doi:10.3969/j.issn.1673-9833.2020.02.001

图上算术结构的电阻距离矩阵

沙　楠，王狄建，侯耀平

（湖南师范大学 数学系，湖南 长沙 410081）

摘　要：一个简单连通图 G 的算术结构是一对正整数列向量 $\boldsymbol{d}, \boldsymbol{r}$，满足 $(\mathrm{diag}(\boldsymbol{d})-\boldsymbol{A})\boldsymbol{r}=\boldsymbol{0}$，其中 $\boldsymbol{A}$ 为 G 的邻接矩阵。因此，对算术结构的电阻距离和电阻距离矩阵进行研究，并求出其电阻距离矩阵的逆。

关键词：算术结构的拉普拉斯矩阵；邻接矩阵；Moore-Penrose 逆；算术结构；电阻距离；电阻距离矩阵

中图分类号：O157.6　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673-9833(2020)02-0001-05

引文格式：沙　楠，王狄建，侯耀平．图上算术结构的电阻距离矩阵 [J]. 湖南工业大学学报，2020，34(2)：1-5.

Resistance Distance Matrices of Arithmetic Structure on Graphs

SHA Nan，WANG Dijian，HOU Yaoping

（Department of Mathematics，Hunan Normal University，Changsha 410081，China）

Abstract：The arithmetical structure of a simple connected graph G is a pair of positive integer sequence vectors $\boldsymbol{d}$, $\boldsymbol{r}$ satisfying the condition of $(\mathrm{diag}(\boldsymbol{d})-\boldsymbol{A})\boldsymbol{r}=\boldsymbol{0}$, where $\boldsymbol{A}$ is the adjacency matrix of G. Therefore, a research is to be carried out on the resistance distance matrix and the resistance distance matrix of arithmetic structure, thus obtaining the inverse of the resistance distance matrix..

Keywords：Laplacian matrix of arithmetic structure；adjacency matrix；inverse of Moore-Penrose；arithmetic structure；resistance distance；resistance matrix

1　背景知识

对于一个简单图 $G=(V, E)$，若列向量对 $(\boldsymbol{d}, \boldsymbol{r}) \in \mathbf{N}_+^V \times \mathbf{N}_+^V$，则称 $(\boldsymbol{d}, \boldsymbol{r})$ 为图 G 的算术结构，如果满足：

$$\begin{cases} \gcd\left(\boldsymbol{r}_v \middle| v \in V\right)=1, \\ \boldsymbol{L}(G, \boldsymbol{d})\boldsymbol{r}=0。\end{cases}$$

式中：$\boldsymbol{L}(G, \boldsymbol{d})=\mathrm{diag}\left(d_1, d_2, \cdots, d_n\right)-\boldsymbol{A}(G)$，其中 $\boldsymbol{A}(G)$ 是 G 的邻接矩阵。

注意：列向量 $\boldsymbol{d}$ 和 $\boldsymbol{r}$ 的所有分量都是正整数，且 $\boldsymbol{d}$ 和 $\boldsymbol{r}$ 相互确定。$(G, \boldsymbol{d}, \boldsymbol{r})$ 叫做算术图，$\boldsymbol{L}(G, \boldsymbol{d})$ 是其算术结构的拉普拉斯矩阵。任何图 G 都有拉普拉斯算术结构，即 $(\boldsymbol{d}, \boldsymbol{r})=(\boldsymbol{deg}_G, 1)$，$\boldsymbol{d}=\boldsymbol{deg}_G$ 表示图 G 的度向量，$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{1}$ 为全是 1 的列向量。

令矩阵 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 表示矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的转置，$\boldsymbol{A}$ 是一个 $m \times n$ 的矩阵，$n \times m$ 的矩阵 $\boldsymbol{G}$ 被称为是 $\boldsymbol{A}$ 的广义逆，如果满足 $\boldsymbol{AGA}=\boldsymbol{A}$。

收稿日期：2020-01-03

基金项目：国家自然科学基金资助项目（119710164），湖南省自然科学基金资助项目（2019JJ40184），湖南省研究生创新基金资助项目（CX2018B287）

作者简介：沙　楠 (1995-)，女，河南郑州人，湖南师范大学硕士生，主要研究方向为图论及其应用，E-mail：1078632125@qq.com

通信作者：侯耀平 (1963-)，男， 湖南邵阳人，湖南师范大学博士生导师，主要从事图论及其应用方面的教学和研究，E-mail：yphou@hunnu.edu.cn

一个 $n\times m$ 的矩阵 $\boldsymbol{G}$ 被称为是 $\boldsymbol{A}$ 的 Moore-Penrose 逆，如果满足以下条件：

i）$\boldsymbol{AGA}=\boldsymbol{A}$；

ii）$\boldsymbol{GAG}=\boldsymbol{G}$；

iii）$(\boldsymbol{AG})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{AG}$；

iv）$(\boldsymbol{GA})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{GA}$。

我们用 $\boldsymbol{A}^{+}$ 表示 $\boldsymbol{A}$ 的 Moore-Penrose 逆。

图的算术结构的概念，是 D. J. Lorenzini[1] 研究代数几何中退化曲线时出现交矩阵而引入，更多可参见文献 [2] 中的几何观点。其后，关于算术结构的研究，吸引了很多学者，如在文献 [1] 证明了简单连通图上的算术结构个数是有限的；文献 [3] 研究了路和圈上的算术结构个数的精确值等。

