DOI：10.20271/j.cnki.1673-9833.2026.5005

基于虚拟惯性环节的孤岛微电网负荷频率控制系统稳定性分析

张彬彬，王　炜，崔舜尧

（湖南工业大学 交通与电气工程学院，湖南 株洲 412007）

摘　要：针对孤岛微电网因可再生能源高渗透引发的惯性欠缺，以及负荷频率控制里的时滞现象，引入了虚拟惯性环节，并构建了带虚拟惯性环节的孤岛微电网负荷频率控制模型。然后，依据构建的模型，着重探究了通信时滞给孤岛微电网系统带来的影响，并且采用了一种新型的时滞乘积型增广 Lyapunov-Krasovskii 泛函（LKF）。以该泛函为基础，借助广义自由权积分不等式对导数积分项予以界定，进而得出基于线性矩阵不等式的时滞相关稳定性判据。最后通过仿真实验和数据分析表明所提方法有着更低的保守性，并且验证了引入虚拟惯性控制环节能有效地提升孤岛微电网的动态性能。

关键词：孤岛微电网；系统惯性；虚拟惯性环节；负荷频率控制；时滞系统

中图分类号：TM712　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673-9833(2026)05-0034-09

引文格式：张彬彬，王　炜，崔舜尧 . 基于虚拟惯性环节的孤岛微电网负荷频率控制系统稳定性分析 [J]. 湖南工业大学学报，2026，40(5)：34-42.

Stability Analysis of Load Frequency Control System of Isolated Island Microgrid Based on Virtual Inertial Control

ZHANG Binbin，WANG Wei，CUI Shunyao

（School of Transportation and Electrical Engineering，Hunan University of Technology，Zhuzhou Hunan 412007，China）

Abstract：In view of the flaws of inertia brought about by high penetration of renewable energy in islanded microgrids and the time delay phenomena in load frequency control, a virtual inertia component has thus been introduced, followed by a construction of a load frequency control model of the islanded microgrid with a virtual inertia component. Then, based on the constructed model, the focus is mainly on the impact of communication delays on islanded microgrid systems, with a novel delay-dependent product-type augmented Lyapunov-Krasovskii functional (LKF) adopted. Based on this functional, the derivative integral terms are bounded with the help of the generalized free-weighting integral inequality, thus obtaining delay-dependent stability criteria with linear matrix inequalities. Finally, simulation experiments and data analysis show that the proposed method is characterized with lower conservatism, verifying that an introduction of a virtual inertia control loop can effectively improve the dynamic performance of islanded microgrids.

Keywords：island microgrid；system inertia；virtual inertia elements；load frequency control；delay system

收稿日期：2025-04-30

基金项目：国家自然科学基金资助项目（62173136）

作者简介：张彬彬，男，湖南工业大学硕士生，主要研究方向为电力系统负荷频率控制，E-mail：2865092003@qq.com

通信作者：王　炜，女，湖南工业大学教授，主要研究方向为电力系统，网络控制系统等，E-mail：wangwei9804@163.com

1　研究背景

在全球能源转型浪潮中，可再生能源的开发与利用已成为应对传统能源枯竭和环境污染问题的关键举措 [1]。孤岛微电网（IIMG）作为一种创新的电力系统架构，正逐渐崭露头角，为实现能源可持续供应提供了一种极具潜力的解决方案 [2]。孤岛微电网是独立运行的小型电力系统，依赖于风能、太阳能等可再生能源发电，并配备储能装置和能量管理系统，以实现电力稳定供应 [3]。与传统集中式大电网不同，孤岛微电网能在与主电网分离的情况下，自主为本地负荷提供电力服务，具更高灵活性和可靠性 [4]。这种特性使得孤岛微电网适用于偏远地区、海岛、山区等远离大电网覆盖范围，为这些地区的居民和企业提供清洁、稳定的电力供应，改善他们的生产生活条件 [5]。

然而，孤岛微电网在实际运行过程中也面临着诸多挑战 [6]。其中，可再生能源的间歇性和波动性是最为突出的问题。由于风能和太阳能的发电功率受到自然条件的强烈影响，其输出功率具较大的不确定性，这给孤岛微电网的电力平衡和频率稳定带来了极大困难 [7]。为了解决这些问题，负荷频率控制已成为孤岛微电网运行中的关键技术之一 [8]。负荷频率控制的目标是通过调节发电设备的输出功率，使系统频率保持在一个稳定的范围内，从而确保电力系统的安全稳定运行。在孤岛微电网中，由于其惯性较小，负荷频率控制面临着更大挑战 [9]。传统的负荷频率控制方法在面对孤岛微电网中的时滞问题时，往往难以取得理想效果 [10]。时滞的存在会导致控制信号延迟，使得系统无法及时响应负荷和发电功率的变化，从而影响系统的稳定性和动态性能 [11]。

近年来，随着智能电网技术快速发展，为孤岛微电网负荷频率控制提供了新的思路和方法 [12]。虚拟惯性控制作为一种新兴的控制技术，被引入孤岛微电网负荷频率控制中 [13]。虚拟惯性控制通过模拟传统同步发电机的惯性特性，在系统频率发生变化时能快速释放或吸收能量，从而有效抑制频率波动，提高系统的稳定性 [14]。因此，有必要针对可再生能源渗透率不断提高导致系统惯性不足及开放式网络通信时滞对孤岛微电网频率稳定性的影响进行研究 [15]。

如何提高时滞的上限以减少 LKF（Lyapunov-Krasovskii functional）方法的保守性，是众多研究人员持续追求的目标。对此相关研究人员提出了几种方法来减少 LKF 的保守性，例如增广 LKF[16]、基于多重积分的 LKF[17]、延迟分解 LKF[18]、基于矩阵细化函数的 LKF[19] 和延迟乘积型 LKF[20]。在时滞相关条件推导中，最大的困难是限制积分项 $\int_{t-h}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{R}\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s$。目前，处理积分项的 3 种主要方法包括模型变换法、自由权矩阵法及积分不等式法。近年来，发展了许多不等式，如詹森不等式 [21]、基于 Wirtinger 的不等式 [22]、基于自由矩阵的积分不等式 [23-24]、基于辅助函数的积分不等式 [25]，以及 Bessel-Legendre 不等式 [26]。

文献 [27] 提出了一种新的时滞乘积型 LKF，用于时变时滞系统的稳定性分析。该 LKF 不仅包含了更全面的时变时延信息，且使时延与扩展向量密切相关。因此，推导结果的保守性低于先前研究中的结果。本研究中，研究组探讨了孤岛微电网系统在包括虚拟惯性环节情况下的时滞稳定性。为了更好地分析这个问题，首先构建了一个基于时滞乘积型 LKF 模型。接着，对系统的时滞稳定性进行了评估，得到各种情况下的最大允许时滞上界（MDSM)。通过模型仿真发现，在这些情况下，采用 VIC 技术可显著改善孤岛微电网系统的性能。

2　含有 VIC 的孤岛微电网模型

电力系统分析和控制中，负荷频率控制的频率响应具较高的稳定性，因此在设计负荷端扰动的负荷频率控制时，可采用低阶线性模型捕捉系统在不同运行状态下的变化趋势。针对孤岛微电网系统因惯性不足而影响动态稳定性问题，本文提出在传统孤岛微电网系统中引入虚拟惯性环节，以实现对系统惯性的补偿，提高系统性能。本研究对象的简化模型见图 1。

研究表明，孤岛微电网的电力供应主要来源于风能、光伏等可再生能源。本研究仅考虑风力和光伏发电出力的间歇性与波动性，并且将这些特性连同住宅及工业负荷等用电需求，一并视为 IIMG 系统中的扰动因素，这些扰动因素不参与系统的频率调节过程。

图 2 展示了一个考虑通信时滞的孤岛微电网系统结构框架，它由涡轮模型、发电机－扰动－储能模型、调速模型、控制器模型、通信时滞模型以及 VIC 环节组成。这为解决通信时滞问题提供了有效的解决方案。该系统所需各模型可简化成传递函数形式，描述如下。

