DOI：10.20271/j.cnki.1673-9833.2026.4008

基于 ADM 的一类分数阶 Lorenz 混沌系统动力学分析

唐思佳，汤　琼，丁验蕙

（湖南工业大学 理学院，湖南 株洲 412007）

摘　要：通过引入忆阻器构建了一新四维分数阶混沌系统，该系统具有无限平衡点集，并基于 Adomian 分解法求得了系统的近似解。利用 Lyapunov 指数谱、分岔图分析，揭示了该系统在单参数变化下表现出稳定态、倍周期分岔及混沌态等行为。经 Lyapunov 指数分布图、相图和时间序列图分析发现，双参数下该系统存在两个双涡卷混沌吸引子、周期 1 态及周期 2 态吸引子。谱熵 SE 和 C_0 复杂度表明，参数 b 对分数阶 Lorenz 忆阻系统复杂度的影响更加显著。

关键词：Adomian 分解法；分数阶混沌电路；忆阻器；复杂度

中图分类号：O415.5　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673-9833(2026)04-0054-09

引文格式：唐思佳，汤　琼，丁验蕙 . 基于 ADM 的一类分数阶 Lorenz 混沌系统动力学分析 [J]. 湖南工业大学学报，2026，40(4)：54-62.

ADM-Based Dynamics Analysis of a Class of Fractional-Order Lorenz Chaotic Systems

TANG Sijia，TANG Qiong，DING Yanhui

（College of Science，Hunan University of Technology，Zhuzhou Hunan 412007，China）

Abstract：A novel four-dimensional fractional-order chaotic system, which possesses an infinite set of equilibrium points, has been constructed by introducing memristors, with the approximate solution of the system to be obtained based on the Adomian Decomposition Method (ADM). Through Lyapunov exponent spectrum and bifurcation diagram analyses, it is demonstrated that the system exhibits such dynamical behaviors as stable state, period doubling bifurcation, and chaotic state under single parameter variation. An analysis of the Lyapunov exponent distribution diagram, phase diagram, and time series diagram manifests double-vortex scroll chaotic attractors, as well as period-1, and period-2 attractors, under dual parameters in the system. Both Spectral Entropy (SE) and C_0 complexity analyses confirm that parameter b exerts a more significant influence on the complexity of the fractional-order Lorenz memristive system.

Keywords：Adomian decomposition method；fractional order chaotic circuit；memristor；complexity

收稿日期：2025-05-22

基金项目：湖南省自然科学基金资助项目（2023JJ50164）

作者简介：唐思佳，女，湖南工业大学硕士生，主要研究方向为微分方程与动力系统，E-mail：1492060267@qq.com

通信作者：汤　琼，女，湖南工业大学教授，博士，主要研究方向为微分方程与动力系统，E-mail：zzgxysx@163.com

1　研究背景

自 20 世纪 60 年代以来，分数阶微积分逐渐成为国际学术界关注的研究热点之一。在混沌系统动力学研究领域，分数阶微积分理论被广泛引入，国内外学者相继证明了一些经典混沌系统的分数阶系统同样能展现混沌行为，如 Chen 系统、Lorenz 系统、Duffing 系统 [1−3]。这些研究结论促进了分数阶微积分的发展和混沌理论体系的进步。忆阻器作为一种具有非线性特性的电路元件，适合用于构建混沌电路。近年来，部分学者通过在经典混沌系统中引入忆阻器或替代原有非线性元件，构造出了一系列具有丰富动力学行为的新型忆阻混沌系统 [4−6]。Wu P. 等 [7] 通过在 Lorenz 系统中引入一个二次忆阻器，构造了新的忆阻混沌系统。Wu H. 等 [8] 研究了一类以忆阻器作为反馈器的简化 Lorenz 混沌电路系统的特性。尽管分数阶混沌系统 [9−11] 已取得较多的研究成果，但关于分数阶忆阻混沌系统的相关文献仍较为有限。此外，目前针对同时以分数阶阶数 q 和系统参数作为双变量分析的文献仍较为少见。

在数值求解方面，因 Adomian Decomposition Method（ADM）的计算精度较高、收敛速度较快，故被广泛应用于分数阶混沌系统仿真与分析中 [12−13]。基于上述分析，本文提出了一种基于 Adomian 分解法的分数阶忆阻 Lorenz 系统，并重点研究了分数阶阶数 q、系统参数和系统复杂度（谱熵 SE 和相关复杂度 C_0）之间的关系。