图距离的研究在图论中是非常重要的内容之一[4−9]。电阻距离是图的距离，在图的随机游动、网络连通性、物理学等各个领域都有研究，如文献 [4] 和文献 [5]。本文在 R. B. Bapat 的文献 [6] 和 [7] 的研究基础上，将一般连通图 G 上的电阻距离和电阻距离矩阵扩展到算术图上。首先，利用算术结构的拉普拉斯矩阵定义一个算术结构的电阻距离 $\rho(i, j)$，再用图的算术结构的电阻距离 $\rho(i, j)$ 表示矩阵中位置元素 (i, j)，得到其算术结构的电阻距离矩阵 $\boldsymbol{H}$，并最终求出它的逆矩阵。

2 算术结构的电阻距离

首先，回顾一下经典距离满足的公理：

令 G 是一个顶点集为 $V(G)=\{1, 2, \cdots, n\}$ 的连通图，且令 $d: V(G)\times V(G)\rightarrow \boldsymbol{R}$，如果 d 表示两个顶点之间的一个度量，那么 d 应该满足如下条件：

i）对于所有的 i、j 有 $d(i, j)\geqslant 0$，当且仅当 $i=j$ 时等号成立；

ii）$d(i, j)= d(j, i)$；

iii）$d(i, j)+d(j, k)\geqslant d(i, k)$。

接下来定义一个 $n\times 1$ 向量 $\boldsymbol{r}_{ij}$，对于 $i, j\in\{1, 2, \cdots, n\}$ 且 $i\neq j$，第 i 项为 $\dfrac{1}{r_i}$，第 j 项为 $-\dfrac{1}{r_j}$，其余项为 0。

在定义算术结构的电阻距离之前，先证明一个关于 $\boldsymbol{L}(G, \boldsymbol{d})$ 广义逆的结论。

引理 1 令 G 是一个连通图，$V(G)=\{1, 2, \cdots, n\}$，$\boldsymbol{L}(G, \boldsymbol{d})$ 是 G 的算术结构的拉普拉斯矩阵，令 $i, j\in\{1, 2, \cdots, n\}$ 且 $i\neq j$。若 $\boldsymbol{M}^1$、$\boldsymbol{M}^2$ 是 $\boldsymbol{L}(G, \boldsymbol{d})$ 的任意两个广义逆，则 $\boldsymbol{r}_{ij}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}^1\boldsymbol{r}_{ij}=\boldsymbol{r}_{ij}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}^2\boldsymbol{r}_{ij}$。

证明 对于 $\boldsymbol{L}(G, \boldsymbol{d})$ 的任意两个广义逆矩阵 $\boldsymbol{M}^1$、$\boldsymbol{M}^2$ 有

$$\boldsymbol{L}(G, \boldsymbol{d})\boldsymbol{M}^1\boldsymbol{L}(G, \boldsymbol{d})=\boldsymbol{L}(G, \boldsymbol{d})\boldsymbol{M}^2\boldsymbol{L}(G, \boldsymbol{d})=\boldsymbol{L}(G, \boldsymbol{d})。$$

由 $\boldsymbol{r}_{ij}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r}_{ij}=\boldsymbol{0}$，可知 $\boldsymbol{r}_{ij}$ 在 $\boldsymbol{L}(G, \boldsymbol{d})$ 列空间中。所以存在一个列向量 $\boldsymbol{z}$，使得 $\boldsymbol{r}_{ij}=\boldsymbol{L}(G, \boldsymbol{d})\boldsymbol{z}$。

所以有

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{r}_{ij}^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{M}^1-\boldsymbol{M}^2\right)\boldsymbol{r}_{ij}=(\boldsymbol{L}(G, \boldsymbol{d})\boldsymbol{z})^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{M}^1-\boldsymbol{M}^2\right)\boldsymbol{L}(G, \boldsymbol{d})\boldsymbol{z}=\\
&\quad\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}(G, \boldsymbol{d})\left(\boldsymbol{M}^1-\boldsymbol{M}^2\right)\boldsymbol{L}(G, \boldsymbol{d})\boldsymbol{z}=\\
&\quad\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{L}(G, \boldsymbol{d})\boldsymbol{M}^1\boldsymbol{L}(G, \boldsymbol{d})-\boldsymbol{L}(G, \boldsymbol{d})\boldsymbol{M}^2 L(G, \boldsymbol{d}))\boldsymbol{z}=\\
&\quad\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{L}(G, \boldsymbol{d})-\boldsymbol{L}(G, \boldsymbol{d}))\boldsymbol{z}=\boldsymbol{0}。
\end{aligned}$$

故恒有

$$\boldsymbol{r}_{ij}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}^1\boldsymbol{r}_{ij}=\boldsymbol{r}_{ij}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}^2\boldsymbol{r}_{ij}。\qquad\square$$