1）涡轮模型。用于产生功率带动发电机，其传递函数为

$$G_{\mathrm{T}}(s)=\frac{\Delta P_{\mathrm{m}}(s)}{\Delta P_{\mathrm{V}}(s)}=\frac{1}{1+sT_{\mathrm{T}}}。\tag{1}$$

式中：ΔP_{m} 为机械功率变化量；ΔP_{V} 为气门控制阀开度变化量；T_{T} 为涡轮惯性时间常数。

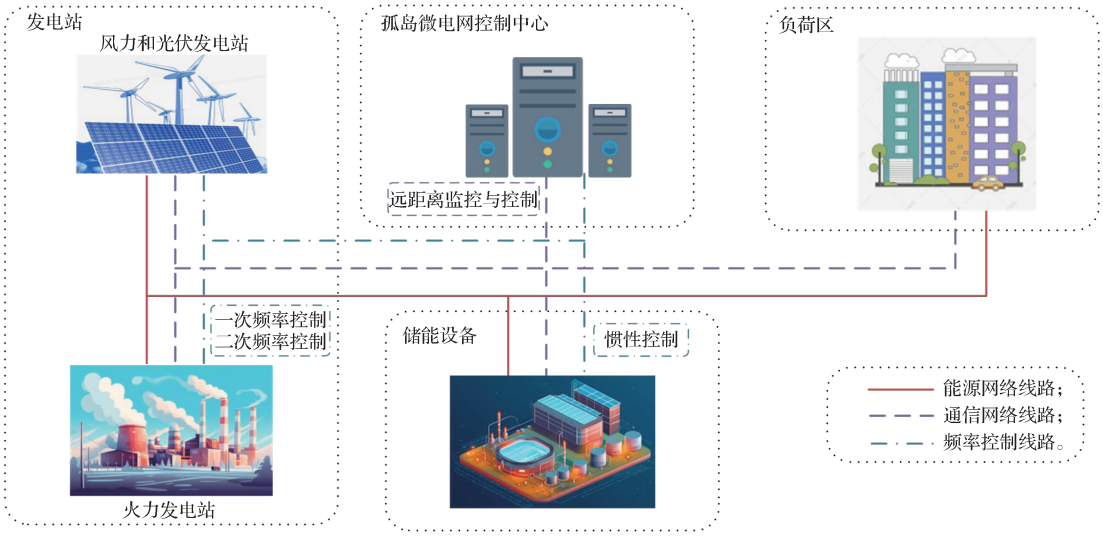

图 1 孤岛微电网简化结构图

Fig. 1 Simplified structure diagram of isolated island microgrid

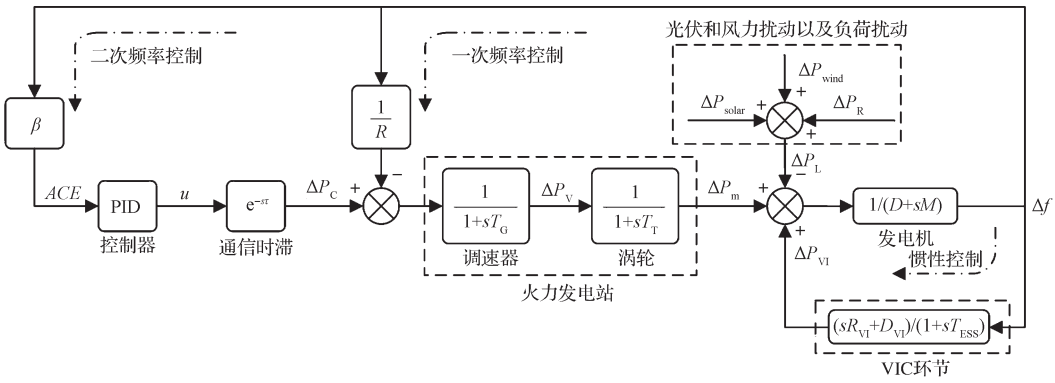

图 2 时滞相关的孤岛微电网结构模型

Fig. 2 Structure model of isolated island microgrid related to time delay

2）发电机－扰动－储能模型。用于描述涡轮输出功率变化量、扰动变量、ESS（储能系统）输出功率变化量与频率偏差之间的关系，其满足以下关系式：

$$\Delta P_{\mathrm{m}}(s)+\Delta P_{\mathrm{VI}}(s)-\Delta P_{\mathrm{L}}(s)=Ms\Delta f(s)+D\Delta f(s)。\quad（2）$$

式中：ΔP_{L} 为总扰动变化量（包括光伏发电 $\Delta P_{\mathrm{solar}}$ 和风力发电扰动 ΔP_{wind} 以及住宅负荷扰动 ΔP_{R}）；D 和 M 为发电机的阻尼系数和转动惯量。

3）调速器模型。带速度下降特性的调速器，可用于实现频率的一次频率调节，其关系式为

$$\Delta P_{\mathrm{V}}(s)=\frac{1}{1+sT_{\mathrm{G}}}\left(\Delta P_{\mathrm{C}}(s)-\frac{1}{R}\Delta f(s)\right)。\quad（3）$$

式中：ΔP_{C} 为系统控制信号；R 为调速器的速度跌落系数；T_{G} 为惯性时间常数。

4）控制器模型。用于二次频率控制，采用 PID 控制器，其传递函数为

$$G_{\mathrm{K}}(s)=\frac{u(s)}{ACE(s)}=K_{\mathrm{P}}+\frac{K_{\mathrm{I}}}{s}+sK_{\mathrm{D}}。\quad（4）$$

式中：K_{P}、K_{I}、K_{D} 为 PID 控制器增益系数；ACE 为区域控制误差（area control error，ACE），且 $ACE(s)=\beta\Delta f(s)$，其中，$\beta=(1/R)+1$。

ACE 是电力系统自动发电控制中的核心指标，用于衡量一个控制区域（如一个省级或区域电网）的发电与负荷间的实时平衡偏差，反映了该区域在满足频率稳定和跨区域功率交换目标方面的表现。

5）通信时滞模型。时滞主要集中在测量信号和控制信号下发的前向通道，通常用指数函数 $\mathrm{e}^{-s\tau}$ 表示，τ 为时滞大小。

6）VIC 环节动态结构如图 3 所示，其动态方程为

$$\Delta P_{\mathrm{VI}}(s)=\frac{sR_{\mathrm{VI}}+D_{\mathrm{VI}}}{1+sT_{\mathrm{ESS}}}\Delta f(s)。\quad（5）$$

式中：$\Delta P_{\mathrm{VI}}(s)$ 为 ESS 输出功率变化量；R_{VI}、D_{VI} 为虚拟惯性常数和虚拟阻尼常数；T_{ESS} 为 ESS 惯性时间常数。

图 3 显示储能系统的输出功率需要经过限幅处理

再输出。限幅处理是一种常见的信号处理技术，通过限制信号的幅值不超过预设的阈值以避免系统过载或非线性失真。

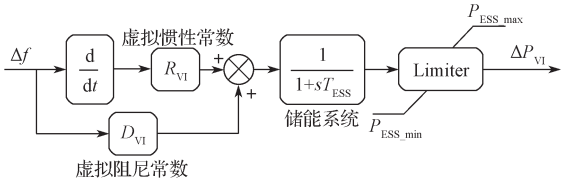

图 3　VIC 环节的动态结构图

Fig. 3　Dynamic structure diagram of VIC link

选择下列状态变量与输出变量：

$$\begin{cases}\boldsymbol{x}(t)=\left[\Delta f \quad \Delta P_{\mathrm{m}} \quad \Delta P_{\mathrm{V}} \quad \Delta P_{\mathrm{VI}}\right]^{\mathrm{T}},\\ \boldsymbol{y}(t)=ACE(t)。\end{cases}$$

根据图 2，可以得出系统状态空间方程为

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}u\left(t-\tau(t)\right)+\boldsymbol{F}\omega(t),\\ \boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)。\end{cases}\tag{6}$$

