DOI：10.20271/j.cnki.1673-9833.2026.5004

含 EVs-HESS 辅助的 LFC 系统时滞相关稳定性分析

刘俊龙，陈　刚，岳汉文

（湖南工业大学 交通与电气工程学院，湖南 株洲 412007）

摘　要：在考虑电动汽车参与的负荷频率控制系统中，引入混合储能系统（HESS），能够利用不同储能形式的技术优势，实现功能互补，从而更好地满足新型电力系统对频率调节提出的更高要求。然后搭建了含电动汽车－混合储能系统辅助的时滞相关 LFC 系统模型，为了减少计算复杂度，运用模型重构技术对其进行处理，构造了合适的 Lyapunov-Krasovskii 泛函并使用三次函数不等式方法对求导后的泛函进行处理，得到了具有较低保守性的稳定性判据。最后通过仿真得到了系统的最大时滞裕度，结果表明所提方法具有相对较低的保守性。

关键词：负荷频率控制；Lyapunov-Krasovskii 泛函；混合储能；模型重构技术

中图分类号：TM712　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673-9833(2026)05-0026-08

引文格式：刘俊龙，陈　刚，岳汉文 . 含 EVs-HESS 辅助的 LFC 系统时滞相关稳定性分析 [J]. 湖南工业大学学报，2026，40(5)：26-33.

Time-Delay Related Stability Analysis of LFC Systems with EVs-HESS Assistance

LIU Junlong，CHEN Gang，YUE Hanwen

（School of Transportation and Electrical Engineering，Hunan University of Technology，Zhuzhou Hunan 412007，China）

Abstract：Based on the load frequency control (LFC) system considering electric vehicles (EVs), a hybrid energy storage system has been added. The hybrid energy storage can utilize the characteristics of different energy storage technologies to complement each other's advantages, thus effectively meeting the higher requirements for frequency modulation in the new power system, followed by a construction of a load frequency control system model assisted by electric vehicles and hybrid energy storage. To reduce computational complexity, model reconstruction technology is applied to process it. To reduce the computational complexity, the model reconstruction technique is applied for processing. An appropriate Lyapunov-Krasovskii functional is constructed and the derived functional is processed using the cubic function inequality method, obtaining a stability criterion with lower conservatism. Then, through simulation, the maximum time delay margin of the system can be obtained, with the results indicating that the proposed method is relatively less conservative.

Keywords：load frequency control；Lyapunov-Krasovskii functional；hybrid energy storage；model reconstruction technique

1　研究背景

考虑到环境问题不断加剧，同时一次能源日渐耗尽，电力系统亟需向资源节约与环境友好的方向转型升级，而实现这一转型的关键，在于构建以新能源为主体的新型电力系统 [1]。高比例可再生能源接入和电

收稿日期：2025-01-17

基金项目：国家自然科学基金资助项目（62173136）

作者简介：刘俊龙，男，湖南工业大学硕士生，主要研究方向为时滞系统鲁棒控制，E-mail：2995743126@qq.com

通信作者：陈　刚，男，湖南工业大学教授，硕士生导师，主要研究方向为机器人技术，网络控制系统，嵌入式系统，E-mail：chengang@hut.edu.cn

力电子设备应用，使电力系统从传统的单一结构向分布式、多源互补的复杂结构转变，同时也提高了电网的运行效率和经济性。随着新能源接入电网，环境污染与化石能源依赖问题将得到一定改善。然而新能源自身所具备的间歇性和不可预测性也彻底重塑了传统电网的架构，进而使区域电网频率稳定性面临全新挑战[2−3]。电能质量在电力系统中具有至关重要的地位，其中包括频率、电压与波形等指标，只有当这 3 个指标处于相对均衡状态时，系统才可能稳定运行。其中，维持电网频率稳定对抑制电压和波形的波动具有重要作用。传统的电网频率调节主要依靠火电与水电调频机组，但这类机组普遍存在响应速度慢、调频死区偏大及爬坡率低等缺陷，难以满足未来电力系统的发展需求。因此，如何借助新型调频手段辅助传统机组有效解决电网频率控制问题，已成为当前的研究重点。近年来，抽水蓄能、电池储能、超级电容、飞轮储能等多种储能技术发展迅速，技术体系已相对成熟[4−7]。在众多储能技术中，锂离子电池因其高充放电功率和良好的安全可靠性，成为当前最具代表性的研究聚焦方向。当高比例可再生能源接入电网引发频率波动并降低运行可靠性时，借助电池储能参与电网调频辅助，是一种有效的解决途径。但是单一储能系统虽可充当调频资源，但其存在技术短板，成本高昂，这些劣势限制了它的大规模推广与应用。文献 [8] 通过将混合储能系统（hybrid energy storage system，HESS）引入电网辅助调频过程中，此方式不仅弥补了原有缺陷，同时增强了系统的调频性能。此外，随着 V2G（vehicle to grid）技术的发展，电动汽车（EV）在电力系统中得到了广泛的应用。因为电动汽车在功率输出方面具有比传统发电机更快的响应特性，电动车可以提高低燃料电池系统的动态性能，目前已有很多文献将电动汽车纳入 LFC 系统[9−10]，并构建了相应的新型传递函数模型[11−12]。

另一个需考虑的点是通信延迟给 LFC 系统性能带来的影响。在开放式通信网络环境中，通信延迟不可避免，它的存在会使系统失去稳定性。所以，在负荷频率控制系统设计时，必须将通信延迟的影响纳入考虑范围。因而，对其展开稳定性分析与控制器设计是不可或缺的环节。目前研究时滞系统稳定性分析的主要方法之一是 Lyapunov-Krasovskii 泛函（LKF）方法，进而得到系统最大时滞稳定裕度（maximum delay stability margin，MDSM）。在文献 [13] 中，运用了一个新的基于辅助函数的二重积分不等式，分析了具有区间时变时滞的 LFC 系统的稳定性。文献 [14] 利用 B-L 不等式给出了一个改进的 LFC 系统稳定性判据。文献 [15] 中提出了一种模型重构技术，用于 LFC 系统的稳定性分析，减小了模型的计算复杂度。文献 [16] 提出了一种新的时滞分布相关方法，用于分析具有概率区间时滞的 LFC 系统的稳定性。此外，文献 [17] 还提出了一种新的分布式控制策略，用于具有电动汽车的延迟 LFC 系统，该策略减小了相连电源区域之间的频率差异。在文献 [18] 中，研究了带 EV 和常数时滞的多区域 LFC 系统的稳定性。但是针对含混合储能辅助的 LFC 系统时滞相关稳定性分析的研究较少。

本文以含电动汽车和混合储能系统作为辅助手段的负荷频率控制系统为研究对象，分析其稳定性问题。首先，引入电池储能与飞轮储能两种储能模型搭建混合储能系统，在此基础上构建了含电动汽车 − 混合储能系统辅助的 LFC 系统模型，针对该模型构建了时滞状态相关的增广型 LKF；然后，利用广义自由权矩阵积分不等式与文献 [19] 提出的三次函数不等式处理所用泛函的导数，得到了一个保守性较小的时滞相关稳定判据；最后，通过仿真实验验证了混合储能系统在负荷频率控制系统中的作用。