由引理 1 证明可知：对于 $\boldsymbol{L}(G, \boldsymbol{d})$ 的任意一个广义逆 $\boldsymbol{H}$ 而言，$\boldsymbol{r}_{ij}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}\boldsymbol{r}_{ij}$ 是不变的。

下面给出了 i、j 之间的算术结构的电阻距离：

$$\rho(i, j)=\boldsymbol{r}_{ij}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}\boldsymbol{r}_{ij}=\frac{h_{ii}}{r_i^2}+\frac{h_{jj}}{r_j^2}-\frac{h_{ij}}{r_i r_j}-\frac{h_{ji}}{r_j r_i}。$$

式中，$\boldsymbol{H}$ 为 $\boldsymbol{L}(G, \boldsymbol{d})$ 的任意一个广义逆。

若 $i=j$，$\rho(i, j)=0$。

若 $\boldsymbol{H}$ 是 $\boldsymbol{L}(G, \boldsymbol{d})$ 的一个对称广义逆，有

$$\rho(i, j)=\frac{h_{ii}}{r_i^2}+\frac{h_{jj}}{r_j^2}-\frac{2h_{ij}}{r_i r_j}。$$

特别地，令 $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{L}(G, \boldsymbol{d})^{+}$，有

$$\rho(i, j)=\boldsymbol{r}_{ij}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}(G, \boldsymbol{d})^{+}\boldsymbol{r}_{ij}=\frac{l_{ii}^{+}}{r_i^2}+\frac{l_{jj}^{+}}{r_j^2}-\frac{2l_{ij}^{+}}{r_i r_j}。$$

下面证明定义的算术结构的电阻距离也满足经典距离的 3 个条件。在证明满足条件之前，先证明一个有用的结论。

令 $\boldsymbol{A}$ 是一个 $n\times n$ 阶矩阵，可被分块成如下形式：

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12}\\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22}\end{pmatrix},\tag{1}$$

式中 $\boldsymbol{A}_{11}$、$\boldsymbol{A}_{22}$ 为方阵。

若 $\boldsymbol{A}_{11}$ 是非奇异的，那么矩阵 $\boldsymbol{A}_{22}-\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{A}_{11}^{-1}\boldsymbol{A}_{12}$ 为 $\boldsymbol{A}_{11}$ 在矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中的 Schur 补。同理，如果 $\boldsymbol{A}_{22}$ 是非奇异的，那么矩阵 $\boldsymbol{A}_{11}-\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{A}_{22}^{-1}\boldsymbol{A}_{21}$ 为 $\boldsymbol{A}_{22}$ 在矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中的 Schur 补。

引理 2 设 G 是一个有 n 个顶点的连通图，并设 $\boldsymbol{L}(G, \boldsymbol{d})$ 是 G 的算术结构的拉普拉斯矩阵，若 $\boldsymbol{B}$ 为 $\boldsymbol{L}(G, \boldsymbol{d})$ 的一个任意的真主子阵，则 $\boldsymbol{B}^{-1}$ 为一个元素非负的矩阵。

证明 令 $\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{L}(G, \boldsymbol{d})$ 的一个 $k\times k$ 主子阵，其中 $1\leqslant k\leqslant n-1$，由于 $\det(\boldsymbol{B})>0$，则 $\boldsymbol{B}$ 是非奇异的。下面通过对 k 用归纳法来证明。

当 $k\leqslant 2$ 时，显然成立。

假设对于阶数小于 k 的主子阵，该结论成立，接下来只需证明 $\boldsymbol{B}$ 的所有 k 阶余子式均非负即可。

$\boldsymbol{B}$ 的一个对角线元素的代数余子式为 $\boldsymbol{L}(G,\boldsymbol{d})$ 的主子阵的行列式，且均为正。下面证明 $\boldsymbol{B}$ 的 (1, 2)−位置元素的代数余子式为非负的，其余的代数余子式证明方法与此类似。

将 $\boldsymbol{B}(1|2)$ 分块为

$$\boldsymbol{B}(1|2)=\begin{pmatrix} b_{21} & \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{y} & \boldsymbol{B}(1,2|1,2) \end{pmatrix}, \tag{2}$$

则

$$\det(\boldsymbol{B}(1|2))=\det(\boldsymbol{B}(1,2|1,2))\left(b_{21}-\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}(1,2|1,2)^{-1}\boldsymbol{y}\right)。 \tag{3}$$

由归纳假设知，$\det(\boldsymbol{B}(1,2|1,2))\geqslant 0$ 且 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 的所有元素是非正的。另外 $\det(\boldsymbol{B}(1,2|1,2))\geqslant 0$ 和 $b_{21}\leqslant 0$，由式（3）有 $\det(\boldsymbol{B}(1|2))\geqslant 0$。