式中：$\omega(t)=\Delta P_{\mathrm{L}}$；$u(t-\tau(t))=\Delta P_{\mathrm{C}}$；

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-\dfrac{D}{M} & \dfrac{1}{M} & 0 & \dfrac{1}{M}\\ 0 & -\dfrac{1}{T_{\mathrm{T}}} & \dfrac{1}{T_{\mathrm{T}}} & 0\\ -\dfrac{1}{T_{\mathrm{G}}R} & 0 & -\dfrac{1}{T_{\mathrm{G}}} & 0\\ \dfrac{D_{\mathrm{VI}}}{T_{\mathrm{ESS}}}-\dfrac{R_{\mathrm{VI}}D}{T_{\mathrm{ESS}}M} & \dfrac{R_{\mathrm{VI}}}{T_{\mathrm{ESS}}M} & 0 & \dfrac{R_{\mathrm{VI}}}{T_{\mathrm{ESS}}M}-\dfrac{1}{T_{\mathrm{ESS}}}\end{bmatrix};$$

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0\\0\\\dfrac{1}{T_{\mathrm{G}}}\\0\end{bmatrix};\quad \boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}\beta\\0\\0\\0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}};\quad \boldsymbol{F}=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{M}\\0\\0\\\dfrac{R_{\mathrm{VI}}}{T_{\mathrm{ESS}}M}\end{bmatrix}。$$

而 PID 控制器为

$$\boldsymbol{u}(t)=K_{\mathrm{P}}\boldsymbol{y}(t)+K_{\mathrm{I}}\int\boldsymbol{y}(t)\mathrm{d}t+K_{\mathrm{D}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{y}(t)。\tag{7}$$

令 $\begin{cases}\bar{\boldsymbol{x}}(t)=\left[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t) \quad \int\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(t)\mathrm{d}t\right]^{\mathrm{T}},\\ \bar{\boldsymbol{y}}(t)=\left[\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(t) \quad \int\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(t)\mathrm{d}t \quad \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(t)\right]^{\mathrm{T}},\end{cases}$ 由于 $\boldsymbol{CB}=\boldsymbol{0}$，所以可以将式（6）和式（7）转化为静态输出反馈系统，其状态空间方程为

$$\begin{cases}\dot{\bar{\boldsymbol{x}}}(t)=\bar{\boldsymbol{A}}\bar{\boldsymbol{x}}(t)+\bar{\boldsymbol{B}}u\left(t-\tau(t)\right)+\bar{\boldsymbol{F}}\omega(t),\\ \bar{\boldsymbol{y}}(t)=\bar{\boldsymbol{C}}\bar{\boldsymbol{x}}(t)+\boldsymbol{D}_{\mathrm{w}}\omega(t),\\ \boldsymbol{u}(t)=\boldsymbol{K}\bar{\boldsymbol{y}}(t)。\end{cases}\tag{8}$$

式中：$\bar{\boldsymbol{A}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}$；$\bar{\boldsymbol{B}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{0}\end{bmatrix}$；$\bar{\boldsymbol{F}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{F}\\ \boldsymbol{0}\end{bmatrix}$；

$\bar{\boldsymbol{C}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{C} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}\\ \boldsymbol{CA} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}$；$\boldsymbol{D}_{\mathrm{W}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{CF}\end{bmatrix}$；$\boldsymbol{K}=\begin{bmatrix}K_{\mathrm{P}}\\ K_{\mathrm{I}}\\ K_{\mathrm{D}}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$。

将式（8）进一步简化成线性时滞系统方程：

$$\dot{\bar{\boldsymbol{x}}}(t)=\bar{\boldsymbol{A}}\bar{\boldsymbol{x}}(t)+\bar{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{d}}\bar{\boldsymbol{x}}\left(t-\tau(t)\right)+\hat{\boldsymbol{F}}\hat{\boldsymbol{\omega}}(t)。\tag{9}$$

式中：$\bar{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{d}}=\bar{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{K}\bar{\boldsymbol{C}}$；$\hat{\boldsymbol{F}}=\left[\bar{\boldsymbol{F}}_{\mathrm{w}} \quad \bar{\boldsymbol{F}}\right]$，$\bar{\boldsymbol{F}}_{\mathrm{w}}=\bar{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{D}_{\mathrm{w}}$；

$\hat{\boldsymbol{\omega}}(t)=\begin{bmatrix}\omega\left(t-\tau(t)\right)\\ \omega(t)\end{bmatrix}$。

通信时滞主要由系统内部产生，在对 IIMG 时滞的研究过程中主要分析系统的内部稳定性，可忽略外部扰动。因此，将式（9）改成如下只考虑系统平衡状态的空间状态表达式：

$$\dot{\bar{\boldsymbol{x}}}(t)=\bar{\boldsymbol{A}}\bar{\boldsymbol{x}}(t)+\bar{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{d}}\bar{\boldsymbol{x}}\left(t-\tau(t)\right)。\tag{10}$$

因此，可得如下考虑时变时滞的孤岛微电网 LFC 系统线性化模型的一般形式：

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{s}}(t)=\boldsymbol{A}_{\mathrm{s}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{s}}(t)+\boldsymbol{A}_{\mathrm{ds}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{s}}\left(t-\tau(t)\right),\ t>0;\\ \boldsymbol{x}_{\mathrm{s}}(t)=\boldsymbol{\phi}(t),\ t\in[-\tau,\ 0]。\end{cases}$$

式中：$\boldsymbol{x}_{\mathrm{s}}(t)=\bar{\boldsymbol{x}}(t)$，$\boldsymbol{A}_{\mathrm{s}}=\bar{\boldsymbol{A}}$，$\boldsymbol{A}_{\mathrm{ds}}=\bar{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{d}}$；$\tau(t)$ 为满足 $0\leqslant\tau(t)\leqslant\bar{\tau}$ 和 $|\dot{\tau}(t)|\leqslant\mu$ 的时变时滞函数；$\boldsymbol{\phi}(t)$ 为初始状态。

3　时滞相关稳定性判据

运用文献 [27] 所提线性时滞系统稳定性准则剖析本文的 IIMG 系统。定理 1 表明，在系统控制器参数既定情形下，求解相应线性矩阵不等式，便能得出系统稳定所需传输延迟裕度。需要说明的是，下文的 $h(t)$ 为上文的 $\boldsymbol{\phi}(t)$，即时变时滞函数。

本文采用如下标号：上标“−1”表示矩阵的逆，“*”表示矩阵中对称部分的转置，上标“T”表示矩阵转置，$\mathbf{R}^{m}$ 表示 m 维欧几里得空间，$\mathbf{R}^{n\times m}$ 表示 $n\times m$ 维实矩阵，$\mathbf{S}^{n}$ 表示 $n\times n$ 维实矩阵，$\mathbf{S}_{+}^{n}$ 表示 $n\times n$ 维正定对称矩阵，diag{…} 表示块对角矩阵，矩阵中的 **0** 表示适合维度零矩阵，Sym{$\boldsymbol{X}$}=$\boldsymbol{X}+\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}$。

定理 1　对于给定标量 $\mu_1<\mu_2<0$ 和 $h>0$，如果存在正定矩阵 $\boldsymbol{W}\in\mathbf{S}^{6n\times6n}$、$\boldsymbol{P}_1\in\mathbf{S}^{3n\times3n}$、$\boldsymbol{P}_2\in\mathbf{S}^{n\times n}$、$\boldsymbol{R}_1\in\mathbf{S}^{n\times n}$、$\boldsymbol{U}_1\in\mathbf{S}^{7n\times7n}$、$\boldsymbol{U}_2\in\mathbf{S}^{7n\times7n}$、$\boldsymbol{R}_2\in\mathbf{S}^{n\times n}$，以及任意矩阵 $\boldsymbol{N}_1\in\mathbf{R}^{13n\times3n}$、$\boldsymbol{N}_2\in\mathbf{R}^{13n\times3n}$、$\boldsymbol{S}_1\in\mathbf{R}^{13n\times n}$、$\boldsymbol{S}_2\in\mathbf{R}^{13n\times n}$、$\boldsymbol{S}_3\in\mathbf{R}^{13n\times n}$、$\boldsymbol{S}_4\in\mathbf{R}^{13n\times n}$ 满足以下两个线性矩阵不等式（LMI），其中 k=1, 2，则系统是渐近稳定的。

