diag}(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n)$ 为顶点度的对角矩阵，矩阵 $\boldsymbol{L}(G,\boldsymbol{d})$ 为算术图上的拉普拉斯矩阵。任意图 G 都有拉普拉斯算术结构，即 $(\boldsymbol{d},\boldsymbol{r})=(\boldsymbol{deg}_G,1)$，其中 $\boldsymbol{deg}_G=\mathrm{diag}(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n)$，$\boldsymbol{r}=(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$。注意 $\boldsymbol{d}$ 和 $\boldsymbol{r}$ 是互相确定的，因此把 $\boldsymbol{d},\boldsymbol{r}$ 或者向量 $(\boldsymbol{d},\boldsymbol{r})$ 看做 G 上的算术结构。

图的算术结构的概念，是 Lorenzini 研究代数几何中退化曲线时，出现交矩阵而引入的 [1]。近年来，关于算术结构的研究较多，如文献 [2] 研究了完全图、路和圈上算术结构的一些性质；文献 [3] 研究了路和圈上算术结构的个数等。代数图论是图论的一大分支，它利用图的关联矩阵的代数性质来研究图。特别地，图谱理论主要研究它的邻接矩阵、拉普拉斯矩阵的特征值和图的性质之间的联系 [4]。

近年来，图的拉普拉斯矩阵 $\boldsymbol{L}(G,\boldsymbol{deg}_G)$ 特征值的界问题，引起了学者们的广泛关注 [5–8]。由于矩阵 $\boldsymbol{L}(G,\boldsymbol{d})$ 可以看作是拉普拉斯矩阵 $(\boldsymbol{d},\boldsymbol{r})$ 的推广，因此研究一个图的算术结构上拉普拉斯矩阵特征值的界，是一个有意义的问题。

2　预备知识

为了证明本文将给出的有关结论，先介绍一些相关的知识和结论。

定义矩阵

$$\boldsymbol{B}(G)=\boldsymbol{L}(G,\boldsymbol{d})+\boldsymbol{re},$$

其中 $\boldsymbol{r}=[r_1,r_2,\cdots,r_n]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{e}$ 是全 1 的行向量，则 $\boldsymbol{B}(G)$ 是实对称非负矩阵，$\boldsymbol{B}(G)$ 的元素为

$$b_{ij}=\begin{cases} d_i+r_i, & i=j; \\ r_i, & i\neq j,\ i\nsim j; \\ r_i-1, & i\neq j,\ i\sim j。\end{cases}$$

式中 $i\nsim j$ 表示 i 与 j 不相邻。

因为 $\boldsymbol{L}(G,\boldsymbol{d})$ 是实对称矩阵，它的特征值为实数，故可设为

$$\lambda_1(\boldsymbol{L}(G,\boldsymbol{d}))\geqslant\lambda_2(\boldsymbol{L}(G,\boldsymbol{d}))\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n(\boldsymbol{L}(G,\boldsymbol{d}))=0。$$

引理 1[5]　设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 n 阶任意矩阵，其特征值为 $\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n$，$\boldsymbol{v}=[v_1,v_2,\cdots,v_n]^{\mathrm{T}}$ 为对应于特征值 λ_k 的特征向量，$\boldsymbol{q}$ 为任意 n 维的列向量，则矩阵 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{vq}^{\mathrm{T}}$ 的特征值为

$$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_{k-1},\lambda_k+\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q},\lambda_{k+1},\cdots,\lambda_n。$$

定理 1　设 G 是一个 n 阶连通图，则 $\boldsymbol{B}(G)$ 的特征值为

$$\lambda_{n-1}(\boldsymbol{L}(G,\boldsymbol{d})),\lambda_{n-2}(\boldsymbol{L}(G,\boldsymbol{d})),\cdots,\lambda_1(\boldsymbol{L}(G,\boldsymbol{d})),\ \sum_{i=1}^{n}r_i。$$

证明　由 $\boldsymbol{B}(G)=\boldsymbol{L}(G,\boldsymbol{d})+\boldsymbol{re}$ 可得，

$$\boldsymbol{B}(G)\boldsymbol{r}=\boldsymbol{L}(G,\boldsymbol{d})\boldsymbol{r}+\boldsymbol{rer}。$$