2　基于忆阻器反馈的分数阶简化 Lorenz 系统

2.1　分数阶导数定义

定义 1　Riemann-Liouville 分数阶积分定义为

$$J_t^q f(t)=\frac{1}{\Gamma(q)}\int_{t_0}^{t}(t-\tau)^{q-1}f(\tau)\mathrm{d}\tau,$$

式中：J_t^q 为函数 $f(t)$ 的 q 阶积分算子，q 为阶次；$\Gamma(\cdot)$ 为 Gamma 函数；t_0 为微分算子的下界；t 为上界。

定义 2　分数阶 Caputo 微分定义为

$$D_t^q f(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma(n-q)}\displaystyle\int_{t_0}^{t}\frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{q+1-n}}\mathrm{d}\tau, & n-1<q<n;\\ f'(t), & q=1。\end{cases}$$

式中：D_t^q 为函数 $f(t)$ 的 q 阶 Caputo 微分算子；$f^{(n)}(\tau)$ 为 $f(t)$ 的 n 阶导数；$n\in N$。

当 $n-1<q<n$ 时，Caputo 分数阶导数 D_t^q 与分数阶积分 J_t^q 的关系为

$$D_t^q J_t^q f(t)=f(t),\quad J_t^q D_t^q f(t)=f(t)-f(0)。$$

在零初始条件下，Caputo 定义的分数阶导数和整数阶微分具有相同的形式，而且实验证明 Caputo 定义下的微积分物理意义更加明确。因此，本文的模型将采用分数阶 Caputo 微分定义的微分算子。

2.2　分数阶系统设计

文献 [14] 提出了一种磁控忆阻器，该忆阻器具有光滑连续非线性的特点。在这里定义流经忆阻器的电荷为 q，则有源磁控忆阻器可表示为

$$q(\varphi)=-a\varphi+0.5b\varphi^2\,\mathrm{sgn}(\varphi),$$

式中：a、b 为系统参数，且为不等于零的常数；φ 为流经忆阻器的电荷量。

根据忆阻器的忆导公式得

$$w(\varphi)=-a+b|\varphi|,$$

式中：$w(\varphi)$ 为忆阻器的忆导，即其电导值，是电荷量 φ 的函数。

通过简化，得到整数阶忆阻简化 Lorenz 电路 [15] 的无量纲方程为

$$\begin{cases}\dot{x}=35(y-x),\\ \dot{y}=(95-4c-ak)x-xz+cy+bkx|w|,\\ \dot{z}=xy-3z,\\ \dot{w}=x。\end{cases}\tag{1}$$

式中：x、y、z、w 为系统状态量；c 为系统参数；k 为与忆阻器有关的系数。

分数阶电路具有物理实现的简洁性和记忆特性，且可扩展参数调控维度，故很多系统为分数阶系统。根据文献 [11, 13]，对于每个状态变量 i（$i=x, y, z, w$），将整数阶导数 $\dot{i}$ 替换为分数阶导数 $D_{t_0}^q$。

对系统（1）中的第一个方程两边应用积分 J_t^q，可得

$$J_t^q\dot{x}(t)=35\left(J_t^q y(t)-J_t^q x(t)\right),$$

$$J_t^q\left(D_t^q x(t)\right)=35\left(J_t^q y(t)-J_t^q x(t)\right),$$

即

$$x(t)=35\left(J_t^q y(t)-J_t^q x(t)\right)。$$

对上式两边应用微分 D_t^q 得

$$D_t^q x(t)=35\left(D_t^q J_t^q y(t)-D_t^q J_t^q x(t)\right),$$

$$D_t^q x(t)=35\left(y(t)-x(t)\right)。$$

同理，可以推导出系统（1）其他方程的分数阶形式，最终得到如下分数阶系统（2）：

$$\begin{cases} D_{t_0}^q x = 35(y-x), \\ D_{t_0}^q y = (95-4c-ak)x - xz + cy + bkx|w|, \\ D_{t_0}^q z = xy - 3z, \\ D_{t_0}^q w = x。 \end{cases} \quad (2)$$

2.3 平衡点稳定性分析

为了研究分数阶忆阻器简化 Lorenz 电路的动力学行为，接下来对其系统稳定性进行分析。

定理 1 当$\Delta=\left(14|\alpha|/5+c^2-490c+12\,425\right)>0$，且 26.6<$c$<35 时，对于分数阶系统（2）的特征值 λ_i（i=1, 2, 3, 4），系统的平衡点 $\boldsymbol{E}$ 渐近稳定。