文中，$\mathbb{R}^{n\times m}$ 为 $n\times m$ 维实矩阵集合；$\mathbb{R}^{n}$ 为 n 维实向量空间集合；$\boldsymbol{P}>0$ 表示 $\boldsymbol{P}$ 是正定对称矩阵；diag[⋯] 为块对角矩阵；col[⋯] 为列向量；$\mathrm{Sym}(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$。

2　系统描述

本系统在含电动汽车的负荷频率控制系统的基础上引入了混合储能系统，即储能电源模块和飞轮储能模块[20]。系统模型如图 1 所示。

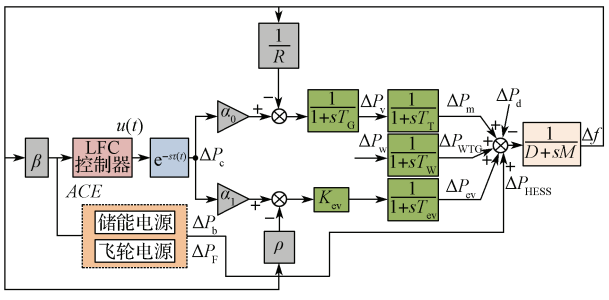

图 1　含 EVs-HESS 辅助的 LFC 系统模型

Fig. 1　LFC system model with EVs and HESS

图 1 中 $\mathrm{e}^{-s\tau(t)}$ 为由信号传输引起的延迟，该延迟是时变的；Δf、ΔP_{m}、ΔP_{ev}、ΔP_{HESS} 和 ΔP_{v} 分别为频率偏差、发电机机械输出偏差、电动汽车输出功率变化、HESS 输出功率变化和阀位偏差；D、M、T_{G} 和 T_{T} 分别为负载阻尼系数、惯性系数、调速器时间常数和涡轮机时间常数；$\beta=1/R+D$ 为频率偏置常数，

其中 R 表示调速器下垂特性；α_0 和 α_1 分别为调速器、涡轮机的参与率和 EV 的参与率，且满足 $\alpha_0+\alpha_1=1$。

系统所需要用到的各个模型可简化成如下传递函数的形式。

1）储能电源模型。根据文献 [21] 所提出的储能电源模型，引入式（1）所示的数学模型：

$$\Delta P_{\mathrm{b}}=\frac{K_{\mathrm{b}}}{T_{\mathrm{b}}s+1}ACE\text{。} \tag{1}$$

式中：ΔP_{b} 为储能电池有功功率实际输出值；K_{b} 为以 ACE 为储能控制信号所对应的储能电源控制增益；T_{b} 为时间常数。

2）飞轮储能模型。此模块以 ACE 信号作为输入信号，得到的数学模型为

$$\Delta P_{\mathrm{F}}=\frac{K_{\mathrm{F}}}{T_{\mathrm{F}}s+1}ACE\text{。} \tag{2}$$

式中：ΔP_{F} 为飞轮储能有功功率输出值；K_{F} 为以 ACE 为储能控制信号所对应的飞轮储能控制增益；T_{F} 为对应的时间常数。

混合储能系统参与电网二次调频的方式如图 2 所示。首先，当系统负荷增加时，负荷频率特性曲线自 P_{L1} 移至 P_{L2}。经传统电源一次调频作用后，电网的运行点便由 a 点切换至 b 点，产生负的频率偏差 Δf_1 后一次调频结束。受限于传统电源备用容量不足，功率频率特性曲线从 P_{G1} 转变为 P_{G2}，进而进入二次调频阶段，其出力 ΔP_{G} 使电网运行点从 b 点到 c 点，与此同时，功率指令控制 HESS 放电，达成频率无差调节。

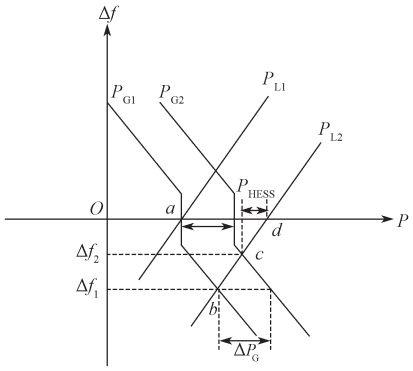

图 2 HESS 参与二次调频的方法

Fig. 2 Method of HESS participation in secondary frequency modulation

3）EV 电池系统的动态模型。其由式（3）描述：

$$G_{\mathrm{ev}}(s)=\frac{K_{\mathrm{ev}}}{1+sT_{\mathrm{ev}}}\text{。} \tag{3}$$

式中：T_{ev}、K_{ev} 分别为 EV 的时间常数和增益。

ΔP_{b} 和 $\rho=1/R$ 分别为 EV 的下垂特性和功率输出的偏差。图 1 中 $\Delta P_{\mathrm{HESS}}=\Delta P_{\mathrm{F}}+\Delta P_{\mathrm{b}}$ 为有功功率实际输出值。由于 ΔP_{d} 和 ΔP_{WTG} 表示负荷变化与风电输出功率变化，可视为扰动变量，不参与频率调节，并结合以上提出的模型可得到联合调频模型，如式（4）所示：

$$\Delta P_{\mathrm{m}}+\Delta P_{\mathrm{ev}}+\Delta P_{\mathrm{HESS}}=(D+sM)\Delta f\text{。} \tag{4}$$

ACE 是控制信号，通常描述为

$$ACE=\beta\Delta f\text{。} \tag{5}$$

设计的 PI 控制器计算式为

$$u(t)=-K_{\mathrm{P}}ACE(t)-K_{\mathrm{I}}\int ACE(t)\mathrm{d}t\text{。} \tag{6}$$

选择下列状态变量与输出变量：

$$\boldsymbol{x}(t)=\left[\Delta f\quad \Delta P_{\mathrm{m}}\quad \Delta P_{\mathrm{v}}\quad \Delta P_{\mathrm{ev}}\quad \Delta P_{\mathrm{b}}\quad \Delta P_{\mathrm{F}}\right]^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{y}(t)=ACE\text{。}$$

由此，可以获得如下 LFC 系统闭环模型：

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}u(t-\tau(t))+\boldsymbol{F}\boldsymbol{\omega}(t),\\ \boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)\text{。}\end{cases} \tag{7}$$

式中：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-\frac{D}{M} & \frac{1}{M} & 0 & \frac{1}{M} & \frac{1}{M} & \frac{1}{M}\\ 0 & -\frac{1}{T_{\mathrm{T}}} & \frac{1}{T_{\mathrm{T}}} & 0 & 0 & 0\\ -\frac{1}{RT_{\mathrm{G}}} & 0 & -\frac{1}{T_{\mathrm{G}}} & 0 & 0 & 0\\ -\frac{\rho K_{\mathrm{ev}}}{T_{\mathrm{ev}}} & 0 & 0 & -\frac{1}{T_{\mathrm{ev}}} & 0 & 0\\ \frac{\beta K_{\mathrm{b}}}{T_{\mathrm{b}}} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{T_{\mathrm{b}}} & 0\\ \frac{\beta K_{\mathrm{F}}}{T_{\mathrm{F}}} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{T_{\mathrm{F}}}\end{bmatrix};$$

$$\boldsymbol{B}=\left[0\quad 0\quad \alpha_0/T_{\mathrm{G}}\quad \alpha_1K_{\mathrm{ev}}/T_{\mathrm{ev}}\quad 0\quad 0\right]^{\mathrm{T}};$$

$$\boldsymbol{F}=\begin{bmatrix}-1/M & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1/M & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}};$$

$$\boldsymbol{C}=\left[\beta\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\right]^{\mathrm{T}};$$

$$\boldsymbol{\omega}(t)=\left[\Delta P_{\mathrm{d}}\quad \Delta P_{\mathrm{WTG}}\right]^{\mathrm{T}};$$

$$u(t-\tau(t))=\Delta P_{\mathrm{c}}\text{。}$$

令 $\bar{\boldsymbol{x}}(t)=\left[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\quad \int\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(t)\mathrm{d}t\right]^{\mathrm{T}}$，