故 $\boldsymbol{B}$ 的（1，2）− 位置元素代数余子式为非负的。□

下面证明算术结构的电阻距离满足经典距离的 3 个公理。

定理 1　上面定义的电阻距离 ρ 仍满足经典距离的 3 个公理。

证明　若 $n\leqslant 2$，这些性质很容易证明。下面假设 $n\geqslant 3$。

令 $\boldsymbol{L}(G,\boldsymbol{d})$ 是 G 的算术结构的拉普拉斯矩阵，$\boldsymbol{L}(G,\boldsymbol{d})^{+}$ 是 $\boldsymbol{L}(G,\boldsymbol{d})$ 的 Moore-Penrose 逆。

由于 $\boldsymbol{L}(G,\boldsymbol{d})$ 是对称的，则 $\boldsymbol{L}(G,\boldsymbol{d})^{+}$ 也是对称的。此外，$\boldsymbol{L}(G,\boldsymbol{d})$ 是半正定的，则 $\boldsymbol{L}(G,\boldsymbol{d})^{+}=\boldsymbol{L}(G,\boldsymbol{d})^{+}\boldsymbol{L}(G,\boldsymbol{d})\cdot\boldsymbol{L}(G,\boldsymbol{d})^{+}$ 也是半正定的。因此有 $\rho(i,j)\geqslant 0$。

由 $\boldsymbol{L}(G,\boldsymbol{d})=\boldsymbol{L}(G,\boldsymbol{d})\boldsymbol{L}(G,\boldsymbol{d})^{+}\boldsymbol{L}(G,\boldsymbol{d})$ 和 $\boldsymbol{L}(G,\boldsymbol{d})^{+}=\boldsymbol{L}(G,\boldsymbol{d})^{+}\boldsymbol{L}(G,\boldsymbol{d})\boldsymbol{L}(G,\boldsymbol{d})^{+}$，有

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{L}(G,\boldsymbol{d}))=\operatorname{rank}(\boldsymbol{L}(G,\boldsymbol{d})^{+})。$$

又由 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{L}(G,\boldsymbol{d}))=n-1$，可得 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{L}(G,\boldsymbol{d})^{+})=n-1$。又因为 $\boldsymbol{L}(G,\boldsymbol{d})^{+}$ 的任意 2×2 阶主子式皆为正，即对于任意的 $i\neq j$，有 $l_{ii}^{+}l_{jj}^{+}>\left(l_{ij}^{+}\right)^{2}$。

再由算术平均 − 几何平均不等式可知：

$$\frac{l_{ii}^{+}}{r_i^2}+\frac{l_{jj}^{+}}{r_j^2}\geqslant 2\sqrt{\frac{l_{ii}^{+}}{r_i^2}\times\frac{l_{jj}^{+}}{r_j^2}}=\frac{2\sqrt{l_{ii}^{+}l_{jj}^{+}}}{r_ir_j}>\frac{2l_{ij}^{+}}{r_ir_j}。$$

故 $\rho(i,j)=\boldsymbol{r}_{ij}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}(G,\boldsymbol{d})^{+}\boldsymbol{r}_{ij}=\dfrac{l_{ii}^{+}}{r_i^2}+\dfrac{l_{jj}^{+}}{r_j^2}-\dfrac{2l_{ij}^{+}}{r_ir_j}>0$ 满足条件 i）。

由于 $\boldsymbol{r}_{ij}=-\boldsymbol{r}_{ji}$，故很容易得到 $\rho(i,j)=\rho(j,i)$，满足条件 ii）。

对于 $\boldsymbol{L}(G,\boldsymbol{d})$ 的任意一个广义逆 $\boldsymbol{L}'$，下证

$$\rho(i,j)+\rho(j,k)\geqslant\rho(i,k),$$

即证：

$$\frac{l_{ii}'}{r_i^2}+\frac{l_{jj}'}{r_j^2}-\frac{2l_{ij}'}{r_ir_j}+\frac{l_{jj}'}{r_j^2}+\frac{l_{kk}'}{r_k^2}-\frac{2l_{jk}'}{r_jr_k}\geqslant\frac{l_{ii}'}{r_i^2}+\frac{l_{kk}'}{r_k^2}-\frac{2l_{ik}'}{r_ir_k},$$

即 $\dfrac{l_{jj}'}{r_j^2}+\dfrac{l_{ik}'}{r_ir_k}-\dfrac{l_{ij}'}{r_ir_j}-\dfrac{l_{jk}'}{r_jr_k}\geqslant 0$。

令 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{L}(G,\boldsymbol{d})(i|j)$，由引理 2 可得：$\boldsymbol{B}^{-1}$ 中的元素非负。

在 $\boldsymbol{L}(G,\boldsymbol{d})$ 中，用 0 去替换第 j 行 j 列元素，并用 $\boldsymbol{B}^{-1}$ 去替换 $\boldsymbol{L}(G,\boldsymbol{d})(j|j)$，令得到的矩阵为 $\boldsymbol{L}'$，易证

$$\boldsymbol{L}(G,\boldsymbol{d})\boldsymbol{L}'\boldsymbol{L}(G,\boldsymbol{d})=\boldsymbol{L}(G,\boldsymbol{d})。$$