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{\varphi}(0,\ \mu_k) & h\boldsymbol{N}_2\\ * & -\hat{\boldsymbol{R}}_1\end{bmatrix}<0,\ \begin{bmatrix}\boldsymbol{\varphi}(h,\ \mu_k) & h\boldsymbol{N}_1\\ * & -\hat{\boldsymbol{R}}_2\end{bmatrix}<0,$$

式中：$\boldsymbol{\varphi}\left(h(t),\ \dot{h}(t)\right)=\boldsymbol{\Xi}_1+\boldsymbol{\Xi}_2+\boldsymbol{\Xi}_3$，其中，

$$\begin{aligned}\Xi_1=&\mathrm{Sym}\{\boldsymbol{\Pi}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}\boldsymbol{\lambda}_1+\boldsymbol{\Pi}_4^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{\lambda}_2+\boldsymbol{S}_1(h(t)\boldsymbol{e}_6-\boldsymbol{e}_{10})+\\&\boldsymbol{S}_2((h-h(t))\boldsymbol{e}_7-\boldsymbol{e}_{11})+\boldsymbol{S}_3(h(t)\boldsymbol{e}_8-\boldsymbol{e}_{12})+\boldsymbol{S}_4((h-\\&h(t))\boldsymbol{e}_9-\boldsymbol{e}_{13})\}+\boldsymbol{\Pi}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{\Pi}_2-(1-\dot{h}(t))\boldsymbol{\Pi}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{\Pi}_3+\\&h^2\boldsymbol{e}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{e}_0+(1-\dot{h}(t))\boldsymbol{e}_4^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{e}_4-\boldsymbol{e}_5^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{e}_5+h(1-\dot{h}(t))\cdot\\&(h-h(t))\boldsymbol{e}_4^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{R}_1-\boldsymbol{R}_2)\boldsymbol{e}_4,\end{aligned}$$

$$\Xi_2=\mathrm{Sym}\{h\boldsymbol{N}_1\boldsymbol{M}_1+h\boldsymbol{N}_2\boldsymbol{M}_2\},$$

$$\Xi_3=\mathrm{Sym}\{\boldsymbol{\Pi}_5^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}_1\boldsymbol{\lambda}_3+\boldsymbol{\Pi}_6^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}_2\boldsymbol{\lambda}_4\}+\dot{h}(t)\boldsymbol{\Pi}_5^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}_1\boldsymbol{\Pi}_5-\dot{h}(t)\boldsymbol{\Pi}_6^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}_2\boldsymbol{\Pi}_6\circ$$

且有：$\boldsymbol{\Pi}_1=[\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}\quad\boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}}\quad\boldsymbol{e}_{10}^{\mathrm{T}}\quad\boldsymbol{e}_{11}^{\mathrm{T}}\quad\boldsymbol{e}_{12}^{\mathrm{T}}\quad\boldsymbol{e}_{13}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$，

$\boldsymbol{\Pi}_2=[\boldsymbol{e}_0^{\mathrm{T}}\quad\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}\quad\boldsymbol{0}]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\Pi}_3=[\boldsymbol{e}_4^{\mathrm{T}}\quad\boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}}\quad\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$，

$\boldsymbol{\Pi}_4=[\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}}\quad\boldsymbol{e}_{10}^{\mathrm{T}}\quad h(t)(\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{e}_6^{\mathrm{T}})]^{\mathrm{T}}$，

$\boldsymbol{\Pi}_5=[\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}\quad\boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}}\quad\boldsymbol{e}_{10}^{\mathrm{T}}\quad\boldsymbol{e}_6^{\mathrm{T}}\quad\boldsymbol{e}_{12}^{\mathrm{T}}\quad\boldsymbol{e}_8^{\mathrm{T}}\quad h\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{e}_{10}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{e}_{11}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$，

$\boldsymbol{\Pi}_6=[\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}\quad\boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}}\quad\boldsymbol{e}_{11}^{\mathrm{T}}\quad\boldsymbol{e}_7^{\mathrm{T}}\quad\boldsymbol{e}_{13}^{\mathrm{T}}\quad\boldsymbol{e}_9^{\mathrm{T}}\quad h\boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{e}_{10}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{e}_{11}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$；

$\boldsymbol{\lambda}_1=[\boldsymbol{\tau}_1^{\mathrm{T}}\quad\boldsymbol{\tau}_2^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\lambda}_2=[\boldsymbol{0}\quad\boldsymbol{0}\quad\boldsymbol{e}_0^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$，

$\boldsymbol{\lambda}_3=[\boldsymbol{\tau}_3^{\mathrm{T}}\quad\boldsymbol{\tau}_4^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\lambda}_4=[\boldsymbol{\tau}_5^{\mathrm{T}}\quad\boldsymbol{\tau}_6^{\mathrm{T}}\quad\boldsymbol{\tau}_7^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$；

$\boldsymbol{\tau}_1=[\boldsymbol{e}_0^{\mathrm{T}}\quad(1-\dot{h}(t))\boldsymbol{e}_4^{\mathrm{T}}\quad\boldsymbol{v}_2\quad(1-\dot{h}(t))\boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{e}_3^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$，

$\boldsymbol{\tau}_2=[\boldsymbol{v}_3\quad(1-\dot{h}(t))\boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{e}_7^{\mathrm{T}}+\dot{h}(t)\boldsymbol{e}_9^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$，

$\boldsymbol{\tau}_3=[h(t)\boldsymbol{e}_0^{\mathrm{T}}\quad h(t)(1-\dot{h}(t))\boldsymbol{e}_4^{\mathrm{T}}\quad\boldsymbol{v}_1\quad\boldsymbol{v}_2-\dot{h}(t)\boldsymbol{e}_6^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$，

$\boldsymbol{\tau}_4=[h(t)(\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}-(1-\dot{h}(t))\boldsymbol{e}_6^{\mathrm{T}}-\dot{h}(t)\boldsymbol{e}_8^{\mathrm{T}})\quad\boldsymbol{v}_3\quad\boldsymbol{v}_4]^{\mathrm{T}}$，

$\boldsymbol{\tau}_5=[(h-h(t))\boldsymbol{e}_0^{\mathrm{T}}\quad(h-h(t))(1-\dot{h}(t))\boldsymbol{e}_4^{\mathrm{T}}\quad\boldsymbol{v}_5]^{\mathrm{T}}$，

$\boldsymbol{\tau}_6=[(1-\dot{h}(t))\boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{e}_3^{\mathrm{T}}+\dot{h}(t)\boldsymbol{e}_7^{\mathrm{T}}\quad\boldsymbol{v}_6]^{\mathrm{T}}$，

$\boldsymbol{\tau}_7=[(1-\dot{h}(t))\boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{e}_7^{\mathrm{T}}+2\dot{h}(t)\boldsymbol{e}_9^{\mathrm{T}}\quad\boldsymbol{v}_7]^{\mathrm{T}}$；

$\boldsymbol{e}_0=\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{A}_{\mathrm{d}}\boldsymbol{e}_2$；$\hat{\boldsymbol{R}}_i=\mathrm{diag}(\boldsymbol{R}_i,3\boldsymbol{R}_i,5\boldsymbol{R}_i)$，$i=1,2$；

$\boldsymbol{M}_1=[\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}}\quad\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}}-2\boldsymbol{e}_6^{\mathrm{T}}\quad\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}}+6\boldsymbol{e}_6^{\mathrm{T}}-12\boldsymbol{e}_8^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$，

$\boldsymbol{M}_2=[\boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{e}_3^{\mathrm{T}}\quad\boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{e}_3^{\mathrm{T}}-2\boldsymbol{e}_7^{\mathrm{T}}\quad\boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{e}_3^{\mathrm{T}}+6\boldsymbol{e}_7^{\mathrm{T}}-12\boldsymbol{e}_9^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$；

$\boldsymbol{v}_1=h(t)(\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}-(1-\dot{h}(t))\boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}})$，$\boldsymbol{v}_2=\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}-(1-\dot{h}(t))\boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}}$，

$\boldsymbol{v}_3=\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}-(1-\dot{h}(t))\boldsymbol{e}_6^{\mathrm{T}}-\dot{h}(t)\boldsymbol{e}_8^{\mathrm{T}}$，