$\bar{\boldsymbol{y}}(t)=\left[\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(t)\quad \int\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(t)\mathrm{d}t\right]^{\mathrm{T}}$。

由此可以将其转化为如下静态输出反馈系统：

$$\begin{cases}\dot{\bar{\boldsymbol{x}}}(t)=\bar{\boldsymbol{A}}\bar{\boldsymbol{x}}(t)+\bar{\boldsymbol{B}}u(t-\tau(t))+\bar{\boldsymbol{F}}\boldsymbol{\omega}(t),\\ \bar{\boldsymbol{y}}(t)=\bar{\boldsymbol{C}}\bar{\boldsymbol{x}}(t),\\ u(t)=\boldsymbol{K}\bar{\boldsymbol{y}}(t)\text{。}\end{cases} \tag{8}$$

式中：

$\bar{\boldsymbol{A}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}$, $\bar{\boldsymbol{B}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{0}\end{bmatrix}$, $\bar{\boldsymbol{F}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{F}\\ \boldsymbol{0}\end{bmatrix}$, $\bar{\boldsymbol{C}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{C} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{K}=\begin{bmatrix}K_{\mathrm{P}}\\ K_{\mathrm{I}}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$。

在不考虑外部扰动的干扰下，式（8）可简化为如下系统方程：$\dot{\bar{\boldsymbol{x}}}(t)=\bar{\boldsymbol{A}}\bar{\boldsymbol{x}}(t)+\bar{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{d}}\bar{\boldsymbol{x}}(t-\tau(t))$。其中 $\bar{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{d}}=\bar{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{K}\bar{\boldsymbol{C}}$。

然后利用文献 [22] 的模型重构方法将时滞相关状态变量与时滞无关状态变量分离，可得如下系统：

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}_1(t)=\boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{x}_1(t)+\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{x}_2(t),\\ \dot{\boldsymbol{x}}_2(t)=\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{x}_1(t)+\boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{x}_2(t)+\boldsymbol{A}_{\mathrm{d}}\boldsymbol{x}_1(t-\tau(t))。\end{cases}\tag{9}$$

式中：$0\leqslant\tau(t)\leqslant h$; $|\dot{\tau}(t)|\leqslant\mu<1$; $t\in[-h,0]$;

$$\boldsymbol{x}_1(t)=\begin{bmatrix}\Delta f & \int\boldsymbol{y}(t)\mathrm{d}t\end{bmatrix}^{\mathrm{T}};$$

$$\boldsymbol{x}_2(t)=\begin{bmatrix}\Delta P_{\mathrm{m}} & \Delta P_{\mathrm{v}} & \Delta P_{\mathrm{ev}} & \Delta P_{\mathrm{b}} & \Delta P_{\mathrm{F}}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}};$$

$$\boldsymbol{A}_{11}=\begin{bmatrix}-\dfrac{D}{M} & 0\\ \beta & 0\end{bmatrix};\ \boldsymbol{A}_{12}=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{M} & 0 & \dfrac{1}{M} & \dfrac{1}{M} & \dfrac{1}{M}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}};$$

$$\boldsymbol{A}_{21}=\begin{bmatrix}0 & -\dfrac{1}{RT_{\mathrm{G}}} & -\dfrac{\rho K_{\mathrm{ev}}}{T_{\mathrm{ev}}} & \dfrac{\beta K_{\mathrm{b}}}{T_{\mathrm{b}}} & \dfrac{\beta K_{\mathrm{F}}}{T_{\mathrm{F}}}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}};$$

$$\boldsymbol{A}_{22}=\begin{bmatrix}-\dfrac{1}{T_{\mathrm{T}}} & \dfrac{1}{T_{\mathrm{T}}} & 0 & 0 & 0\\ 0 & -\dfrac{1}{T_{\mathrm{G}}} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\dfrac{1}{T_{\mathrm{ev}}} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -\dfrac{1}{T_{\mathrm{b}}} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\dfrac{1}{T_{\mathrm{F}}}\end{bmatrix};$$

$$\boldsymbol{A}_{\mathrm{d}}=\begin{bmatrix}0 & -\dfrac{\beta K_{\mathrm{P}}\alpha_0}{T_{\mathrm{G}}} & -\dfrac{\beta K_{\mathrm{P}}\alpha_1 K_{\mathrm{ev}}}{T_{\mathrm{ev}}} & 0 & 0\\ 0 & -\dfrac{K_{\mathrm{I}}\alpha_0}{T_{\mathrm{G}}} & -\dfrac{K_{\mathrm{I}}\alpha_1 K_{\mathrm{ev}}}{T_{\mathrm{ev}}} & 0 & 0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}。$$

3　稳定性判据

为得到稳定性判据，首先引入以下引理。

引理 1[19] 令三次函数 $f(s)=\boldsymbol{a}_3s^3+\boldsymbol{a}_2s^2+\boldsymbol{a}_1s+\boldsymbol{a}_0$，其中 $\boldsymbol{a}_i$ 为具有适当维数的矩阵，i=0, 1, 2, 3。对任意的 $s\in[0,h]$，若以下不等式成立，则 $f(s)<0$，

$$f(0)<0,\ f(h)<0;\tag{10}$$

$$f(h)-\boldsymbol{a}_2h^2<0\ ,\ f(h)-\boldsymbol{a}_3h^3<0;\tag{11}$$

$$\boldsymbol{a}_3h^3+f(h)-h^3(2\boldsymbol{a}_3h+\boldsymbol{a})<0。\tag{12}$$

定理 1　对于给定的标量 μ 和 h，如果存在实对称矩阵 $\boldsymbol{P}>0$，$\boldsymbol{Q}_1>0$，$\boldsymbol{Q}_2>0$，$\boldsymbol{R}_1>0$，$\boldsymbol{R}_2>0$，$\boldsymbol{Y}_1>0$，$\boldsymbol{Y}_2>0$，以及有适当维数的任意矩阵 $\boldsymbol{N}_i$、$\boldsymbol{H}_i$, i=1, 2，使得以下矩阵

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{\varphi}_0(\dot{\tau}(t)) & \sqrt{h}\boldsymbol{N}_2\\ \sqrt{h}\boldsymbol{N}_2^{\mathrm{T}} & -\tilde{\boldsymbol{R}}_1\end{bmatrix}<0,\tag{13}$$

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{\psi}_i(\dot{\tau}(t)) & \sqrt{h}\boldsymbol{N}_1\\ \sqrt{h}\boldsymbol{N}_1^{\mathrm{T}} & -\tilde{\boldsymbol{R}}_2\end{bmatrix}<0,\ i=1,2,3,4\tag{14}$$