证明 令系统（2）的左边都为 0，可得平衡点集 $\boldsymbol{E}=\{(x, y, z, w)|x=y=z, w=\alpha\}$。其中，$\alpha$ 为任意实数，则该分数阶系统（2）具有无限的平衡点集。

计算系统（2）的 Jacobian 矩阵，为

$$\boldsymbol{J}_{\mathrm{E}}=\begin{bmatrix} -35 & 35 & 0 & 0 \\ 95-4c+0.02|\alpha| & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}。$$

通过对 $\boldsymbol{J}_{\mathrm{E}}$ 矩阵进一步处理，可得到其特征值 λ_i（i=1, 2, 3, 4）。其中：λ_1=−3，对应 arg(λ_1)= π；λ_2=0，对应 arg(λ_2) 可以任意取值；剩余的两个特征值分别如下：

$$\begin{cases} \lambda_3=\left(c-35-\sqrt{\dfrac{14|\alpha|}{5}+c^2-490c+12\,425}\right)\Big/2; \\ \lambda_4=\left(c-35+\sqrt{\dfrac{14|\alpha|}{5}+c^2-490c+12\,425}\right)\Big/2。 \end{cases}$$

λ_3、λ_4 与$\Delta=\left(\dfrac{14|\alpha|}{5}+c^2-490c+12\,425\right)$有关：

1）当 Δ>0 且 26.6<c<35 时，$c-35-\sqrt{\Delta}<0$ 显然成立。

2）对于$c-35-\sqrt{\Delta}<0$，有 Δ<(35−c)^2，$14|\alpha|/5+c^2-490c+12\,425<1\,225-70c+c^2$，整理后即$14|\alpha|/5-420c+11\,200<0$，故有$|\alpha|<150c-4\,000$，因而可以得出 26.6<$c$。

当 Δ>0 且 26.6<c<35 时，λ_3 和 λ_4 都为负实数，有$|\arg(\lambda_i)|=\pi\ (i=3,4)$，满足$|\arg(\lambda_i)|>\dfrac{\alpha\pi}{2}(i=1,2,3,4)$。根据分数阶系统稳定性判据 [16]，则有系统的平衡点 $\boldsymbol{E}$ 渐近稳定。

定理证毕。

2.4 分数阶系统求解

记 x_1=x、x_2=y、x_3=z、x_4=w，用 Adomian 分解法对系统中的线性项 $\boldsymbol{L}$ 和非线性项 $\boldsymbol{N}$ 进行分解，可得

$$\begin{bmatrix} L_{x_1} \\ L_{x_2} \\ L_{x_3} \\ L_{x_4} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 35(x_2-x_1) \\ (95-4c-ak)x_1+cx_2 \\ -3x_3 \\ x_1, \end{bmatrix},\begin{bmatrix} N_{x_1} \\ N_{x_2} \\ N_{x_3} \\ N_{x_4} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ -x_1x_3+bkx_1|x_4| \\ x_1x_2 \\ 0 \end{bmatrix}。$$

令 c_1^0=x_1^0、c_2^0=x_2^0、c_3^0=x_3^0、c_4^0=x_4^0，则根据 Adomian 分解法和分数阶微分性质可得

$$\begin{cases} x_1^1 = 35\left(c_2^0-c_1^0\right)\left[(t-t_0)^q/\left(\Gamma(q+1)\right)\right], \\ x_2^1 = \left[(95-4c-ak)c_1^0+cc_2^0-c_1^0c_3^0+0.02c_1^0|c_4^0|\right]\cdot \\ \qquad \left[(t-t_0)^q/\left(\Gamma(q+1)\right)\right], \\ x_3^1 = \left(-3c_3^0+c_1^0c_2^0\right)\left[(t-t_0)^q/\left(\Gamma(q+1)\right)\right], \\ x_4^1 = c_1^0\left[(t-t_0)^q/\left(\Gamma(q+1)\right)\right], \end{cases}$$

将系数赋值到对应变量，即有

$$\begin{cases} c_1^1 = 35\left(c_2^0-c_1^0\right), \\ c_2^1 = (95-4c-ak)c_1^0+cc_2^0-c_1^0c_3^0+bkc_1^0|c_4^0|, \\ c_3^1 = -3c_3^0+c_1^0c_2^0, \\ c_4^1 = c_1^0, \end{cases}$$