$\boldsymbol{v}_4=h(t)(h\boldsymbol{e}_0^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{e}_3^{\mathrm{T}})$，

$\boldsymbol{v}_5=(h-h(t))(1-\dot{h}(t))\boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{e}_3^{\mathrm{T}}$，

$\boldsymbol{v}_6=(h-h(t))(1-\dot{h}(t))\boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{e}_7^{\mathrm{T}}+\dot{h}(t)\boldsymbol{e}_9^{\mathrm{T}}$，

$\boldsymbol{v}_7=(h-h(t))(h(1-\dot{h}(t))\boldsymbol{e}_4^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{e}_3^{\mathrm{T}})\circ$

为了简化描述，定义以下向量和矩阵：

$$\boldsymbol{\eta}_1(t)=[\boldsymbol{v}_1^{\mathrm{T}}(t)\quad\boldsymbol{w}_1^{\mathrm{T}}(t)\quad\boldsymbol{w}_2^{\mathrm{T}}(t)\quad\boldsymbol{w}_3^{\mathrm{T}}(t)\quad\boldsymbol{w}_4^{\mathrm{T}}(t)]^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\eta}_2(t)=\left[\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(t)\quad\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\quad\int_s^t\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(\alpha)\mathrm{d}\alpha\right]^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\eta}_3(t)=[\boldsymbol{v}_1^{\mathrm{T}}(t)\quad\boldsymbol{w}_1^{\mathrm{T}}(t)\quad\boldsymbol{v}_2^{\mathrm{T}}(t)]^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\eta}_4(t)=[\boldsymbol{v}_1^{\mathrm{T}}(t)\quad\boldsymbol{w}_2^{\mathrm{T}}(t)\quad\boldsymbol{v}_3^{\mathrm{T}}(t)]^{\mathrm{T}};$$

$$\boldsymbol{v}_1(t)=[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\quad\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-h(t))]^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{v}_2(t)=\left[\frac{1}{h(t)}\boldsymbol{w}_1^{\mathrm{T}}(t)\quad\boldsymbol{w}_3^{\mathrm{T}}(t)\quad\frac{1}{h(t)}\boldsymbol{w}_3^{\mathrm{T}}(t)\quad\boldsymbol{w}_5^{\mathrm{T}}(t)\right]^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{v}_3(t)=\left[\boldsymbol{w}_2^{\mathrm{T}}(t)\quad\boldsymbol{w}_4^{\mathrm{T}}(t)\quad\frac{1}{h-h(t)}\boldsymbol{w}_4^{\mathrm{T}}(t)\quad\boldsymbol{w}_6^{\mathrm{T}}(t)\right]^{\mathrm{T}};$$

$$\boldsymbol{w}_1(t)=\int_{t-h(t)}^t\boldsymbol{x}(s)\mathrm{d}s,\quad\boldsymbol{w}_2(t)=\frac{1}{h-h(t)}\int_{t-h}^{t-h(t)}\boldsymbol{x}(s)\mathrm{d}s,$$

$$\boldsymbol{w}_3(t)=\frac{1}{h(t)}\int_{t-h(t)}^t\int_\theta^t\boldsymbol{x}(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta,$$

$$\boldsymbol{w}_4(t)=\frac{1}{h-h(t)}\int_{t-h}^{t-h(t)}\int_\theta^{t-h(t)}\boldsymbol{x}(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta,$$

$$\boldsymbol{w}_5(t)=\int_{t-h}^t\int_s^t\dot{\boldsymbol{x}}(\alpha)\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}s,\quad\boldsymbol{w}_6(t)=\int_{t-h}^t\int_s^{t-h(t)}\dot{\boldsymbol{x}}(\alpha)\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}s;$$

$$\boldsymbol{\xi}(t)=[\boldsymbol{\xi}_1^{\mathrm{T}}(t)\quad\boldsymbol{\xi}_2^{\mathrm{T}}(t)]^{\mathrm{T}},\quad\xi_1(t)=[\boldsymbol{\kappa}_1\quad\boldsymbol{\kappa}_2]^{\mathrm{T}},\quad\boldsymbol{\xi}_2(t)=[\boldsymbol{\kappa}_3\quad\boldsymbol{\kappa}_4]^{\mathrm{T}};$$

$$\boldsymbol{\kappa}_1=[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\quad\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-h(t))\quad\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-h)],$$

$$\boldsymbol{\kappa}_2=\left[\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(t-h(t))\quad\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(t-h)\quad\frac{1}{h(t)}\boldsymbol{w}_1^{\mathrm{T}}(t)\right],$$

$$\boldsymbol{\kappa}_3=\left[\frac{1}{h-h(t)}\boldsymbol{w}_2^{\mathrm{T}}(t)\quad\frac{1}{h(t)}\boldsymbol{w}_3^{\mathrm{T}}(t)\quad\frac{1}{h-h(t)}\boldsymbol{w}_4^{\mathrm{T}}(t)\right],$$

$$\boldsymbol{\kappa}_4=[\boldsymbol{w}_1^{\mathrm{T}}(t)\quad\boldsymbol{w}_2^{\mathrm{T}}(t)\quad\boldsymbol{w}_3^{\mathrm{T}}(t)\quad\boldsymbol{w}_4^{\mathrm{T}}(t)];$$

$$\boldsymbol{e}_i=[\boldsymbol{0}_{n\times(i-1)n}\quad\boldsymbol{I}_n\quad\boldsymbol{0}_{n\times(13-i)n}],\ i=1,2,\cdots,13\circ$$

证明 构造如下泛函：

$$V(t)=V_1(t)+V_2(t)+V_3(t)\circ$$

式中：$V_1(t)=\boldsymbol{\eta}_1^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{W}\boldsymbol{\eta}_1(t)+\int_{t-h(t)}^t\boldsymbol{\eta}_2^{\mathrm{T}}(t,s)\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{\eta}_2(t,s)\mathrm{d}s+\int_{t-h}^{t-h(t)}\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{P}_2\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s$；

$$V_2(t)=h(t)\boldsymbol{\eta}_3^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{U}_1\boldsymbol{\eta}_3(t)+(h-h(t))\boldsymbol{\eta}_4^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{U}_2\boldsymbol{\eta}_4(t);$$

$$V_3(t)=h\int_{t-h}^{t-h(t)}(h-t+s)\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{R}_1\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s+h\int_{t-h(t)}^t(h-t+s)\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{R}_2\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s\circ$$

对泛函进行求导可得：

$$\begin{aligned}\dot{V}_1(t)=&2\boldsymbol{\eta}_1^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{W}\dot{\boldsymbol{\eta}}_1(t)+\boldsymbol{\eta}_2^{\mathrm{T}}(t,t)\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{\eta}_2(t,t)-\\&(1-\dot{h}(t))\boldsymbol{\eta}_2^{\mathrm{T}}(t,t-h(t))\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{\eta}_2(t,t-h(t))+\\&2\int_{t-h(t)}^t\boldsymbol{\eta}_2^{\mathrm{T}}(t,s)\boldsymbol{P}_1\frac{\partial\boldsymbol{\eta}_2(t,s)}{\partial t}\mathrm{d}s+(1-\dot{h}(t))\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\cdot\\&(t-h(t))\boldsymbol{P}_2\dot{\boldsymbol{x}}(t-h(t))-\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(t-h)\boldsymbol{P}_2\dot{\boldsymbol{x}}(t-h),\end{aligned}$$

$$\dot{V}_2(t)=\dot{h}(t)\boldsymbol{\eta}_3^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{U}_1\boldsymbol{\eta}_3(t)+2h(t)\boldsymbol{\eta}_3^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{U}_1\boldsymbol{\eta}_3(t)-$$

$$\dot{h}(t)\boldsymbol{\eta}_4^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{U}_2\boldsymbol{\eta}_4(t)+2\big(h-h(t)\big)\boldsymbol{\eta}_4^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{U}_2\dot{\boldsymbol{\eta}}_4(t),$$

$$\dot{\boldsymbol{V}}_3(t)=h\big(1-\dot{h}(t)\big)\big(h-h(t)\big)\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\big(t-h(t)\big)\big(\boldsymbol{R}_1-\boldsymbol{R}_2\big)\cdot$$

$$\dot{\boldsymbol{x}}\big(t-h(t)\big)+h^2\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{R}_2\dot{\boldsymbol{x}}(t)-$$

$$h\int_{t-h}^{t-h(t)}\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{R}_1\dot{\boldsymbol{x}}(t)\mathrm{d}s-h\int_{t-h(t)}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{R}_2\dot{\boldsymbol{x}}(t)\mathrm{d}s。$$