成立，则系统（9）是渐近稳定的。

式（13）（14）中：

$\tilde{\boldsymbol{R}}_i=\mathrm{diag}[\boldsymbol{R}_i,\ 3\boldsymbol{R}_i,\ 5\boldsymbol{R}_i]$, i=1, 2;

$\boldsymbol{\psi}_1=\boldsymbol{\varphi}_3h^3+\boldsymbol{\varphi}_2h^2+\boldsymbol{\varphi}_1h+\boldsymbol{\varphi}_0$;

$\boldsymbol{\psi}_2=\boldsymbol{\varphi}_3h^3+\boldsymbol{\varphi}_1h+\boldsymbol{\varphi}_0$;

$\boldsymbol{\psi}_3=\boldsymbol{\varphi}_2h^2+\boldsymbol{\varphi}_1h+\boldsymbol{\varphi}_0$;

$\boldsymbol{\psi}_4=\boldsymbol{\varphi}_2h^2+\boldsymbol{\varphi}_1h+\boldsymbol{\varphi}_0+2\boldsymbol{\varphi}_3(h^3-h^4)-\boldsymbol{\varphi}_2h^3$。

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varphi}_0(\dot{\tau}(t))=\mathrm{Sym}\big(&\boldsymbol{D}_5^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}_1\boldsymbol{C}_{70}+\boldsymbol{D}_6^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}_2\boldsymbol{C}_{80}+\boldsymbol{D}_{00}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{C}_{10}+\boldsymbol{C}_{50}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{D}_3+\\ &\boldsymbol{N}_1\boldsymbol{M}_1+\boldsymbol{N}_2\boldsymbol{M}_2+h\boldsymbol{H}_2\boldsymbol{e}_7+h\boldsymbol{H}_4\boldsymbol{e}_9-\boldsymbol{H}_1\boldsymbol{e}_{10}-\boldsymbol{H}_2\boldsymbol{e}_{11}-\\ &\boldsymbol{H}_3\boldsymbol{e}_{12}-\boldsymbol{H}_4\boldsymbol{e}_{13}+\big(\boldsymbol{C}_{60}+h\boldsymbol{C}_{61}+h^2\boldsymbol{C}_{62}\big)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{D}_4\big)+\\ &\boldsymbol{C}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{C}_3-\boldsymbol{C}_{41}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{C}_{41}-(1-\dot{\tau}(t))\boldsymbol{C}_{21}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Q}_1-\boldsymbol{Q}_2)\boldsymbol{C}_{21}+\\ &h\boldsymbol{e}_{s1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{e}_{s1}+h(1-\dot{\tau}(t))\boldsymbol{e}_4^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{R}_1-\boldsymbol{R}_2)\boldsymbol{e}_4+\\ &\dot{\tau}(t)\big(\boldsymbol{D}_5^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}_1\boldsymbol{D}_5-\boldsymbol{D}_6^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}_2\boldsymbol{D}_6\big);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varphi}_1(\dot{\tau}(t))=\mathrm{Sym}\big(&\boldsymbol{D}_{01}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{C}_{10}+\boldsymbol{D}_{00}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{C}_{11}+\boldsymbol{C}_{51}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{D}_3+\boldsymbol{D}_5^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}_1\boldsymbol{C}_{71}-\\ &(1-\dot{\tau}(t))\boldsymbol{C}_{21}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{C}_{22}-\boldsymbol{D}_6^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}_2\boldsymbol{C}_{81}-\boldsymbol{C}_{41}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{C}_{42}+\boldsymbol{H}_1\boldsymbol{e}_6-\\ &\boldsymbol{H}_2\boldsymbol{e}_7+\boldsymbol{H}_3\boldsymbol{e}_8-\boldsymbol{H}_4\boldsymbol{e}_9-\big(\boldsymbol{C}_{61}+2h\boldsymbol{C}_{62}\big)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{D}_4\big)-\\ &(1-\dot{\tau}(t))\boldsymbol{e}_4^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{R}_1-\boldsymbol{R}_2)\boldsymbol{e}_4;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varphi}_2(\dot{\tau}(t))=\mathrm{Sym}\big(&\boldsymbol{D}_{01}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{C}_{11}+\boldsymbol{D}_{02}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{C}_{10}+\boldsymbol{C}_{52}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{D}_3+\boldsymbol{C}_{62}{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{D}_4\big)-\\ &(1-\dot{\tau}(t))\boldsymbol{C}_{22}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{C}_{22}-\boldsymbol{C}_{42}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{C}_{42};\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{\varphi}_3=\mathrm{Sym}\big(\boldsymbol{D}_{02}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{C}_{11}\big);$$

其中，

$\boldsymbol{M}_1=\mathrm{col}[\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2-2\boldsymbol{e}_6,\ \boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2+6\boldsymbol{e}_6-12\boldsymbol{e}_8]$,

$\boldsymbol{M}_2=\mathrm{col}[\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_3,\ \boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3-2\boldsymbol{e}_7,\ \boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_3+6\boldsymbol{e}_7-12\boldsymbol{e}_9]$,

$\boldsymbol{D}_{00}=\mathrm{col}[\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_{14},\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3,0,h\boldsymbol{e}_7,0,h^2\boldsymbol{e}_9]$,

$\boldsymbol{D}_{01}=\mathrm{col}[0,\ 0,\ 0,\ 0,\ \boldsymbol{e}_6,\ -\boldsymbol{e}_7,\ 0,\ -2h\boldsymbol{e}_9]$,

$\boldsymbol{D}_{02}=\mathrm{col}[0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ \boldsymbol{e}_8,\ \boldsymbol{e}_9]$,

$\boldsymbol{C}_{10}=\mathrm{col}[\boldsymbol{e}_{s1},\ \boldsymbol{e}_{s2},\ (1-\dot{\tau}(t))\boldsymbol{e}_4,\ \boldsymbol{e}_5,\ \boldsymbol{e}_1-(1-\dot{\tau}(t))\boldsymbol{e}_2,$
$(1-\dot{\tau}(t))\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_3,\ 0,\ (h-h\dot{\tau}(t))\boldsymbol{e}_2-h\boldsymbol{e}_7]$,

$\boldsymbol{C}_{11}=\mathrm{col}[0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ \boldsymbol{e}_1-(1-\dot{\tau}(t))\boldsymbol{e}_6,(\dot{\tau}(t)-1)\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_7]$,

$\boldsymbol{C}_{21}=\mathrm{col}[\boldsymbol{e}_4,\ \boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_3,\ 0]$, $\boldsymbol{C}_{22}=\mathrm{col}[0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ \boldsymbol{e}_6]$,

$\boldsymbol{C}_3=\mathrm{col}[\boldsymbol{e}_{s1},\ \boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_3,\ 0]$,