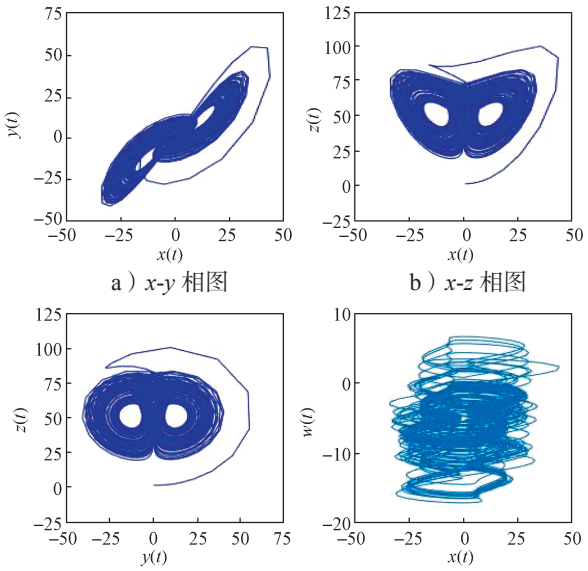
可见，只要求出每一项对应的系数即可。如第六项的系数如下：

$$\begin{cases} c_1^6 = 35\left(c_2^5-c_1^5\right), \\ c_2^6 = (95-4c-ak)c_1^5+cc_2^5-c_1^5c_3^0- \\ \qquad \left(c_1^4c_3^1+c_1^1c_3^4\right)\dfrac{\Gamma(5q+1)}{\Gamma(4q+1)\Gamma(q+1)}- \\ \qquad \left(c_1^3c_3^2+c_1^2c_3^3\right)\dfrac{\Gamma(5q+1)}{\Gamma(3q+1)\Gamma(2q+1)}-c_1^0c_3^5+ \\ \qquad bk\left[c_1^5|c_4^0|+\left(c_1^4|c_4^1|+c_1^1|c_4^4|\right)\dfrac{\Gamma(5q+1)}{\Gamma(4q+1)\Gamma(q+1)}+\right. \\ \qquad \left.\left(c_1^3|c_4^2|+c_1^2|c_4^3|\right)\dfrac{\Gamma(5q+1)}{\Gamma(3q+1)\Gamma(2q+1)}+c_1^0|c_4^5|\right], \\ c_3^6 = -3c_3^5+c_1^5c_2^0+\left(c_1^4c_2^1+c_1^1c_2^4\right)\dfrac{\Gamma(5q+1)}{\Gamma(4q+1)\Gamma(q+1)}+ \\ \qquad \left(c_1^3c_2^2+c_1^2c_2^3\right)\dfrac{\Gamma(5q+1)}{\Gamma(3q+1)\Gamma(2q+1)}+c_1^0c_2^5, \\ c_4^6 = c_1^5。 \end{cases}$$

从而可得系统（2）的方程近似解为

$$x_i(t)=c_i^0+\sum_{j=1}^{6}c_i^j\frac{(t-t_0)^{jq}}{\Gamma(jq+1)},\quad i=1,2,3,4。$$

选定参数 q=0.95、a=15、b=0.02、c=10、k=1，且初始条件为 (1, 0, 1, 0)，运用 Matlab 对其进行数值计算，得知系统存在混沌吸引子（见图 1）。



a）x-y 相图　　b）x-z 相图

c）y-z 相图　　d）x-w 相图

图 1　分数阶混沌系统状态量相图

Fig. 1　Fractional order chaotic system state variable phase diagram

3　参数变化对系统的影响

为了进一步研究 4 个系统参数变化对于分数阶系统的非线性行为的影响，接下来采用 Lyapunov 指数图、分岔图以及谱熵（spectral entropy，SE）和相关复杂度 C_0 图（correlation complexity）等方法，分析单参数变化下系统的动态演化特征，绘制双参数控制下的 Lyapunov 指数分布图，计算其混沌效应最大值取值点和最小值取值点，并绘制其对应的相图以及时间序列图。

3.1　单参数变化分析

选取参数 a、b、c 以及 k 各自不同的取值区间，系统呈现出丰富的动力学行为。不同参数下的最大李雅普诺夫指数与分岔图对照表见表 1，系统的 Lyapunov 指数图及分岔图如图 2 所示。