因向量 $\boldsymbol{r}$ 中每个元素都是正整数，G 连通，矩阵 $\boldsymbol{B}(G)$ 非负不可约，所以由 Perron-Frobenius 定理知，$\boldsymbol{er}$ 是 $\boldsymbol{B}(G)$ 的谱半径，且 $\boldsymbol{r}$ 是其 Perron 向量，即

$$\rho(\boldsymbol{B}(G))=\boldsymbol{er}=\sum_{i=1}^{n}r_i。$$

由引理 1 可以得到 $\boldsymbol{B}(G)$ 的特征值为

$$\lambda_{n-1}(\boldsymbol{L}(G,\boldsymbol{d})),\lambda_{n-2}(\boldsymbol{L}(G,\boldsymbol{d})),\cdots,\lambda_1(\boldsymbol{L}(G,\boldsymbol{d})),\ \sum_{i=1}^{n}r_i。$$

推论 1　设 G 是一个 n 阶连通图，$(\boldsymbol{d},\boldsymbol{r})$ 为 G 上的一个算术结构，则

$$\lambda_1(\boldsymbol{L}(G,\boldsymbol{d}))\leqslant\sum_{i=1}^{n}r_i。\tag{2}$$

3　算术结构的拉普拉斯矩阵特征值更精确的上界

由推论 1 可知，$\lambda_1(\boldsymbol{L}(G,\boldsymbol{d}))$ 是 $\boldsymbol{B}(G)$ 的第二大特征值。对第二大特征值有如下引理 2。

引理 2[8]　设 $\boldsymbol{M}(G)=(m_{ij})$ 是一个 n 阶非负实对称矩阵，若有一个对应于谱半径 $\rho(\boldsymbol{M}(G))$ 的正特征向量 $\boldsymbol{v}=[v_1,v_2,\cdots,v_n]^{\mathrm{T}}$，$\mu(\boldsymbol{M}(G))$ 为 $\boldsymbol{M}(G)$ 的第二大特征值，则有

$$\mu(\boldsymbol{M}(G))\leqslant\frac{1}{2}\max_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{m_{ik}}{v_i}-\frac{m_{jk}}{v_j}\right|v_k。\tag{3}$$

定理 2　设 G 是一个 n 阶连通图，$(\boldsymbol{d},\boldsymbol{r})$ 为 G 上的一个算术结构，则

$$\lambda_1(\boldsymbol{L}(G,\boldsymbol{d}))\leqslant\frac{1}{2}\max_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}\left(d_i+d_j+\sum_{k\sim i,k\nsim j}\frac{r_k}{r_i}+\sum_{k\sim j,k\nsim i}\frac{r_k}{r_j}+\sum_{k\sim i,k\sim j}\left|\frac{r_k}{r_i}-\frac{r_k}{r_j}\right|\right)。\tag{4}$$

证明　由 $\lambda_1(\boldsymbol{B}(G))\boldsymbol{r}=\boldsymbol{L}(G,\boldsymbol{d})\boldsymbol{r}+\boldsymbol{rer}$ 知，$\boldsymbol{B}(G)\boldsymbol{r}=\left(\sum_{i=1}^{n}r_i\right)\boldsymbol{r}$，从而 $\boldsymbol{r}$ 是对应 $\rho(\boldsymbol{B}(G))=\sum_{i=1}^{n}r_i$ 的正特征向量。

设

$$P_{ij}=\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{b_{ik}}{r_i}-\frac{b_{jk}}{r_j}\right|r_k=\left|\frac{b_{ii}}{r_i}-\frac{b_{ji}}{r_j}\right|r_i+\left|\frac{b_{ij}}{r_i}-\frac{b_{jj}}{r_j}\right|r_j+\sum_{k\neq i,k\neq j}\left|\frac{b_{ik}}{r_i}-\frac{b_{jk}}{r_j}\right|r_k。\tag{5}$$