$\boldsymbol{C}_{41}=\mathrm{col}[\boldsymbol{e}_5, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, h\boldsymbol{e}_7]$, $\boldsymbol{C}_{42}=\mathrm{col}[0, 0, 0, 0, 0, -\boldsymbol{e}_7]$,
$\boldsymbol{C}_{50}=\mathrm{col}[\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2, 0, 0, 0, 0, 0]$,
$\boldsymbol{C}_{51}=\mathrm{col}[0, \boldsymbol{e}_6, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, 0]$, $\boldsymbol{C}_{52}=\mathrm{col}[0, 0, 0, 0, 0, \boldsymbol{e}_8]$,
$\boldsymbol{C}_{60}=\mathrm{col}[\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_3, 0, 0, 0, 0, 0]$, $\boldsymbol{C}_{61}=\mathrm{col}[0, \boldsymbol{e}_7, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, 0]$,
$\boldsymbol{C}_{62}=\mathrm{col}[0, 0, 0, 0, 0, \boldsymbol{e}_9]$,
$\boldsymbol{C}_{70}=\mathrm{col}[0, 0, \boldsymbol{e}_1-(1-\dot{\tau}(t))\boldsymbol{e}_2-\dot{\tau}(t)\boldsymbol{e}_6,$
$\boldsymbol{e}_1-(1-\dot{\tau}(t))\boldsymbol{e}_6-2\dot{\tau}(t)\boldsymbol{e}_8, 0, 0, 0]$,
$\boldsymbol{C}_{71}=\mathrm{col}[\boldsymbol{e}_{s1}, (1-\dot{\tau}(t))\boldsymbol{e}_4, 0, 0, \boldsymbol{e}_1-(1-\dot{\tau}(t))\boldsymbol{e}_2,$
$(1-\dot{\tau}(t))\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_1-(1-\dot{\tau}(t))\boldsymbol{e}_6-\dot{\tau}(t)\boldsymbol{e}_8]$,
$\boldsymbol{C}_{80}=\mathrm{col}[\boldsymbol{e}_{s1}, h(1-\dot{\tau}(t))\boldsymbol{e}_4, (1-\dot{\tau}(t))\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_3+\dot{\tau}(t)\boldsymbol{e}_7,$
$(1-\dot{\tau}(t))\boldsymbol{e}_2-e_7+2\dot{\tau}(t)\boldsymbol{e}_9, h(\boldsymbol{e}_1-(1-\dot{\tau}(t))\boldsymbol{e}_2),$
$h((1-\dot{\tau}(t))\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_3), h((1-\dot{\tau}(t))\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_7+\dot{\tau}(t)\boldsymbol{e}_9)]$,
$\boldsymbol{C}_{81}=\mathrm{col}[\boldsymbol{e}_{s1}, (1-\dot{\tau}(t))\boldsymbol{e}_4, 0, 0, \boldsymbol{e}_1-(1-\dot{\tau}(t))\boldsymbol{e}_2,$
$(1-\dot{\tau}(t))\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_7+\dot{\tau}(t)\boldsymbol{e}_9]$;
$\boldsymbol{D}_1=\mathrm{col}[0, 0, \boldsymbol{e}_6, -\boldsymbol{e}_7]$
$\boldsymbol{D}_3=\mathrm{col}[0, 0, \boldsymbol{e}_{s1}, (1-\dot{\tau}(t))\boldsymbol{e}_4, \boldsymbol{e}_5, \boldsymbol{e}_1]$,
$\boldsymbol{D}_4=\mathrm{col}[0, 0, \boldsymbol{e}_{s1}, (1-\dot{\tau}(t))\boldsymbol{e}_4, \boldsymbol{e}_5, (1-\dot{\tau}(t))\boldsymbol{e}_2]$,
$\boldsymbol{D}_5=\mathrm{col}[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_6, \boldsymbol{e}_8, \boldsymbol{e}_{10}, \boldsymbol{e}_{11}, \boldsymbol{e}_{12}]$,
$\boldsymbol{D}_6=\mathrm{col}[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_7, \boldsymbol{e}_9, \boldsymbol{e}_{10}, \boldsymbol{e}_{11}, \boldsymbol{e}_{13}]$,
$\boldsymbol{e}_{s1}=\boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{e}_{14}$, $\boldsymbol{e}_{s2}=\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{e}_{14}+\boldsymbol{A}_{\mathrm{d}}\boldsymbol{e}_2$,
$\boldsymbol{e}_i=[\boldsymbol{0}_{2\times2(i-1)}, \boldsymbol{I}_{2\times2}, \boldsymbol{0}_{2\times2(13-i)}, \boldsymbol{0}_{2\times5}]$, $i=1, 2, \cdots, 13$,
$\boldsymbol{e}_{14}=[\boldsymbol{0}_{5\times26}, \boldsymbol{I}_{5\times5}]$。

证明 选择如下泛函

$$\boldsymbol{V}(t)=\boldsymbol{V}_1(t)+\boldsymbol{V}_2(t),$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{V}_1(t)=&\boldsymbol{\eta}_1^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}\boldsymbol{\eta}_1(t)+\int_{t-\tau(t)}^{t}\boldsymbol{\eta}_2^{\mathrm{T}}(t,s)\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{\eta}_2(t,s)\mathrm{d}s+\\&\int_{t-h}^{t-\tau(t)}\boldsymbol{\eta}_3^{\mathrm{T}}(t,s)\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{\eta}_3(t,s)\mathrm{d}s+\\&\int_{t-h}^{t-\tau(t)}(h-t+s)\dot{\boldsymbol{x}}_1^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{R}_1\dot{\boldsymbol{x}}_1(s)\mathrm{d}s+\\&\int_{t-\tau(t)}^{t}(h-t+s)\dot{\boldsymbol{x}}_1^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{R}_2\dot{\boldsymbol{x}}_1(s)\mathrm{d}s。\end{aligned}\tag{15}$$

$$\boldsymbol{V}_2(t)=\tau(t)\boldsymbol{\eta}_4^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{Y}_1\boldsymbol{\eta}_4(t)+(h-\tau(t))\boldsymbol{\eta}_5^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{Y}_2\boldsymbol{\eta}_5(t)。\tag{16}$$

对泛函求导可得$\dot{\boldsymbol{V}}(t)=\dot{\boldsymbol{V}}_1(t)+\dot{\boldsymbol{V}}_2(t)$，其中，

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{V}}_1(t)=&2\boldsymbol{\eta}_1^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}\dot{\boldsymbol{\eta}}_1(t)+\boldsymbol{\eta}_2^{\mathrm{T}}(t,t)\boldsymbol{Q}_1\dot{\boldsymbol{\eta}}_2(t,t)+\\&2\int_{t-\tau(t)}^{t}\boldsymbol{\eta}_2^{\mathrm{T}}(t,s)\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{\eta}_2(t,s)\mathrm{d}s-\\&(1-\dot{\tau}(t))\boldsymbol{\eta}_2^{\mathrm{T}}(t,t-\tau(t))\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{\eta}_2(t,t-\tau(t))+\\&2\int_{t-h}^{t-\tau(t)}\boldsymbol{\eta}_3^{\mathrm{T}}(t,s)\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{\eta}_3(t,s)\mathrm{d}s+\\&(1-\dot{\tau}(t))\boldsymbol{\eta}_3^{\mathrm{T}}(t,t-\tau(t))\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{\eta}_3(t,t-\tau(t))-\\&\boldsymbol{\eta}_3^{\mathrm{T}}(t,t-h)\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{\eta}_3(t,t-h)+h\dot{\boldsymbol{x}}_1^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{R}_2\dot{\boldsymbol{x}}_1(t)+\\&(1-\dot{\tau}(t))(h-\tau(t))\dot{\boldsymbol{x}}_1^{\mathrm{T}}(t-\tau(t))(\boldsymbol{R}_1-\boldsymbol{R}_2)\times\\&\dot{\boldsymbol{x}}_1(t-\tau(t))-\int_{t-h}^{t-\tau(t)}\dot{\boldsymbol{x}}_1^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{R}_1\dot{\boldsymbol{x}}_1(s)\mathrm{d}s-\\&\int_{t-\tau(t)}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}_1^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{R}_2\dot{\boldsymbol{x}}_1(s)\mathrm{d}s。\end{aligned}\tag{17}$$