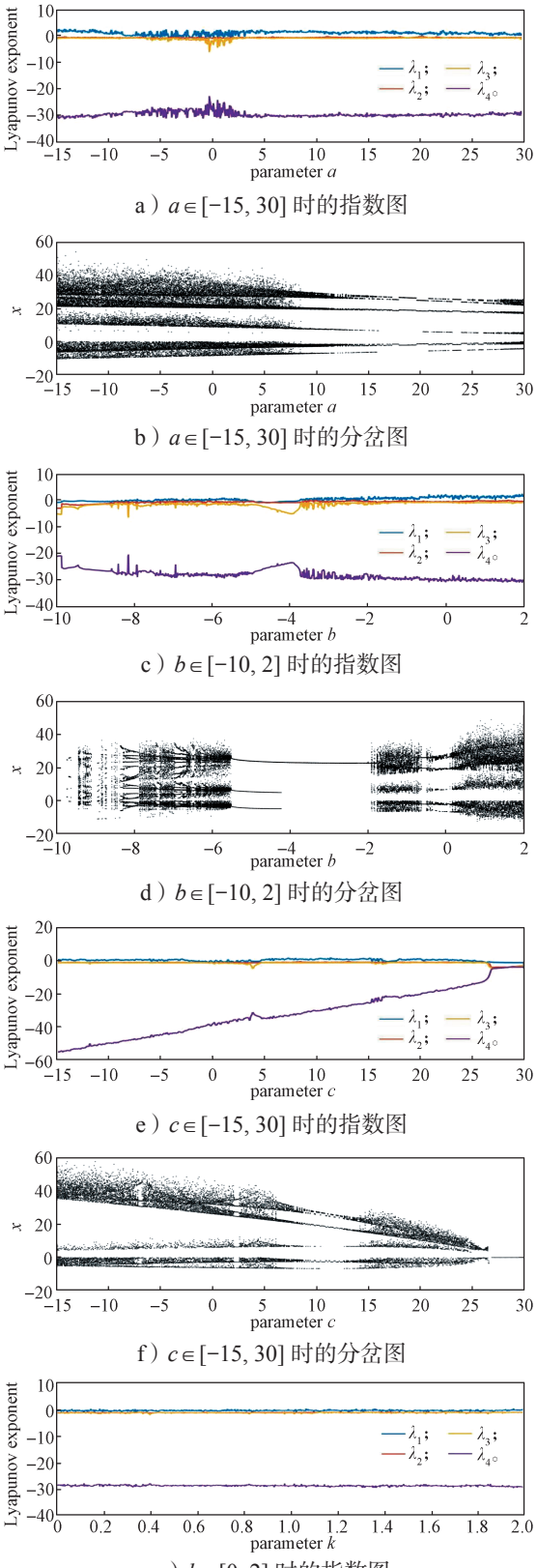
表 1　不同参数下最大李雅普诺夫指数与分岔图对照表

Table 1　Comparison table of maximum Lyapunov exponent and bifurcation diagram under different parameters

参数取值	固定参数	最大李雅普诺夫指数范围	图形编号
$a\in[-15, 30]$	q=0.98, b=0.02, c=10, k=1	[−0.762 9, 2.504 6]	图 2(a, b)
$b\in[-10, 2]$	q=0.98, a=15, c=10, k=1	[−1.336 9, 2.248 3]	图 2(c, d)
$c\in[-15, 30]$	q=0.98, a=15, b=0.02, k=1	[−0.936 5, 2.161 4]	图 2(e, f)
$k\in[0, 2]$	q=0.98, a=15, b=0.02, c=10	[−0.733 3, 0.600 5]	图 2(g, h)

由图 2 可知，在参数 a 和 c 的变化区间中，系统经历了从周期性到混沌再到稳定的转变，存在多个周期窗口和分岔点。其中，当参数 c 增大时，系统存在反向分岔，即随着参数增大，分支数减少。