当 $i\nsim j$ 时，则

$$P_{ij}=d_i+d_j+\sum_{k\sim i,k\sim j}\left|\frac{b_{ik}}{r_i}-\frac{b_{jk}}{r_j}\right|r_k+\sum_{k\sim i,k\nsim j}\left|\frac{b_{ik}}{r_i}-\frac{b_{jk}}{r_j}\right|r_k+\sum_{k\sim j,k\nsim i}\left|\frac{b_{ik}}{r_i}-\frac{b_{jk}}{r_j}\right|r_k=$$
$$d_i+d_j+\sum_{k\sim i,k\sim j}\left|\frac{r_k}{r_i}-\frac{r_k}{r_j}\right|+\sum_{k\sim i,k\nsim j}\frac{r_k}{r_i}+\sum_{k\sim j,k\nsim i}\frac{r_k}{r_j}。\quad(6)$$

当 $i\sim j$ 时，则

$$P_{ij}=\left|\frac{d_i+r_i}{r_i}-\frac{r_j-1}{r_j}\right|r_i+\left|\frac{d_j+r_j}{r_j}-\frac{r_i-1}{r_i}\right|r_j+$$
$$\sum_{k\sim i,k\sim j}\left|\frac{b_{ik}}{r_i}-\frac{b_{jk}}{r_j}\right|r_k+\sum_{k\sim i,k\nsim j}\left|\frac{b_{ik}}{r_i}-\frac{b_{jk}}{r_j}\right|r_k+$$
$$\sum_{k\sim j,k\nsim i}\left|\frac{b_{ik}}{r_i}-\frac{b_{jk}}{r_j}\right|r_k=d_i+d_j+\sum_{k\sim i,k\sim j}\left|\frac{r_k}{r_i}-\frac{r_k}{r_j}\right|+$$
$$\sum_{k\sim i,k\nsim j}\frac{r_k}{r_i}+\sum_{k\sim j,k\nsim i}\frac{r_k}{r_j}。\quad(7)$$

由式（6）和式（7）可得，

$$P_{ij}=d_i+d_j+\sum_{k\sim i,k\sim j}\left|\frac{r_k}{r_i}-\frac{r_k}{r_j}\right|+\sum_{k\sim i,k\nsim j}\frac{r_k}{r_i}+\sum_{k\sim j,k\nsim i}\frac{r_k}{r_j}。$$

因为 $\lambda_1\big(\boldsymbol{L}(G,\boldsymbol{d})\big)\leqslant\rho\big(\boldsymbol{B}(G)\big)$，由引理 2 可知，

$$\lambda_1\big(\boldsymbol{L}(G,\boldsymbol{d})\big)\leqslant\frac{1}{2}\max_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{b_{ik}}{r_i}-\frac{b_{jk}}{r_j}\right|r_k\leqslant\frac{1}{2}\max_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}P_{ij}=$$
$$\frac{1}{2}\max_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}\left(d_i+d_j+\sum_{k\sim i,k\nsim j}\frac{r_k}{r_i}+\sum_{k\sim j,k\nsim i}\frac{r_k}{r_j}+\sum_{k\sim i,k\sim j}\left|\frac{r_k}{r_i}-\frac{r_k}{r_j}\right|\right)。$$

式（4）中 $\lambda_1\big(\boldsymbol{L}(G,\boldsymbol{d})\big)$ 的上界需要计算 n^2 项，比较复杂，因此对其进行改进，使计算更加简便，即有定理 3。

定理 3 设 G 是一个 n 阶连通图，$(\boldsymbol{d},\boldsymbol{r})$ 为 G 上的一个算术结构，则

$$\lambda_1\big(\boldsymbol{L}(G,\boldsymbol{d})\big)=\frac{1}{2}\max_{i\sim j}\left(d_i+d_j+\sum_{k\sim i,k\nsim j}\frac{r_k}{r_i}+\sum_{k\sim j,k\nsim i}\frac{r_k}{r_j}+\sum_{k\sim i,k\sim j}\left|\frac{r_k}{r_i}-\frac{r_k}{r_j}\right|\right)。\quad(8)$$

证明 令 $\boldsymbol{R}=\mathrm{diag}(r_1,r_2,\cdots,r_n)$，定义矩阵 $\boldsymbol{C}(G)=\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{L}(G,\boldsymbol{d})\boldsymbol{R}$，则 $\boldsymbol{C}(G)$ 的元素为

$$c_{ij}=\begin{cases}d_i,\ i=j;\\ \dfrac{r_j}{r_i},\ i\neq j,\ i\sim j;\\ 0,\ \ i\neq j,\ i\nsim j。\end{cases}$$