所以 $\boldsymbol{L}'$ 为 $\boldsymbol{L}(G,\boldsymbol{d})$ 的一个广义逆，因此有 $l_{ij}'=l_{jj}'=l_{jk}'=0$。

又由于 $\boldsymbol{B}^{-1}\geqslant 0$，所以 $l_{ik}'\geqslant 0$。□

从而 $\rho(i,j)=\boldsymbol{r}_{ij}{}^{t}\boldsymbol{L}(G,\boldsymbol{d})^{+}\boldsymbol{r}_{ij}=\dfrac{l_{ii}^{+}}{r_i^2}+\dfrac{l_{jj}^{+}}{r_j^2}-\dfrac{2l_{ij}^{+}}{r_ir_j}$ 满足经典距离公理的 3 个条件。

3　算术结构的电阻距离矩阵

前面已经给出了算术结构的电阻距离，本节将给出算术结构的电阻距离矩阵的表达式及其逆矩阵的公式。

首先定义算术结构的电阻距离矩阵 $\boldsymbol{H}$。

定义 1　令 G 是一个顶点集为 $V(G)=\{1,2,\cdots,n\}$ 的连通图，$\boldsymbol{H}=(\rho_{ij})$ 为算术结构的电阻距离矩阵，其中 $\rho_{ij}=\boldsymbol{r}_{ij}{}^{t}L(G,\boldsymbol{d})^{+}\boldsymbol{r}_{ij}=\dfrac{l_{ii}^{+}}{r_i^2}+\dfrac{l_{jj}^{+}}{r_j^2}-\dfrac{2l_{ij}^{+}}{r_ir_j}$。

下面介绍一些符号。令 $\boldsymbol{L}(G,\boldsymbol{d})$ 是 G 的算术结构的拉普拉斯矩阵，$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{r}\boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}$，$\alpha=\boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r}$，其中 $\boldsymbol{r}=(r_1,r_2,\cdots,r_n)^{\mathrm{T}}$。

由于算术结构的拉普拉斯矩阵的性质与拉普拉斯矩阵相似，利用算术结构的特征向量很容易得到 $\boldsymbol{L}(G,\boldsymbol{d})+\dfrac{1}{\alpha}\boldsymbol{C}$ 这个矩阵是非奇异的。

令

$$\boldsymbol{X}=\left(\boldsymbol{L}(G,\boldsymbol{d})+\frac{1}{\alpha}\boldsymbol{C}\right)^{-1}。$$

命题 1　设 $(\boldsymbol{d},\boldsymbol{r})$ 为连通图 G 的算术结构，$\boldsymbol{L}(G,\boldsymbol{d})$ 为算术结构的拉普拉斯矩阵，则 $\boldsymbol{L}(G,\boldsymbol{d})^{+}=\boldsymbol{X}-\dfrac{1}{\alpha}\boldsymbol{C}$。

证明　由

$$\boldsymbol{X}\left(\boldsymbol{L}(G,\boldsymbol{d})+\frac{1}{\alpha}\boldsymbol{C}\right)=\left(\boldsymbol{L}(G,\boldsymbol{d})+\frac{1}{\alpha}\boldsymbol{C}\right)\boldsymbol{X}=\boldsymbol{I},$$

可得 $\boldsymbol{X}\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}$，

所以有

$$\boldsymbol{L}(G,\boldsymbol{d})\boldsymbol{L}(G,\boldsymbol{d})^{+}\boldsymbol{L}(G,\boldsymbol{d})=$$

$$\boldsymbol{L}(G,\boldsymbol{d})\left(\boldsymbol{X}-\frac{1}{\alpha}\boldsymbol{C}\right)\boldsymbol{L}(G,\boldsymbol{d})=$$

$$L(G,\ d)XL(G,\ d)=\left(X^{-1}-\frac{1}{\alpha}C\right)XL(G,\ d)=$$

$$L(G,\ d)-\frac{1}{\alpha}CXL(G,\ d)=L(G,\ d);$$

$$L(G,\ d)^{+}L(G,\ d)L(G,\ d)^{+}=$$

$$\left(X-\frac{1}{\alpha}C\right)L(G,\ d)\left(X-\frac{1}{\alpha}C\right)=XL(G,\ d)X=$$

$$X\left(X^{-1}-\frac{1}{\alpha}C\right)X=X-\frac{1}{\alpha}XCX=X-\frac{1}{\alpha}Xrr^{\mathrm{T}}X=$$

$$X-\frac{1}{\alpha}rr^{\mathrm{T}}=X-\frac{1}{\alpha}C=L(G,\ d)^{+};$$

$$\left(L(G,\ d)L(G,\ d)^{+}\right)^{\mathrm{T}}=\left(L(G,\ d)\left(X-\frac{1}{\alpha}C\right)\right)^{\mathrm{T}}=$$

$$\left(L(G,\ d)X\right)^{\mathrm{T}}=XL(G,\ d)=X\left(X^{-1}-\frac{1}{\alpha}C\right)=$$

$$I-\frac{1}{\alpha}XC=I-\frac{1}{\alpha}C;$$

$$L(G,\ d)L(G,\ d)^{+}=L(G,\ d)\left(X-\frac{1}{\alpha}C\right)=$$

$$L(G,\ d)X=\left(X^{-1}-\frac{1}{\alpha}C\right)X=$$

$$I-\frac{1}{\alpha}CX=I-\frac{1}{\alpha}C。$$

故有 $\left(L(G,\ d)L(G,\ d)^{+}\right)^{\mathrm{T}}=L(G,\ d)L(G,\ d)^{+}$ 。同理可得$\left(L(G,\ d)^{+}L(G,\ d)\right)^{\mathrm{T}}=L(G,\ d)^{+}L(G,\ d)$。