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{V}}_2(t)=&\dot{\tau}(t)\boldsymbol{\eta}_4^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{Y}_1\boldsymbol{\eta}_4(t)+2\tau(t)\boldsymbol{\eta}_4^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{Y}_1\dot{\boldsymbol{\eta}}_4(t)-\\&\dot{\tau}(t)\boldsymbol{\eta}_5^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{Y}_2\boldsymbol{\eta}_5(t)+2(h-\tau(t))\boldsymbol{\eta}_5^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{Y}_2\dot{\boldsymbol{\eta}}_5(t)。\end{aligned}\tag{18}$$

使用文献 [23] 中引理 3 处理泛函导数中的积分项，可得：

$$\begin{aligned}&-\int_{t-h}^{t-\tau(t)}\dot{\boldsymbol{x}}_1^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{R}_1\dot{\boldsymbol{x}}_1(s)\mathrm{d}s-\int_{t-\tau(t)}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}_1^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{R}_2\dot{\boldsymbol{x}}_1(s)\mathrm{d}s\leqslant\\&\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}(t)\big(\mathrm{Sym}(\boldsymbol{N}_{11}\boldsymbol{M}_1+\boldsymbol{N}_{12}\boldsymbol{M}_2)+\tau(t)\boldsymbol{N}_{11}\tilde{\boldsymbol{R}}_2^{-1}\boldsymbol{N}_{11}^{\mathrm{T}}+\\&(h-\tau(t))\boldsymbol{N}_{12}\tilde{\boldsymbol{R}}_1^{-1}\mathbf{N}_{12}^{\mathrm{T}}\big)\boldsymbol{\eta}(t)。\end{aligned}\tag{19}$$

式中（15）~（19）：

$$\boldsymbol{\zeta}(t, s)=\mathrm{col}\big[\dot{\boldsymbol{x}}_1(s), \boldsymbol{x}_1(s), \boldsymbol{x}_1(t), \boldsymbol{x}_1(t-\tau(t)), \boldsymbol{x}_1(t-h)\big];$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\eta}_1(t)=\mathrm{col}\Big[&\boldsymbol{x}_1(t), \boldsymbol{x}_2(t), \boldsymbol{x}_1(t-\tau(t)), \boldsymbol{x}_1(t-h), \int_{t-\tau(t)}^{t}\boldsymbol{x}_1(s)\mathrm{d}s,\\&\int_{t-h}^{t-\tau(t)}\boldsymbol{x}_1(s)\mathrm{d}s, \int_{t-\tau(t)}^{t}\int_{\theta}^{t}\boldsymbol{x}_1(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta, \int_{t-h}^{t-\tau(t)}\int_{\theta}^{t-\tau(t)}\boldsymbol{x}_1(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta\Big],\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{\eta}_2(t, s)=\mathrm{col}\Big[\boldsymbol{\zeta}(t, s), \int_{s}^{t}\boldsymbol{x}_1(\theta)\mathrm{d}\theta\Big],$$

$$\boldsymbol{\eta}_3(t, s)=\mathrm{col}\Big[\boldsymbol{\zeta}(t, s), \int_{s}^{t-\tau(t)}\boldsymbol{x}_1(\theta)\mathrm{d}\theta\Big],$$

$$\boldsymbol{\eta}_4(t)=\mathrm{col}\big[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_6, \boldsymbol{e}_8, \boldsymbol{e}_{10}, \boldsymbol{e}_{11}, \boldsymbol{e}_{12}\big]\boldsymbol{\eta}(t),$$

$$\boldsymbol{\eta}_5(t)=\mathrm{col}\big[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_7, \boldsymbol{e}_9, \boldsymbol{e}_{10}, \boldsymbol{e}_{11}, \boldsymbol{e}_{13}\big]\boldsymbol{\eta}(t);$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\eta}(t)=\mathrm{col}\Big[&\boldsymbol{x}_1(t), \boldsymbol{x}_1(t-\tau(t)), \boldsymbol{x}_1(t-h), \dot{\boldsymbol{x}}_1(t-\tau(t)), \dot{\boldsymbol{x}}_1(t-h),\\&\frac{1}{\tau(t)}\int_{t-\tau(t)}^{t}\boldsymbol{x}_1(s)\mathrm{d}s\ \ \frac{1}{h-\tau(t)}\int_{t-h}^{t-\tau(t)}\boldsymbol{x}_1(s)\mathrm{d}s,\\&\frac{1}{\tau^2(t)}\int_{t-\tau(t)}^{t}\int_{\theta}^{t}\boldsymbol{x}_1(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta, \frac{1}{(h-\tau(t))^2}\int_{t-h}^{t-\tau(t)}\int_{\theta}^{t-\tau(t)}\boldsymbol{x}_1(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta,\\&\int_{t-\tau(t)}^{t}\boldsymbol{x}_1(s)\mathrm{d}s\ \int_{t-h}^{t-\tau(t)}\boldsymbol{x}_1(s)\mathrm{d}s, \frac{1}{\tau(t)}\int_{t-\tau(t)}^{t}\int_{\theta}^{t}\boldsymbol{x}_1(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta,\\&\frac{1}{h-\tau(t)}\int_{t-h}^{t-\tau(t)}\int_{\theta}^{t-\tau(t)}\boldsymbol{x}_1(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta, \boldsymbol{x}_2(t)\Big]。\end{aligned}$$

将以下零等式加入$\dot{\boldsymbol{V}}(t)$中，

$2\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{H}_1\big(\tau(t)\boldsymbol{e}_6-\boldsymbol{e}_{10}\big)\boldsymbol{\eta}(t)=\boldsymbol{0}$；

$2\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{H}_2\big((h-\tau(t))\boldsymbol{e}_7-\boldsymbol{e}_{11}\big)\boldsymbol{\eta}(t)=\boldsymbol{0}$；

$2\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{H}_3\big(\tau(t)\boldsymbol{e}_8-\boldsymbol{e}_{12}\big)\boldsymbol{\eta}(t)=\boldsymbol{0}$；

$2\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{H}_4\big((h-\tau(t))\boldsymbol{e}_9-\boldsymbol{e}_{13}\big)\boldsymbol{\eta}(t)=\boldsymbol{0}$。

整理可得：

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{V}}(t)\leqslant&\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}(t)\Big[\tau^3(t)\boldsymbol{\varphi}_3+\tau^2(t)\boldsymbol{\varphi}_2\big(\dot{\tau}(t)\big)+\\&\tau(t)\boldsymbol{\psi}_1\big(\dot{\tau}(t)\big)+\boldsymbol{\psi}_0\big(\dot{\tau}(t)\big)\Big]\boldsymbol{\eta}(t)。\end{aligned}\tag{20}$$