因为矩阵 $\boldsymbol{C}(G)$ 与 $\boldsymbol{L}(G,\boldsymbol{d})$ 相似，所以它们有相同的特征值，令 $\boldsymbol{x}$ 是矩阵 $\boldsymbol{C}(G)$ 对应于特征值 $\lambda_1\big(\boldsymbol{L}(G,\boldsymbol{d})\big)$ 的特征向量。

对 $\boldsymbol{C}(G)\boldsymbol{x}=\lambda_1\big(\boldsymbol{L}(G,\boldsymbol{d})\big)\boldsymbol{x}$，设 $x_i=\max(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$x_j=\min(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，则有

$$\lambda_1\big(\boldsymbol{L}(G,\boldsymbol{d})\big)x_i=d_ix_i-\sum_{k\sim i}\frac{r_k}{r_i}x_k,$$
$$\lambda_1\big(\boldsymbol{L}(G,\boldsymbol{d})\big)x_j=d_jx_j-\sum_{k\sim j}\frac{r_k}{r_j}x_k。$$

由上述 2 个等式可得

$$\lambda_1\big(\boldsymbol{L}(G,\boldsymbol{d})\big)(x_i-x_j)=d_ix_i-d_jx_j+\sum_{k\sim j}\frac{r_k}{r_j}x_k-\sum_{k\sim i}\frac{r_k}{r_i}x_k,\quad(9)$$

$$\lambda_1\big(\boldsymbol{L}(G,\boldsymbol{d})\big)(x_i-x_j)=d_ix_i-d_jx_j+\sum_{k\sim j,k\nsim i}\frac{r_k}{r_j}x_k-\sum_{k\sim i,k\nsim j}\frac{r_k}{r_i}x_k-\sum_{k\sim i,k\sim j}\left(\frac{r_k}{r_j}-\frac{r_k}{r_i}\right)x_k。\quad(10)$$

因为 $x_j\leqslant x_k$，$x_k\leqslant x_i$，所以由式（10）得

$$\lambda_1\big(\boldsymbol{L}(G,\boldsymbol{d})\big)(x_i-x_j)\leqslant d_ix_i-d_jx_j+x_i\sum_{k\sim j,k\nsim i}\frac{r_k}{r_j}-x_j\sum_{k\sim i,k\nsim j}\frac{r_k}{r_i}-\sum_{k\sim i,k\sim j}\left(\frac{r_k}{r_j}-\frac{r_k}{r_i}\right)x_k。$$

设

$$S_{ij}=d_ix_i-d_jx_j+x_i\sum_{k\sim j,k\nsim i}\frac{r_k}{r_j}-x_j\sum_{k\sim i,k\nsim j}\frac{r_k}{r_i}-\sum_{k\sim i,k\sim j}\left(\frac{r_k}{r_j}-\frac{r_k}{r_i}\right)x_k=d_i(x_i-x_j)-d_j(x_i-x_j)+$$
$$d_ix_j+d_jx_i+x_i\sum_{k\sim j,k\nsim i}\frac{r_k}{r_j}-x_j\sum_{k\sim i,k\nsim j}\frac{r_k}{r_i}+\sum_{k\sim i,k\sim j}\left(\frac{r_k}{r_j}-\frac{r_k}{r_i}\right)x_k=\frac{1}{2}d_i(x_i-x_j)+\frac{1}{2}d_j(x_i-x_j)+$$
$$\frac{1}{2}(x_i-x_j)\sum_{k\sim i,k\nsim j}\frac{r_k}{r_i}+\frac{1}{2}(x_i-x_j)\sum_{k\sim j,k\nsim i}\frac{r_k}{r_j}+\frac{1}{2}(x_i+x_j)\left(d_i-\sum_{k\sim i,k\nsim j}\frac{r_k}{r_i}\right)-$$
$$\frac{1}{2}(x_i+x_j)\left(d_j-\sum_{k\sim j,k\nsim i}\frac{r_k}{r_j}\right)+\sum_{k\sim i,k\sim j}\left(\frac{r_k}{r_j}-\frac{r_k}{r_i}\right)x_k=$$
$$\frac{1}{2}d_i(x_i-x_j)+\frac{1}{2}d_j(x_i-x_j)+\frac{1}{2}(x_i-x_j)\sum_{k\sim i,k\nsim j}\frac{r_k}{r_i}+$$
$$\frac{1}{2}(x_i-x_j)\sum_{k\sim j,k\nsim i}\frac{r_k}{r_j}+\frac{1}{2}(x_i+x_j)\left(\sum_{k\sim i,k\sim j}\frac{r_k}{r_j}-\sum_{k\sim i,k\sim j}\frac{r_k}{r_i}\right)+$$
$$\sum_{k\sim i,k\sim j}\left(\frac{r_k}{r_j}-\frac{r_k}{r_i}\right)x_k=\frac{1}{2}d_i(x_i-x_j)+\frac{1}{2}d_j(x_i-x_j)+$$
$$\frac{1}{2}(x_i-x_j)\sum_{k\sim i,k\nsim j}\frac{r_k}{r_i}+\frac{1}{2}(x_i-x_j)\sum_{k\sim j,k\nsim i}\frac{r_k}{r_j}+$$
$$\frac{1}{2}\sum_{k\sim i,k\sim j}\left(\frac{r_k}{r_j}-\frac{r_k}{r_i}\right)(x_i-x_k+x_j-x_k),$$