应用文献 [23] 的广义自由权积分不等式得到：

$$\boldsymbol{J}_1+\boldsymbol{J}_2\leqslant\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}(t)\Big[\mathrm{Sym}\{h\boldsymbol{N}_1\boldsymbol{M}_1+h\boldsymbol{N}_2\boldsymbol{M}_2\}+\boldsymbol{\Omega}\big(h(t)\big)\Big]\boldsymbol{\xi}(t)。$$

式中：$\boldsymbol{J}_1=-h\int_{t-h}^{t-h(t)}\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{R}_1\dot{\boldsymbol{x}}(t)\mathrm{d}s$；

$$\boldsymbol{J}_2=-h\int_{t-h(t)}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{R}_2\dot{\boldsymbol{x}}(t)\mathrm{d}s;$$

$$\boldsymbol{\Omega}\big(h(t)\big)=hh(t)\boldsymbol{N}_1\hat{\boldsymbol{R}}_2^{-1}\boldsymbol{N}_1^{\mathrm{T}}+h\big(h-h(t)\big)\boldsymbol{N}_2\hat{\boldsymbol{R}}_1^{-1}\boldsymbol{N}_2^{\mathrm{T}}。$$

再加上零等式：$\boldsymbol{0}=2\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}(t)\big[\boldsymbol{S}_1\big(h(t)\boldsymbol{e}_6-\boldsymbol{e}_{10}\big)\big]\boldsymbol{\xi}(t)$，

$$\boldsymbol{0}=2\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}(t)\big[\boldsymbol{S}_2\big(h-h(t)\boldsymbol{e}_7-\boldsymbol{e}_{11}\big)\big]\boldsymbol{\xi}(t),$$

$$\boldsymbol{0}=2\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}(t)\big[\boldsymbol{S}_3\big(h(t)\boldsymbol{e}_8-\boldsymbol{e}_{12}\big)\big]\boldsymbol{\xi}(t),$$

$$\boldsymbol{0}=2\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}(t)\big[\boldsymbol{S}_4\big(h-h(t)\boldsymbol{e}_9-\boldsymbol{e}_{13}\big)\big]\boldsymbol{\xi}(t)。$$

最后得$\dot{V}(t)\leqslant\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}(t)\big(\boldsymbol{\varphi}(h(t),\dot{h}(t)\big)+\boldsymbol{\Omega}\big(h(t)\big)\big)\boldsymbol{\xi}(t)$。

显然，若定理 1 中两个线性矩阵不等式（LMI）成立，则$\dot{V}(t)<0$，因而系统渐进稳定。证明完毕。

4　案例分析

本节针对本文所引入的 VIC 环节分析其对改善 IIMG 系统动态性能方面的有效性；进一步，综合分析 VIC 环节对系统 MDSM 的影响；最后，使用文献 [27] 提出的新稳定性判据，通过 LMI 工具箱求解得到不同的 PID 参数所对应的系统 MDSM，并且分析本文所提方法在提高计算系统时滞稳定裕度方面的可行性。本文针对给定参数的 IIMG 进行分析，为了分析 VIC 环节对系统性能的影响，所以先确定传统 IIMG 的参数，其参数如表 1 所示。

表 1　传统 IIMG 系统参数

Table 1　Traditional IIMG system parameters

M	D	T_{G}	T_{T}	R
10	1	0.1	0.3	0.05

为了验证所引入的 VIC 环节对系统动态性能的影响，在不考虑时滞情况下，本文通过 Matlab Simulink 根据图 3 的结构搭建仿真模型，并且对不同的虚拟惯性常数和虚拟阻尼常数进行仿真，得到系统的频率响应，如图 4 所示。

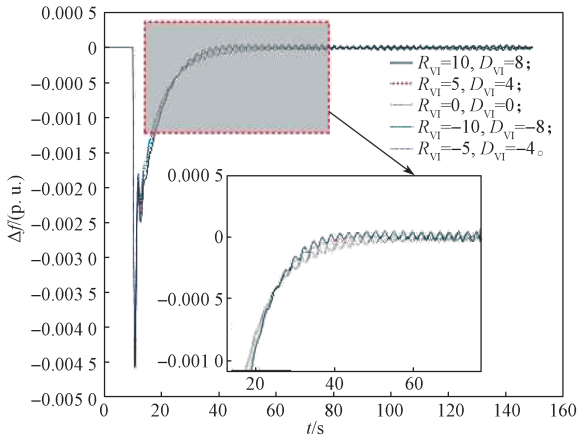

图 4　不同 R_{VI}、D_{VI} 对应的频率响应

Fig. 4　Frequency responses corresponding to different R_{VI} and D_{VI}

由图 4 可观察到，当在 t=10 s 加入干扰量 ΔP_{L}=0.1 p.u. 时，频率失去原来的平衡状态，可见 R_{VI}>0、D_{VI}>0（即向系统提供惯量和阻尼）的系统频率响应速率与 R_{VI}=0、D_{VI}=0（即没有接入 VIC 环节）相比，加入 VIC 能使系统更快回到平衡状态，此时可以认为是储能装置向电网输出功率，而 R_{VI}<0、D_{VI}<0（即向系统吸收惯量和阻尼）降低了系统的频率响应速率，可以认为是储能装置向电网吸收功率。由此可以表明本文引入的 VIC 环节可对 IIMG 的频率响应造成影响。由于本文主要研究提高系统频率动态性能情况下的 IIMG 时滞相关频率稳定性，所以选取 R_{VI}=1、D_{VI}=2、T_{ESS}=10 对 IIMG 频率稳定性进行分析。一般使用 PI 控制器已可满足系统需求，故令 K_{D}=0。对于本文研究的 IIMG 模型，借助所提出时滞稳定性判据，剖析系统矩阵里的 PI 参数与系统 MDSM 的关联。运用 LMI 工具箱对不同时滞类型状况展开计算，由此确定 PI 控制增益和 IIMG 的 MDSM 之间的关系，同时与文献 [28] 的方法进行对比，以验证本文方法的优势，具体数据见表 2~5。

表 2　本文方法求得系统 MDSM（μ=0）

Table 2　System MDSM is obtained by this method （μ=0）

K_{P}	K_{I}				
	−0.05	−0.20	−0.40	−0.60	−1.00
−0.00	27.824	6.987	3.288	1.999	0.900
−0.05	28.784	7.229	3.405	2.072	0.952
−0.20	29.992	7.822	3.698	2.270	1.054
−0.40	29.992	8.232	3.896	2.380	1.098
−0.60	22.800	8.012	3.750	2.241	0.922
−1.00	0.585	0.556	0.505	0.454	0.351

表 3 本文方法求得系统 MDSM（μ=0.5）

Table 3 System MDSM is obtained by this method（μ=0.5）

K_P	K_I				
	−0.05	−0.20	−0.40	−0.60	−1.00
−0.00	26.857	6.745	3.156	1.904	0.835
−0.05	27.810	6.980	3.273	1.977	0.878
−0.20	29.963	7.536	3.544	2.160	0.981
−0.40	29.992	7.793	3.647	2.204	0.974
−0.60	22.800	5.698	3.120	1.713	0.710
−1.00	0.505	0.476	0.439	0.402	0.322

表 4 文献 [28] 方法求得系统 MDSM（μ=0）

Table 4 System MDSM was obtained by the method of reference [28]（μ=0）

K_P	K_I				
	−0.05	−0.20	−0.40	−0.60	−1.00
−0.00	26.235	6.627	3.147	1.932	0.892
−0.05	26.922	6.810	3.240	1.998	0.936
−0.20	27.420	6.954	3.424	2.133	1.031
−0.40	22.274	5.813	3.135	2.089	1.042
−0.60	15.165	4.245	2.382	1.648	0.862
−1.00	0.574	0.546	0.502	0.452	0.354