综上，$L(G,\ d)^{+}=X-\frac{1}{\alpha}C$ 为 $L(G, d)$ 的 Moore-Penrose 逆。 □

令 $P=\mathrm{diag}(r_1, r_2,\cdots, r_n)$，$\mathbf{1}$ 是一个全为 1 的列向量，$J=\mathbf{1}\times\mathbf{1}^{\mathrm{T}}$，$\widetilde{X}=\mathrm{diag}\left(\frac{x_{11}}{r_1},\ \frac{x_{22}}{r_2},\ \cdots,\ \frac{x_{nn}}{r_n}\right)$，由上面的符号，可以得到 H 的矩阵表达式。

引理 3 $H=P^{-1}\widetilde{X}J+JP^{-1}\widetilde{X}-2P^{-1}XP^{-1}$。

证明 由于 $L(G,\ d)^{+}=X-\frac{1}{\alpha}C$，故 $P^{-1}\widetilde{X}J+JP^{-1}\widetilde{X}-2P^{-1}XP^{-1}$ 的 (i,j)- 元素为

$$\frac{x_{ii}}{r_i^2}+\frac{x_{jj}}{r_j^2}-\frac{2x_{ij}}{r_ir_j}=\frac{l_{ii}^{+}}{r_i^2}+\frac{l_{jj}^{+}}{r_j^2}-\frac{2l_{ij}^{+}}{r_ir_j}。$$

因此 $H=P^{-1}\widetilde{X}J+JP^{-1}\widetilde{X}-2P^{-1}XP^{-1}$。 □

令 $\tau=\left(\tau_1,\ \tau_2,\cdots,\ \tau_n\right)^{\mathrm{T}}$，其中

$$\tau_i=\frac{2}{r_i}-\sum_{j\sim i}r_j\rho\left(i,\ j\right),\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ n。$$

引理 4 $\tau=L(G,\ d)\widetilde{X}\mathbf{1}+\frac{2}{\alpha}r$。

证明 由 $L(G,\ d)=\mathrm{diag}\left(d_1,\ d_2,\cdots,\ d_n\right)-A$ 和 $\left(L(G,\ d)+\frac{1}{\alpha}C\right)X=I$，可得：

$$d_ix_{ii}-\sum_{j\sim i}x_{ji}+\frac{r_i}{\alpha}\sum_{j=1}^{n}r_jx_{ji}=1。$$

又由 $r^{\mathrm{T}}\left(L(G,\ d)+\frac{1}{\alpha}C\right)X=r^{\mathrm{T}}$，可得：

$$r^{\mathrm{T}}=\frac{1}{\alpha}r^{\mathrm{T}}CX。$$

所以有 $\sum_{j=1}^{n}r_jx_{ji}=r_i$，故有 $d_ix_{ii}-\sum_{j\sim i}x_{ji}=1-\frac{r_i^2}{\alpha}$。又由 $L(G, d)r=0$，有 $d_ir_i=\sum_{j\sim i}r_j$。

$$\tau_i=\frac{2}{r_i}-\sum_{j\sim i}r_j\rho(i,j)=\frac{2}{r_i}-\sum_{j\sim i}r_j\left(\frac{x_{ii}}{r_i^2}+\frac{x_{jj}}{r_j^2}-\frac{2x_{ij}}{r_ir_j}\right)=$$

$$\frac{2}{r_i}-\frac{x_{ii}}{r_i^2}\sum_{j\sim i}r_j-\sum_{j\sim i}\frac{x_{jj}}{r_j}+\frac{2}{r_i}\sum_{j\sim i}x_{ij}=\frac{2}{r_i}-\frac{x_{ii}}{r_i^2}d_ir_i-$$

$$\sum_{j\sim i}\frac{x_{jj}}{r_j}+\frac{2}{r_i}\left(d_ix_{ii}-1+\frac{r_i^2}{\alpha}\right)=\frac{d_ix_{ii}}{r_i}-\sum_{j\sim i}\frac{x_{jj}}{r_j}+\frac{2r_i}{\alpha},$$