其中

$$\sum_{k\sim i,k\sim j}\left(\frac{r_k}{r_j}-\frac{r_k}{r_i}\right)\left(x_i-x_k+x_j-x_k\right)\leqslant$$

$$\sum_{k\sim i,k\sim j}\left|\frac{r_k}{r_j}-\frac{r_k}{r_i}\right|\left(x_i-x_k\right)+\sum_{k\sim i,k\sim j}\left|\frac{r_k}{r_j}-\frac{r_k}{r_i}\right|\left(x_k-x_j\right)+$$

$$\frac{1}{2}\left(x_i-x_j\right)\sum_{k\sim j,k\nsim i}\frac{r_k}{r_j}+\frac{1}{2}\sum_{k\sim i,k\sim j}\left|\frac{r_k}{r_j}-\frac{r_k}{r_i}\right|=$$

$$\sum_{k\sim i,k\sim j}\left|\frac{r_k}{r_j}-\frac{r_k}{r_i}\right|\left(x_i-x_j\right),$$

所以

$$\lambda_1\left(\boldsymbol{L}(G,\boldsymbol{d})\right)\left(x_i-x_j\right)\leqslant S_{ij}\leqslant\frac{1}{2}d_i\left(x_i-x_j\right)+\frac{1}{2}d_j\left(x_i-x_j\right)+$$

$$\frac{1}{2}\left(x_i-x_j\right)\left(\sum_{k\sim i,k\nsim j}\frac{r_k}{r_i}+\sum_{k\sim j,k\nsim i}\frac{r_k}{r_j}+\sum_{k\sim i,k\sim j}\left|\frac{r_k}{r_i}-\frac{r_k}{r_j}\right|\right)。$$

因为 $\boldsymbol{L}(G,\boldsymbol{d})\boldsymbol{r}=\boldsymbol{0}$，所以 $\boldsymbol{C}(G)\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{C}(G)$ 的秩等于 $\boldsymbol{L}(G,\boldsymbol{d})$ 的秩。因 $\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}$、$\boldsymbol{x}$ 是 $\boldsymbol{C}(G)$ 不同特征值的特征向量，所以向量 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}$ 正交。而 $x_i>x_j$，因此

$$\lambda_1\left(\boldsymbol{L}(G,\boldsymbol{d})\right)\leqslant\frac{1}{2}\left(d_i+d_j+\sum_{k\sim i,k\nsim j}\frac{r_k}{r_i}+\sum_{k\nsim i,k\sim j}\frac{r_k}{r_j}+\sum_{k\sim i,k\sim j}\left|\frac{r_k}{r_i}-\frac{r_k}{r_j}\right|\right),$$

即 $\boldsymbol{L}(G,\boldsymbol{d})$ 最大特征值的上界为

$$\lambda_1\left(\boldsymbol{L}(G,\boldsymbol{d})\right)=\frac{1}{2}\max_{i\sim j}\left(d_i+d_j+\sum_{k\sim i,\ k\nsim j}\frac{r_k}{r_i}+\sum_{k\nsim i,\ k\sim j}\frac{r_k}{r_j}+\sum_{k\sim i,k\sim j}\left|\frac{r_k}{r_i}-\frac{r_k}{r_j}\right|\right)。$$