表 5 文献 [28] 方法求得系统 MDSM（μ=0.5）

Table 5 System MDSM was obtained by the method of reference [28] （μ=0.5）

K_P	K_I				
	−0.05	−0.20	−0.40	−0.60	−1.00
−0.00	24.482	6.132	2.834	1.669	0.667
−0.05	25.226	6.339	2.941	1.744	0.707
−0.20	24.562	6.301	3.093	1.868	0.774
−0.40	15.730	4.416	2.458	1.599	0.688
−0.60	4.807	1.707	1.045	0.782	0.499
−1.00	0.411	0.394	0.368	0.340	0.281

为证明通过定理 1 计算得到的 MDSM 的准确性，本文将计算所得结果代入 Simulink 模型中进行仿真验证。取控制器参数 K_P=−0.6、K_I=−0.2，仿真结果如图 5 所示，当给定时滞 τ=8.0 s 时，系统的频率响应处于缓慢收敛状态，而当给定时滞升到 τ=8.1 s 时，系统的频率响应已经处于发散状态了，所以系统时滞的 MSDM 为 τ=8.0~8.1 s，而使用本文的定理 1 求得的 MDSM 为 τ=8.014 s，这说明本文方法所求出的 MDSM 极为接近实际值。仔细观察表 2~5 可知，随着 K_I 逐步升高，MDSM 呈现出逐渐降低的趋势，这一变化规律清晰地展现了两者之间的内在关联，也进一步验证了本文方法在分析相关数据时的有效性与准确性，为深入研究系统特性提供了可靠依据。

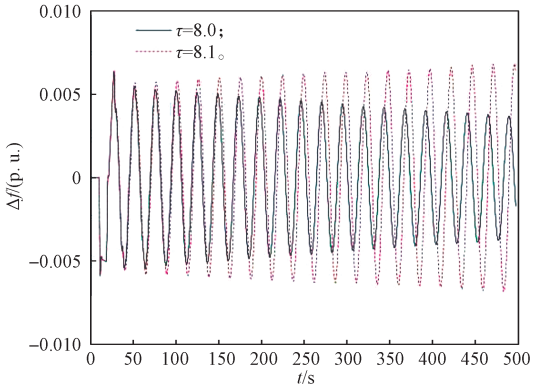

图 5 不同定时滞的系统频率响应（K_P=−0.6，K_I=−0.2）

Fig. 5 System frequency response with different time-delay (K_P=−0.6，K_I=−0.2)

本文侧重研究引入 VIC 环节下通信时滞影响下 IIMG 系统的稳定性。为方便讨论，首先假设 $\tau(t)\equiv\tau$（即 μ=0 时的时滞）。下面讨论不同 R_{VI}、D_{VI} 参数对系统 MDSM 的影响。由仿真得设定时滞 τ=8.07 s、τ=8.68 s 在不同 VIC 的频率响应，如图 6、图 7 所示。

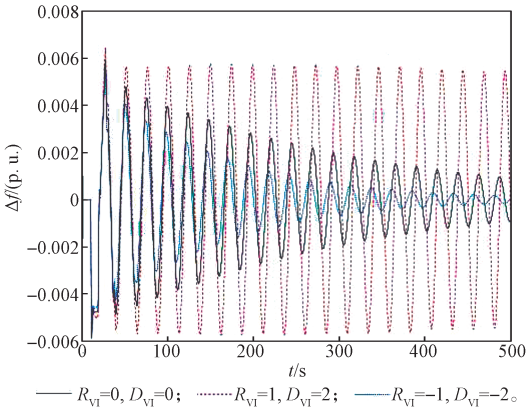

图 6 设定时滞 τ=8.07 s 在不同 R_{VI}、D_{VI} 的频率响应

Fig. 6 Frequency response at different R_{VI} and D_{VI} with the time delay at τ=8.07 s

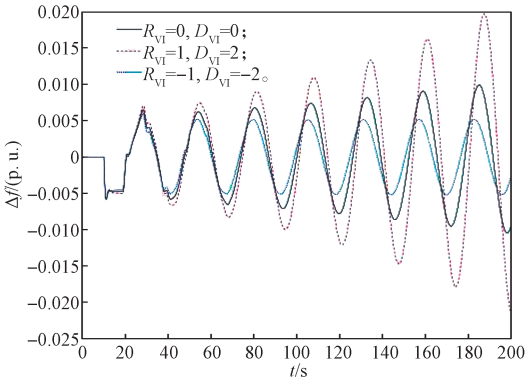

图 7 设定时滞 τ=8.68 s 在不同 R_{VI}、D_{VI} 的频率响应

Fig. 7 Frequency response at different R_{VI} and D_{VI} with the time delay at τ=8.68 s

由图 6 和图 7 可以得知在 VIC 环节的参数大小会影响系统通信的 MDSM，通过对比，可以知道

在时滞 τ=8.07 s 时，R_{VI}=−1、D_{VI}=−2 的系统频率响应处于收敛状态且收敛速率比 R_{VI}=0、D_{VI}=0 更快，但 R_{VI}=1、D_{VI}=2 的系统已达到震荡不收敛状态，而在时滞 τ=8.68 s 时，只有当 R_{VI}=−1、D_{VI}=−2 时系统处于震荡不收敛状态，其他两者都已发散，而且 R_{VI}=1、D_{VI}=2 发散得更加快，可以得知 R_{VI}=−1、D_{VI}=−2 的 MDSM 在 τ=8.068 s 附近，R_{VI}=1、D_{VI}=2 的 MDSM 在 τ=8.07 s 附近，而 R_{VI}=−1、D_{VI}=−2 的 MDSM 在 τ=8.07~8.68 s 之间。综上分析，当选取的 R_{VI}<0、D_{VI}<0 时，可以增大系统 MDSM；而 R_{VI}>0、D_{VI}>0 时，则会减小系统 MDSM。因此，可根据实际系统需要选取 VIC 参数，以满足系统的实际需求。图 8 给出了控制参数与 MDSM 的关系。由图可知，PID 参数不仅影响着系统动态性能，还影响着系统 MDSM。

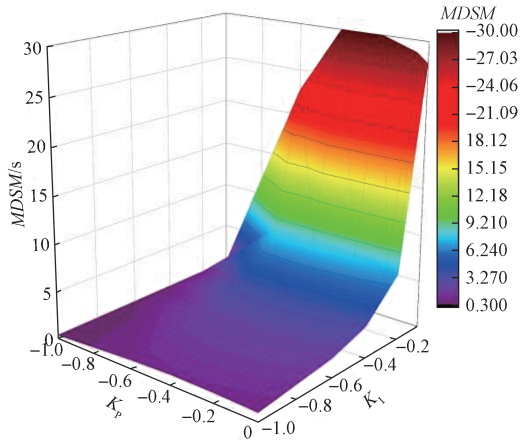

图 8　MDSM 随着 PID 参数的变化规律（μ=0）

Fig. 8　Changes of MSDM with PID parameters（μ=0）

对比表 2、3 或者表 4、5 的结果能够发现，在时滞为变时滞的情况下，时滞的导数会对系统的 MDSM 造成影响。一般而言，时滞导数增大时，所求的 MDSM 会略微降低。此外，通过表 2~5 的结果可以看出，无论是在时变时滞还是在定常时滞情况下，所使用的方法都要优于文献 [28] 的结果。

因此，上述数据与仿真结果分析验证了文献 [27] 所提出方法的有效性。

5　结语

本文研究了可再生能源高渗透导致系统惯性和阻尼不足的 IIMG 时滞相关的 LFC 稳定性问题。针对系统惯性和阻尼不足，引入了 VIC 环节并且构建了带 VIC 环节的孤岛微电网 LFC 模型，同时侧重研究通信时滞对系统的影响。最后，通过不同的参数设定仿真验证本文引入的 VIC 环节能有效地提升系统动态性能，并且通过数据和仿真分析了 PID 控制器参数与 MDSM 之间的关系，结果表明了本文方法的有效性和优越性。

参考文献：

[1] 李　蒙 . 基于综合需求响应的园区综合能源系统低碳经济调度研究 [D]. 长春：长春工程学院，2023.
LI Meng. Research on Low-Carbon Economic Dispatching of Comprehensive Energy System in Park Based on Comprehensive Demand Response[D]. Changchun：Changchun Institute of Technology，2023.