故 $\tau=L(G,\ d)\widetilde{X}\mathbf{1}+\frac{2}{\alpha}r$。 □

引理 5 $\sum_{i=1}^{n}r_i\sum_{j\sim i}\rho(i,j)=2(n-1)$。

证明 由前面的证明可知：

$$L(G,\ d)L(G,\ d)^{+}=L(G,\ d)X=I-\frac{1}{\alpha}C,$$

由 $PJ=P\mathbf{1}\mathbf{1}^{\mathrm{T}}=r\mathbf{1}^{\mathrm{T}}$，故

$$PL(G,\ d)PJP^{-1}\widetilde{X}=PL(G,\ d)PJ)P^{-1}\widetilde{X}=$$

$$P(L(G,\ d)P\mathbf{1}\mathbf{1}^{\mathrm{T}})P^{-1}\widetilde{X}=P(L(G,\ d)r\mathbf{1}^{\mathrm{T}})P^{-1}\widetilde{X}=\mathbf{0}。$$

$$PL(G,\ d)PH=$$

$$PL(G,\ d)P(P^{-1}\widetilde{X}J+JP^{-1}\widetilde{X}-2P^{-1}XP^{-1})=$$

$$PL(G,\ d)\widetilde{X}J+PL(G,\ d)PJP^{-1}\widetilde{X}-2\,PL(G,\ d)XP^{-1}。$$

所以有

$$PL(G,\ d)PH=PL(G,\ d)\widetilde{X}J-2PL(G,\ d)XP^{-1}=$$

$$PL(G,\ d)\widetilde{X}J-2P\left(I-\frac{1}{\alpha}C\right)P^{-1}。$$

容易得到

$$\sum_{i=1}^{n}r_i\sum_{j\sim i}\rho(i,j)=-\mathrm{trace}(PL(G,\ d)PH)=$$

$$-\mathrm{trace}\left(PL(G,\ d)\widetilde{X}J-2P\left(I-\frac{1}{\alpha}C\right)P^{-1}\right)=$$

$$-\mathrm{trace}(PL(G,\ d)\widetilde{X}J)+2(n-1)=$$

$$-\mathbf{1}^{\mathrm{T}}PL(G,\ d)\widetilde{X}\mathbf{1}+2(n-1)=$$

$$-r^{\mathrm{T}}LL(G,\ d)\widetilde{X}\mathbf{1}+2(n-1)=2(n-1)。$$ □

推论 1　$\boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\tau}=2$。

证明　利用前面的结论可以得到：

$$\boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{L}(G,\ \boldsymbol{d})\widetilde{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{1}+\frac{2}{\alpha}\boldsymbol{r}\right)=$$

$$\boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}(G,\ \boldsymbol{d})\widetilde{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{1}+\frac{2}{\alpha}\boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r}=\frac{2}{\alpha}\boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r}=\frac{2\alpha}{\alpha}=2\text{ 。}$$

故 $\boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\tau}=2$。　□

由前面的定理和证明得到了下面 $\boldsymbol{H}$ 逆矩阵的表达式。

定理 2

$$\boldsymbol{H}^{-1}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{P}\boldsymbol{L}(G,\ \boldsymbol{d})\boldsymbol{P}+\frac{1}{(\boldsymbol{P\tau})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{P\tau})}(\boldsymbol{P\tau})(\boldsymbol{P\tau})^{\mathrm{T}}\text{ 。}$$

证明　由前面的证明，有

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{L}(G,\ \boldsymbol{d})\boldsymbol{P}\boldsymbol{H}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{L}(G,\ \boldsymbol{d})\widetilde{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{J}-2\boldsymbol{P}\left(\boldsymbol{I}-\frac{1}{\alpha}\boldsymbol{C}\right)\boldsymbol{P}^{-1}=$$

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{L}(G,\ \boldsymbol{d})\widetilde{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{J}-2\boldsymbol{I}+\frac{2}{\alpha}\boldsymbol{P}\boldsymbol{C}\boldsymbol{P}^{-1},$$

所以

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{L}(G,\ \boldsymbol{d})\boldsymbol{P}\boldsymbol{H}+2\boldsymbol{I}=\boldsymbol{P}\left(\boldsymbol{L}(G,\ \boldsymbol{d})\widetilde{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{J}+\frac{2}{\alpha}\boldsymbol{C}\boldsymbol{P}^{-1}\right)=$$

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{L}(G,\ \boldsymbol{d})\widetilde{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{1}\boldsymbol{1}^{\mathrm{T}}+\frac{2}{\alpha}\boldsymbol{r}\boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}^{-1})=$$

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{L}(G,\ \boldsymbol{d})\widetilde{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{1}\boldsymbol{1}^{\mathrm{T}}+\frac{2}{\alpha}\boldsymbol{r}\boldsymbol{1}^{\mathrm{T}})=$$

$$\boldsymbol{P}\left(\boldsymbol{L}(G,\ \boldsymbol{d})\widetilde{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{1}+\frac{2}{\alpha}\boldsymbol{r}\right)\boldsymbol{1}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{P\tau}\boldsymbol{1}\text{。}$$

由于 $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{L}(G,\ \boldsymbol{d})\boldsymbol{P}\boldsymbol{H}+2\boldsymbol{P}^{-1})=\boldsymbol{P\tau}\boldsymbol{1}^{\mathrm{T}}$，有

$$\boldsymbol{L}(G,\ \boldsymbol{d})\boldsymbol{P}\boldsymbol{H}+2\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{1}^{\mathrm{T}}\text{ 。}$$