推论 2　设 G 是一个 n 阶连通图，$(\boldsymbol{d},\boldsymbol{r})$ 为 G 上的一个算术结构，则

$$\lambda_1\left(\boldsymbol{L}(G,\boldsymbol{d})\right)\leqslant\max_{i\sim j}\left\{d_i+d_j\right\}。\qquad（11）$$

证明　事实上

$$\sum_{k\sim i,k\sim j}\left|\frac{r_k}{r_j}-\frac{r_k}{r_i}\right|\leqslant\sum_{k\sim i,k\sim j}\left|\frac{r_k}{r_i}\right|+\sum_{k\sim i,k\sim j}\left|\frac{r_k}{r_j}\right|=$$

$$\sum_{k\sim i,k\sim j}\frac{r_k}{r_i}+\sum_{k\sim i,k\sim j}\frac{r_k}{r_j}。$$

因为 $\sum\limits_{k\sim i}\frac{r_k}{r_i}=d_i$，$\sum\limits_{k\sim j}\frac{r_k}{r_j}=d_j$，从而

$$\sum_{k\sim i}\frac{r_k}{r_i}=\sum_{k\sim i,k\sim j}\frac{r_k}{r_i}+\sum_{k\sim i,k\nsim j}\frac{r_k}{r_i}=d_i;$$

类似地可得

$$\sum_{k\sim j}\frac{r_k}{r_j}=\sum_{k\sim i,k\sim j}\frac{r_k}{r_j}+\sum_{k\nsim i,k\sim j}\frac{r_k}{r_j}=d_j。$$

将上述两式子代入

$$\frac{1}{2}\left(d_i+d_j+\sum_{k\sim j,k\nsim i}\frac{r_k}{r_j}+\sum_{k\sim i,k\nsim j}\frac{r_k}{r_i}+\sum_{k\sim i,k\sim j}\left(\frac{r_k}{r_j}+\frac{r_k}{r_i}\right)\right)$$

可得

$$\frac{1}{2}\left(d_i+d_j+\sum_{k\sim j,k\nsim i}\frac{r_k}{r_j}+\sum_{k\sim i,k\nsim j}\frac{r_k}{r_i}+\sum_{k\sim i,k\sim j}\left(\frac{r_k}{r_j}+\frac{r_k}{r_i}\right)\right)\leqslant$$

$$\frac{1}{2}\left(d_i+d_j+d_i+d_j\right)=\left(d_i+d_j\right),$$

即

$$\frac{1}{2}\max_{i\sim j}\left(d_i+d_j+\sum_{k\sim j,k\nsim i}\frac{r_k}{r_j}+\sum_{k\sim i,k\nsim j}\frac{r_k}{r_i}+\sum_{k\sim i,k\sim j}\left(\frac{r_k}{r_j}+\frac{r_k}{r_i}\right)\right)\leqslant$$

$$\max_{i\sim j}\left(d_i+d_j\right)$$

所以，由式（8）可知

$$\lambda_1\left(\boldsymbol{L}(G,\boldsymbol{d})\right)\leqslant\max_{i\sim j}\left\{d_i+d_j\right\}。$$

相比较而言，式（11）没有（8）精确，但计算简便一些，也可以作为判断特征值 $\lambda_1\left(\boldsymbol{L}(G,\boldsymbol{d})\right)$ 上界的一个依据。

4　算例

例 1　拆分完全图 K_4 的边 v_3, v_4 得到的一个图 S_4，如图 1 所示。在 G 的算术结构的拉普拉斯矩阵 $\boldsymbol{L}(G,\boldsymbol{d})$ 中，若 $\boldsymbol{d}=(1,2,10,15,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{r}=(15,10,3,2,5)^{\mathrm{T}}$，试用本文的结论计算 $\boldsymbol{L}(G,\boldsymbol{d})$ 的最大特征值的上界。