[2] 刘智聪 . 基于两种时间下的孤岛微电网分布式二级控制的研究 [D]. 银川：宁夏大学，2019.
LIU Zhicong. Research on Distributed Secondary Control of Islanded Microgrid Based on Two Kinds of Time[D]. Yinchuan：Ningxia University，2019.

[3] 堵益高 . 基于预测模型的孤岛微电网系统能量调度与优化 [D]. 上海：上海交通大学，2020.
DU Yigao. Predictive Model Based Energy Scheduling and Optimization for Islanded Microgrid Systems[D]. Shanghai：Shanghai Jiao Tong University，2020.

[4] 程　勇，成　琦，姚磊茹，等 . 自适应下垂系数的孤岛微电网无功均分策略 [J]. 南京信息工程大学学报，2024，16(4)：528−536.
CHENG Yong，CHENG Qi，YAO Leiru，et al. Adaptive Droop Coefficient-Based Reactive Power Sharing Strategy for Islanded Microgrid[J]. Journal of Nanjing University of Information Science & Technology，2024，16(4)：528−536.

[5] 张治强 . 基于下垂特性的孤岛微电网综合控制策略研究 [D]. 兰州：兰州交通大学，2023.
ZHANG Zhiqiang. Research on Integrated Control Strategy of Islanded Microgrid Based on Sag Characteristics[D]. Lanzhou：Lanzhou Jiatong University，2023.

[6] 任中杰 . 基于虚拟阻抗和一致性算法的孤岛微电网分层控制研究 [D]. 太原：太原科技大学，2024.
REN Zhongjie. Research on Hierarchical Control of Islanded Microgrid Based on Virtual Impedance and Consensus Algorithm[D]. Taiyuan：Taiyuan University of Science and Technology，2024.

[7] 康佳晋 . 含多种微源的孤岛微电网控制策略研究 [D]. 吉林：东北电力大学，2024.
KANG Jiajin. Research on Control Strategy of Islanded Microgrid Containing Multiple Micro-Sources[D]. Jilin：Northeast Dianli University，2024.

[8] 谢黎龙，李勇汇，范培潇，等 . 基于深度强化学习的孤立多微电网系统频率和电压综合控制 [J]. 电力自动化设备，2024，44(6)：118−126.
XIE Lilong，LI Yonghui，FAN Peixiao，et al. Deep Reinforcement Learning-Based Integrated Frequency and

Voltage Control for Isolated Multi-Microgrid System[J]. Electric Power Automation Equipment，2024，44(6)：118−126.

[9] 刘一鸣，李彦哲，董海鹰，等 . 计及时滞环节的孤岛微电网控制器参数优化研究 [J]. 电力系统保护与控制，2019，47(12)：22−30.
LIU Yiming，LI Yanzhe，DONG Haiying，et al. Study on Parameter Optimization of Islanded Microgrid with Time Delay[J]. Power System Protection and Control，2019，47(12)：22−30.

[10] 侯玉桥 . 预测 PI 改进算法研究 [D]. 杭州：杭州电子科技大学，2024.
HOU Yuqiao. Research on Improved Algorithm for Predictive PI[D]. Hangzhou：Hangzhou Dianzi University，2024.

[11] 王 炜，梁津铭，曾红兵 . 含虚拟惯性控制环节的孤岛微电网时滞相关频率稳定性分析 [J]. 控制理论与应用，2026，43(1)：149−158.
WANG Wei，LIANG Jinming，ZENG Hongbing. Delay-Dependent Frequency Stability Analysis of Isolated Island Microgrid with Virtual Inertial Control[J]. Control Theory & Applications，2026，43(1)：149−158.

[12] 伍 怀，曾红兵，李新宇 . 计及电动汽车与飞轮储能单元的孤岛微电网负荷频率控制 [J]. 湖南工业大学学报，2024，38(6)：36−45.
WU Huai，ZENG Hongbing，LI Xinyu. Load Frequency Control of Islanded Microgrids Considering Electric Vehicles and Flywheel Energy Storage Units[J]. Journal of Hunan University of Technology，2024，38(6)：36−45.

[13] 钱 伟，孙晓彤，费树岷 . 可再生能源高渗透下时滞孤岛微电网的负荷频率控制 [J]. 电网技术，2024，48(2)：630−640.
QIAN Wei，SUN Xiaotong，FEI Shumin. Load Frequency Control of Islanded Microgrids with Time-Delay Under High Penetration of RESs[J]. Power System Technology，2024，48(2)：630−640.

[14] 伍 怀，李新宇，张彬彬，等 . 考虑电动汽车的时滞孤岛微电网负荷频率控制 [J]. 船电技术，2024，44(3)：15−18.
WU Huai，LI Xinyu，ZHANG Binbin，et al. Load Frequency Control of Delayed Islanded Microgrids Considering Electric Vehicle Grid Connection[J]. Marine Electric & Electronic Technology，2024，44(3)：15−18.

[15] ARIBA Y，GOUAISBAUT F. An Augmented Model for Robust Stability Analysis of Time-Varying Delay Systems[J]. International Journal of Control，2009，82(9)：1616−1626.

[16] SUN J，LIU G P，CHEN J，et al. Improved Delay-Range-Dependent Stability Criteria for Linear Systems with Time-Varying Delays[J]. Automatica，2010，46(2)：466−470.

[17] ZENG H B，HE Y，WU M，et al. Complete Delay-Decomposing Approach to Asymptotic Stability for Neural Networks with Time-Varying Delays[J]. IEEE Transactions on Neural Networks，2011，22(5)：806−812.

[18] LEE T H，PARK J H. A Novel Lyapunov Functional for Stability of Time-Varying Delay Systems via Matrix-Refined-Function[J]. Automatica，2017，80：239−242.

[19] ZHANG C K，HE Y，JIANG L，et al. Notes on Stability of Time-Delay Systems：Bounding Inequalities and Augmented Lyapunov-Krasovskii Functionals[J]. IEEE Transactions on Automatic Control，2017，62(10)：5331−5336.

[20] BRIAT C. Convergence and Equivalence Results for the Jensen's Inequality：Application to Time-Delay and Sampled-Data Systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control，2011，56(7)：1660−1665.

[21] SEURET A，GOUAISBAUT F. Wirtinger-Based Integral Inequality：Application to Time-Delay Systems[J]. Automatica，2013，49(9)：2860−2866.

[22] ZENG H B，HE Y，WU M，et al. Free-Matrix-Based Integral Inequality for Stability Analysis of Systems with Time-Varying Delay[J]. IEEE Transactions on Automatic Control，2015，60(10)：2768−2772.

[23] ZENG H B，LIU X G，WANG W. A Generalized Free-Matrix-Based Integral Inequality for Stability Analysis of Time-Varying Delay Systems[J]. Applied Mathematics and Computation，2019，354：1−8.

[24] PARK P，LEE W I，LEE S Y. Auxiliary Function-Based Integral Inequalities for Quadratic Functions and Their Applications to Time-Delay Systems[J]. Journal of the Franklin Institute，2015，352(4)：1378−1396.

[25] SEURET A，GOUAISBAUT F. Hierarchy of LMI Conditions for the Stability Analysis of Time-Delay Systems[J]. Systems & Control Letters，2015，81：1−7.

[26] YANG F S，HE J，WANG D H. New Stability Criteria of Delayed Load Frequency Control Systems via Infinite-Series-Based Inequality[J]. IEEE Transactions on Industrial Informatics，2018，14(1)：231−240.

[27] LIN H C，ZENG H B，WANG W. New Lyapunov-Krasovskii Functional for Stability Analysis of Linear Systems with Time-Varying Delay[J]. Journal of Systems Science and Complexity，2021，34(2)：632−641.

[28] KO K S，SUNG D K. The Effect of EV Aggregators with Time-Varying Delays on the Stability of a Load Frequency Control System[J]. IEEE Transactions on Power Systems，2018，33(1)：669−680.

（责任编辑：申 剑）