式中：

$$\boldsymbol{\psi}_1(\dot{\tau}(t))=\boldsymbol{\varphi}_1-\boldsymbol{N}_{12}\tilde{\boldsymbol{R}}_1^{-1}\boldsymbol{N}_{12}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{N}_{11}\tilde{\boldsymbol{R}}_2^{-1}\boldsymbol{N}_{11}^{\mathrm{T}};$$

$$\boldsymbol{\psi}_0(\dot{\tau}(t))=\boldsymbol{\varphi}_0+h\boldsymbol{N}_{12}\tilde{\boldsymbol{R}}_1^{-1}\boldsymbol{N}_{12}^{\mathrm{T}}。$$

由引理 1 和 schur 补可得，若式（20）成立，则有$\dot{V}(t)<0$，系统渐近稳定。证明完毕。

注 1　本文在泛函的构造中加入了双重积分项，在降低系统的保守性上起到了一定的作用。由于双重积分项的加入，得到的 LKF 导数具有三次函数的形式，需要使用引理 1 对其进行处理。

注 2　本文在处理泛函导数的积分项时采用广义自由权矩阵积分不等式方法，可以避免逆凸问题的产生，进而减小所得判据的保守性，此外，在定理 1 的推导中考虑了$\dot{x}(t-h)$项，经过验证，此项的加入可以降低所得判据的保守性。

4　仿真实验

仿真实验的系统参数如表 1 所示。

表 1　系统仿真参数

Table 1　System simulation parameters

参数	取值	参数	取值
T_G	0.3	R	2.4
T_T	0.08	K_{ev}	1
T_{ev}	0.1	K_b	−0.1
T_b	0.1	K_F	−0.1
T_F	0.1	α_0	0.5
D	1/120	α_1	0.5
M	1/6		

4.1　混合储能环节效果分析

为验证此环节对系统调频的影响，将系统时滞设为定长时滞 τ=4 s（μ=0），PI 控制器增益均为 0.2，可得到系统施加连续阶跃扰动后的系统频率变化曲线（图 3），虽然恢复频率稳定的时间大致相同，但由频率变化曲线可知储能部分在参与系统调频时可使系统具有良好的调频性能。

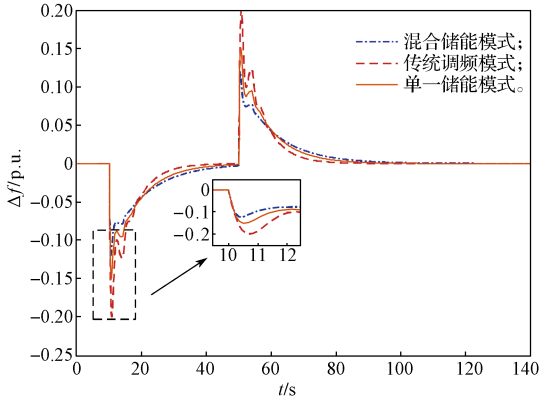

图 3　不同模式下系统频率响应曲线

Fig. 3　System frequency response curves under different modes

此外，由图 3 所示仿真结果对比分析可知，在有储能系统的辅助下，系统调频性能会得到提升。其中混合储能模式的最大频率偏差值相比于单一储能模式的最大频率偏差值缩小了近 1/2，大大减小了频率恢复时间，体现了其调频优势。

4.2　稳定性分析

在 Matlab 软件中仿真，分析不同时滞情况和不同 PI 取值对 LFC 系统稳定性间的联系，仿真结果见表 2 与表 4，其分别为 μ=0 和 μ=0.5 时的实验结果，并与根据文献 [20] 所给出的方法计算得到的结果进行对比（表 3 和 5），通过分析仿真结果可知，本文所提判据的保守性更低。

表 2　本文定理 1 求得系统 MDSM（μ=0）

Table 2　System MDSM obtained by Theorem 1（μ=0）

K_P	K_I				
	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
0.2	17.85	8.82	5.81	4.30	3.39
0.4	18.61	9.20	6.06	4.49	3.54
0.6	19.18	9.48	6.25	4.63	3.66
0.8	19.53	9.66	6.37	4.72	3.73
1.0	19.63	9.71	6.40	4.74	3.74

表 3　文献 [20] 方法求得系统 MDSM（μ=0）

Table 3　System MDSM obtained by the method in literature [20]（μ=0）

K_P	K_I				
	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
0.2	15.10	7.78	5.26	3.92	3.10
0.4	14.09	7.29	5.03	3.87	3.14
0.6	12.96	6.73	4.67	3.62	2.98
0.8	11.71	6.11	4.26	3.32	2.74
1.0	10.36	5.45	3.81	2.98	2.47

表 4　本文定理 1 求得系统 MDSM（μ=0.5）

Table 4　System MDSM obtained by Theorem 1（μ=0.5）

K_P	K_I				
	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
0.2	17.16	8.48	5.58	4.13	3.26
0.4	17.86	8.83	5.81	4.30	3.40
0.6	18.31	9.05	5.96	4.42	3.48
0.8	18.46	9.12	6.01	4.45	3.51
1.0	18.22	9.00	5.92	4.38	3.45

表 5　文献 [20] 方法求得系统 MDSM（μ=0.5）

Table 5　System MDSM obtained by the method in literature [20]（μ=0.5）

K_P	K_I				
	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
0.2	17.16	8.48	5.58	4.13	3.26
0.4	17.86	8.83	5.81	4.30	3.40
0.6	18.31	9.05	5.96	4.42	3.48
0.8	18.46	9.12	6.01	4.45	3.51
1.0	18.22	9.00	5.92	4.38	3.45

为验证定理 1 求得系统 MDSM 接近系统真实值，给出了如图 4 所示的不同定长时滞下（μ=0，K_P=0.4，K_I=0.4）的系统仿真图。在图 4 中，τ=9.13 s 时的频率响应曲线会逐渐收敛至 0，τ=9.25 s 时的频率响应曲线逐渐发散，由此可见，系统 MDSM 经定理 1 计算后接近真实值，由此证明了本文所提方法相对具有优越性。

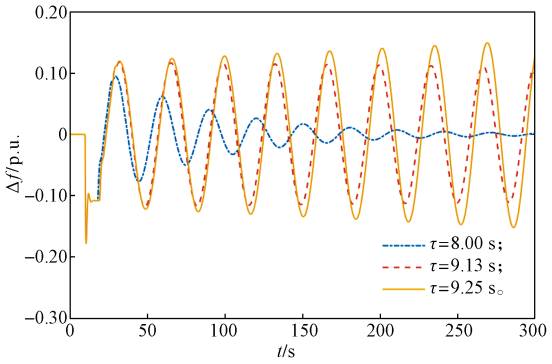

图 4 不同定长时滞下系统频率响应曲线

Fig. 4 System frequency response curves under different fixed time delays

5 结语

本文主要研究了混合储能系统辅助含电动汽车的 LFC 系统时滞相关稳定性问题。其中，混合储能系统由储能电源与飞轮储能共同构成。首先，利用模型重构技术将系统时滞相关状态变量和时滞无关状态变量分离，可以降低计算的复杂度。然后，构造合适的泛函以及运用三次函数不等式引理得到了时滞相关稳定判据。最后，通过仿真验证了混合储能系统在调频中的作用以及本文所提稳定判据的有效性。

参考文献：

[1] 舒印彪，陈国平，贺静波，等 . 构建以新能源为主体的新型电力系统框架研究 [J]. 中国工程科学，2021，23(6)：61−69.
SHU Yinbiao，CHEN Guoping，HE Jingbo，et al. Building a New Electric Power System Based on New Energy Sources[J]. Strategic Study of CAE，2021，23(6)：61−69.