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{L}(G,\ \boldsymbol{d})\boldsymbol{P}\boldsymbol{H}+2\boldsymbol{P}^{-1})\boldsymbol{P\tau}=\boldsymbol{L}(G,\ \boldsymbol{d})\boldsymbol{P}\boldsymbol{H}\boldsymbol{P\tau}+2\boldsymbol{\tau}=$$

$$\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P\tau}=\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\tau}=2\boldsymbol{\tau}\text{。}$$

所以有 $\boldsymbol{L}(G,\boldsymbol{d})\boldsymbol{PHP\tau}=\boldsymbol{0}$，又由 $\boldsymbol{L}(G,\boldsymbol{d})\boldsymbol{r}=\boldsymbol{0}$，则一定存在标量 b，使得 $\boldsymbol{PHP\tau}=b\boldsymbol{r}$。

又由 $\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{PHP\tau}=b\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r}=2b$，得

$$b=\frac{1}{2}\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{PHP\tau}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{P\tau})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{P\tau})\text{。}$$

所以有

$$\left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{P}\boldsymbol{L}(G,\ \boldsymbol{d})\boldsymbol{P}+\frac{1}{(\boldsymbol{P\tau})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{P\tau})}(\boldsymbol{P\tau})(\boldsymbol{P\tau})^{\mathrm{T}}\right)\boldsymbol{H}=$$

$$-\frac{1}{2}\boldsymbol{P}\boldsymbol{L}(G,\ \boldsymbol{d})\boldsymbol{P}\boldsymbol{H}+\frac{1}{(\boldsymbol{P\tau})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{P\tau})}(\boldsymbol{P\tau})(\boldsymbol{P\tau})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}=$$

$$\boldsymbol{I}-\frac{1}{2}\boldsymbol{P\tau}\boldsymbol{1}^{\mathrm{T}}+\frac{1}{(\boldsymbol{P\tau})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{P\tau})}(\boldsymbol{P\tau})(\boldsymbol{HP\tau})^{\mathrm{T}}=$$

$$\boldsymbol{I}-\frac{1}{2}\boldsymbol{P\tau}\boldsymbol{1}^{\mathrm{T}}+\frac{1}{(\boldsymbol{P\tau})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{P\tau})}(\boldsymbol{P\tau})(b\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{r})^{\mathrm{T}}=$$

$$\boldsymbol{I}-\frac{1}{2}\boldsymbol{P\tau}\boldsymbol{1}^{\mathrm{T}}+\frac{1}{2(\boldsymbol{P\tau})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{P\tau})}(\boldsymbol{P\tau})(\boldsymbol{P\tau})^{\mathrm{T}}H(\boldsymbol{P\tau})\boldsymbol{1}^{\mathrm{T}}=$$

$$\boldsymbol{I}-\frac{1}{2}\boldsymbol{P\tau}\boldsymbol{1}^{\mathrm{T}}+\frac{1}{2}\boldsymbol{P\tau}\boldsymbol{1}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{I}\text{。}$$

故有

$$\boldsymbol{H}^{-1}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{P}\boldsymbol{L}(G,\ \boldsymbol{d})\boldsymbol{P}+\frac{1}{(\boldsymbol{P\tau})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{P\tau})}(\boldsymbol{P\tau})(\boldsymbol{P\tau})^{\mathrm{T}}\text{ 。}$$　□

4　结语

本文将一般连通图 G 上的电阻距离和电阻距离矩阵扩展到算术图上。先通过利用算术结构的拉普拉斯矩阵的广义逆定义一个电阻距离 $\rho(i,j)$，之后定义了算术结构的电阻距离矩阵并得到了一些关系式，最后讨论了算术结构的电阻距离矩阵的逆和算术结构的拉普拉斯矩阵之间的关系。

参考文献：

[1] LORENZINI D J. Arithmetical Graphs[J]. Mathematische Annalen，1989，285(3)：481−501.

[2] LORENZINI D . Groups of Components of Néron Models of Jacobians[J]. Compositio Mathematica，1990，73(2)：145−160.

[3] BRAUN B，CORRALES H，CORRY S，et al. Counting Arithmetical Structures on Paths and Cycles[J]. Discrete Mathematics，2018，341(10)：2949−2963.

[4] DOYLE P G，SNELL J L. Random Walks and Electric Networks[M]. Washington：The Mathematical Association of America，1984：3−64.

[5] BOLLOBÁS B. Modern Graph Theory[M]. New York：Springer，1998：39−66.

[6] BAPAT R B. Resistance Distance in Graphs[J]. Mathematics Student，1999，68：49−72.

[7] BAPAT R B . Resistance Matrix of a Weighted Graph[J]. MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry，2004，50：73−82.

[8] KLEIN D J，RANDI Ć M. Resistance Distance[J]. Journal of Mathematical Chemistry，1993，12(1)：81−95.

[9] CORRALES H，VALENCIA C E. Arithmetical Structures on Graphs[J]. Linear Algebra and Its Applications，2018，536：120−151.

（责任编辑：廖友媛）