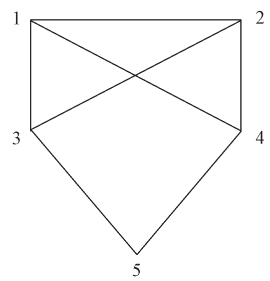

图 1　图 S_4

Fig. 1　Figure S_4

解　用式（2）（4）（8）（11）计算得到 $\boldsymbol{L}(G,\boldsymbol{d})$ 的最大特征值的上界分别为 35, 20, 15.5, 17，而矩阵 $\boldsymbol{L}(G,\boldsymbol{d})$ 的实际特征值有 5 个，分别为 0, 0.891 2, 2.600 8, 10.293 0, 15.215 0。

显然，由式（8）计算的结果为 15.5，它与 $\boldsymbol{L}(G,\boldsymbol{d})$ 的实际最大特征值 15.215 0 相差非常小，所以式（8）更精确。

5　结语

本文得到了算术结构拉普拉斯矩阵 $\boldsymbol{L}(G,\boldsymbol{d})$ 的最大特征值 $\lambda_1\left(\boldsymbol{L}(G,\boldsymbol{d})\right)$ 的 4 个上界，（下转第 14 页）

Journal of Algebraic Combinatorics，2017，48(2)：227-245.

[3] GOEL G，PERKINSON D. Critical Groups of Iterated Cones[J]. Linear Algebra and Its Applications，2019，567：138-142.

[4] DUCEY J E，HILL I，SIN P. The Critical Group of the Kneser Graph on 2-Subsets of an n-Element Set[J]. Linear Algebra and Its Applications，2018，546：154-168.

[5] CHRISTIANSON H，REINER V. The Critical Group of a Threshold Graph[J]. Linear Algebra and Its Applications，2002，349(1/2/3)：233-244.

[6] DARTOIS A，FIORENZI F，FRANCINI P. Sandpile Group on the Graph of the Dihedral Group[J]. European Journal of Combinatorics，2003，24(7)：815-824.

[7] HOU Y P，CHEN P，WOO C. On the Sandpile Group of the Square Cycle[J]. Algebra and Its Applications，2006，418(2/3)：457-467.

[8] CHEN P，HOU Y P. On the Sandpile Group of $P_4 \times C_n$[J]. European Journal of Combinatorics，2008，29(2)：532-534.

[9] HOU Y P，LEI T G，WOO C. On the Sandpile Group of the Graph $K_3 \times C_n$[J]. Linear Algebra and Its Applications，2008，428(8/9)：1886-1898.

[10] HOU Y P，SHIU W C，CHAN W H. Graphs Whose Critical Groups Have Larger Rank[J]. Acta Mathematica Sinica English，2011，27(9)：1663-1670.

[11] MCKEE J，SMYTH C. Integer Symmetric Matrices Having All Their Eigenvalues in the Interval[J]. Journal of Algebra，2007，317(1)：260-290.

（责任编辑：申　剑）

（上接第 9 页）分别如式（2）（4）（8）（11）所示，其中式（8）中的上界最精确，而式（11）中的上界计算较简便。

参考文献：

[1] LORENZINI D J. Arithmetical Graphs[J]. Mathematische Annalen，1989，285(3)：481-501.

[2] CORRALES H，VALENCIA C E. Arithmetical Structures on Graphs[J]. Linear Algebra and Its Applications，2018，536：120-151.

[3] BRAUN B，CORRALES H，CORRY S，et al. Counting Arithmetical Structures on Paths and Cycles[J]. Discrete Mathematics，2018，341(10)：2949-2963.

[4] GODSIL C. Algebraic Graph Theory[M]. New York：Springer-Verlag，2001：279-306.

[5] ROJO O. A Nontrivial Upper Bound on the Largest Laplacian Eigenvalue of Weighted Graphs[J]. Linear Algebra and Its Applications，2007，420(2/3)：625-633.

[6] DAS K C. An Improved Upper Bound for Laplacian Graph Eigenvalues[J]. Linear Algebra and Its Applications，2003，368：269-278.

[7] ROJO O，SOTO R，ROJO H. An Always Nontrivial Upper Bound for Laplacian Graph Eigenvalues[J]. Linear Algebra and Its Applications，2000，312(1/2/3)：155-159.

[8] BAUER F L，DEUTSCH E，STOER J. Abschätzungen Für Die Eigenwerte Positiver Linearer Operatoren[J]. Linear Algebra and Its Applications，1969，2(3)：275-301.

（责任编辑：邓光辉）