[2] 谢小荣，贺静波，毛航银，等 . “双高”电力系统稳定性的新问题及分类探讨 [J]. 中国电机工程学报，2021，41(2)：461−475.
XIE Xiaorong，HE Jingbo，MAO Hangyin，et al. New Issues and Classification of Power System Stability with High Shares of Renewables and Power Electronics[J]. Proceedings of the CSEE，2021，41(2)：461−475.

[3] 张子扬，张 宁，杜尔顺，等 . 双高电力系统频率安全问题评述及其应对措施 [J]. 中国电机工程学报，2022，42(1)：1−25.
ZHANG Ziyang，ZHANG Ning，DU Ershun，et al. Review and Countermeasures on Frequency Security Issues of Power Systems with High Shares of Renewables and Power Electronics[J]. Proceedings of the CSEE，2022，42(1)：1−25.

[4] KHEAWCUM M，SANGWONGWANICH S. A Case Study on Flywheel Energy Storage System Application for Frequency Regulation of Islanded Amphoe Mueang Mae Hong Son Microgrid[C]//2020 17th International Conference on Electrical Engineering/Electronics，Computer，Telecommunications and Information Technology (ECTI-CON). Phuket：IEEE，2020：1−4.

[5] 颜湘武，崔 森，宋子君，等 . 基于超级电容储能控制的双馈风电机组惯量与一次调频策略 [J]. 电力系统自动化，2020，44(14)：111−120.
YAN Xiangwu，CUI Sen，SONG Zijun，et al. Inertia and Primary Frequency Regulation Strategy of Doubly-Fed Wind Turbine Based on Super-Capacitor Energy Storage Control[J]. Automation of Electric Power Systems，2020，44(14)：111−120.

[6] 秦 昊，秦立军，白雪辰，等 . 辅助抽水蓄能调频的飞轮控制策略 [J]. 储能科学与技术，2022，11(12)：3915−3925.
QIN Hao，QIN Lijun，BAI Xuechen，et al. A Control Strategy of Flywheel Energy Storage System Participating Frequency Regulation with Pumped Storage[J]. Energy Storage Science and Technology，2022，11(12)：3915−3925.

[7] 张继慧 . 电池储能参与电力系统调峰调频的联合优化策略研究 [D]. 南京：东南大学，2020.
ZHANG Jihui. Research on Joint Optimization Strategy of Battery Energy Storage Participating in Peak Regulation and Frequency Modulation of Power System[D]. Nanjing：Southeast University，2020.

[8] 刘可真，刘 果，陆永林，等 . 含混合储能辅助的电网负荷频率联合控制 [J]. 电力科学与工程，2022，38(6)：35−44.
LIU Kezhen，LIU Guo，LU Yonglin，et al. Combined Control of Power Grid Load Frequency with Hybrid Energy Storage Auxiliary[J]. Electric Power Science and Engineering，2022，38(6)：35−44.

[9] 陈 刚，王 震，刘旭阳，等 . 基于二次函数负定判据的 LFC 系统稳定性分析 [J]. 湖南工业大学学报，2024，38(4)：27−33.
CHEN Gang，WANG Zhen，LIU Xuyang，et al. Stability Analysis of LFC System Based on Quadratic Function Negative Definite Criterion[J]. Journal of Hunan University of Technology，2024，38(4)：27−33.

[10] 王玉雯，曾红兵，付国龙 . 考虑传输时滞的电力负荷频率采样控制系统稳定性分析 [J]. 湖南工业大学学报，2024，38(5)：26−32.
WANG Yuwen，ZENG Hongbing，FU Guolong. Stability Analysis of Power Load Frequency Sampling Control System Considering Transmission Delay[J]. Journal of Hunan University of Technology，2024，38(5)：26−32.

[11] ZENG H B，ZHOU S J，ZHANG X M，et al. Delay-Dependent Stability Analysis of Load Frequency Control Systems with Electric Vehicles[J]. IEEE Transactions on Cybernetics，2022，52(12)：13645−13653.

[12] ZHOU S J，ZENG H B，XIAO H Q. Load Frequency Stability Analysis of Time-Delayed Multi-Area Power Systems with EV Aggregators Based on Bessel-Legendre Inequality and Model Reconstruction Technique[J]. IEEE Access，2020，8：99948−99955.

[13] YANG F S，HE J，WANG J，et al. Auxiliary-Function-Based Double Integral Inequality Approach to Stability Analysis of Load Frequency Control Systems with Interval Time-Varying Delay[J]. IET Control Theory & Applications，2018，12(5)：601−612.

[14] YANG F S，HE J，PAN Q. Further Improvement on Delay-Dependent Load Frequency Control of Power Systems via Truncated B-L Inequality[J]. IEEE Transactions on Power Systems，2018，33(5)：5062−5071.

[15] JIN L，ZHANG C K，HE Y，et al. Delay-Dependent Stability Analysis of Multi-Area Load Frequency Control with Enhanced Accuracy and Computation Efficiency[J]. IEEE Transactions on Power Systems，2019，34(5)：3687−3696.

[16] PENG C，ZHANG J. Delay-Distribution-Dependent Load Frequency Control of Power Systems with Probabilistic Interval Delays[J]. IEEE Transactions on Power Systems，2016，31(4)：3309−3317.

[17] PHAM T N，TRINH H，OO A M T. Distributed Control of HVDC Links for Primary Frequency Control of Time-Delay Power Systems[J]. IEEE Transactions on Power Systems，2019，34(2)：1301−1314.

[18] 周沙鋆 . 计及电动汽车并网的负荷频率控制系统时滞相关稳定性分析 [D]. 株洲：湖南工业大学，2021.
ZHOU Shajun. Delay-Dependent Stability Analysis of Load Frequency Control System Considering Grid Connection of Electric Vehicles[D]. Zhuzhou：Hunan University of Technology，2021.

[19] 封昭准，陈　刚 . 基于三次函数不等式的时滞系统稳定性分析 [J]. 控制工程，2023，30(7)：1242−1247.
FENG Zhaozhun，CHEN Gang. Stability Analysis of Time-Delay System Based on Cubic Function Inequality[J]. Control Engineering of China，2023，30(7)：1242−1247.

[20] KO K S，SUNG D K. The Effect of EV Aggregators with Time-Varying Delays on the Stability of a Load Frequency Control System[J]. IEEE Transactions on Power Systems，2018，33(1)：669−680.

[21] KOTTICK D，BLAU M，EDELSTEIN D. Battery Energy Storage for Frequency Regulation in an Island Power System[J]. IEEE Transactions on Energy Conversion，1993，8(3)：455−459.

[22] ZHANG C K，JIANG L，WU Q H，et al. Further Results on Delay-Dependent Stability of Multi-Area Load Frequency Control[J]. IEEE Transactions on Power Systems，2013，28(4)：4465−4474.

[23] ZENG H B，LIU X G，WANG W. A Generalized Free-Matrix-Based Integral Inequality for Stability Analysis of Time-Varying Delay Systems[J]. Applied Mathematics and Computation，2019，354：1−8.

（责任编辑：申　剑）