当 k=0 时，系统将不受忆阻器的影响，等同于除去第四维，动力学行为与 Lorenz 系统一致。随着忆阻器参数 k 的增加，系统在混沌和周期性状态之间交替。



a）$a\in[-15, 30]$ 时的指数图

b）$a\in[-15, 30]$ 时的分岔图

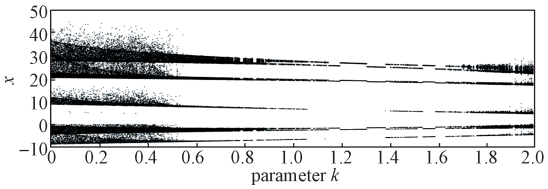
c）$b\in[-10, 2]$ 时的指数图

d）$b\in[-10, 2]$ 时的分岔图

e）$c\in[-15, 30]$ 时的指数图

f）$c\in[-15, 30]$ 时的分岔图

g）$k\in[0, 2]$ 时的指数图



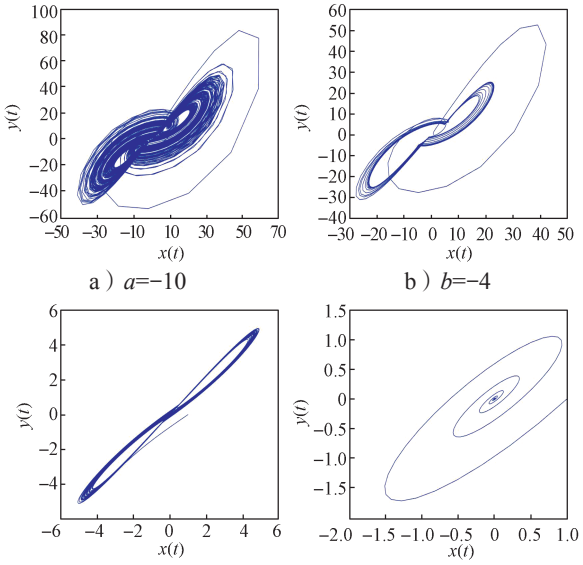
h）$k\in[0, 2]$ 时的分岔图

图 2 不同参数变化下的李雅普诺夫指数图及分岔图

Fig. 2 Lyapunov exponent and bifurcation diagrams under varying parameters

图 3 中展示了不同参数下系统的吸引子形态：a 图为双涡卷混沌吸引子，体现复杂混沌行为；b 图为周期态转变，显示系统从有序到混沌的过渡；c 图和 d 图分别呈现周期 2 和周期 1 的规则轨道，反映系统在参数变化下的动力学演化过程。

相比之下，参数 b 的变化对系统混沌行为具有显著的调控作用。随着参数 b 变化，系统从稳定态进入周期态，并经历多次周期倍分岔，最终演变成混沌态。相较于其他参数，b 的变化对系统从有序向混沌转变的影响更为显著。



a）a=−10　b）b=−4

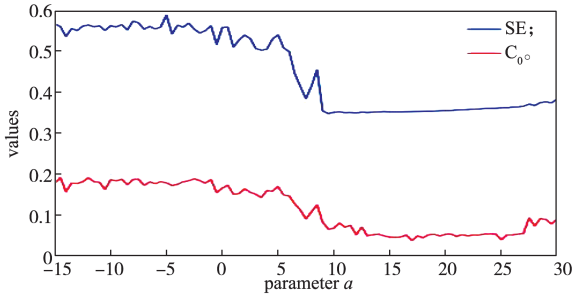
c）c=26　d）c=29.5

图 3 不同参数下的系统吸引子图

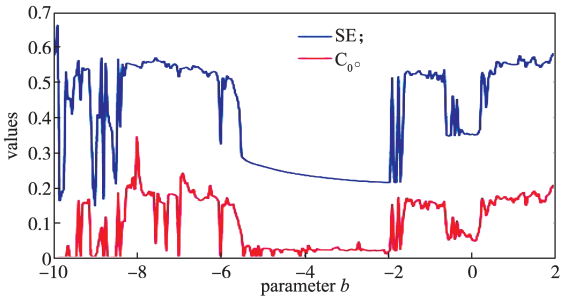
Fig. 3 System attractor diagrams under different parameters

3.2 复杂度分析

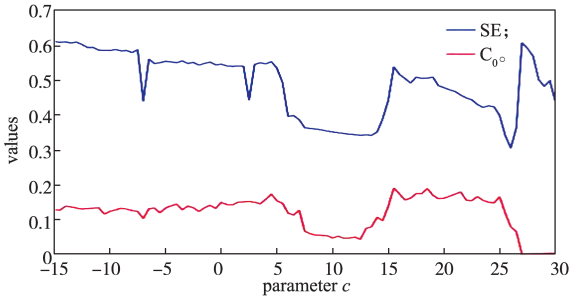
固定其他参数不变，得到的单参数变化下的谱熵 SE 和 C_0 复杂度图如图 4 所示。



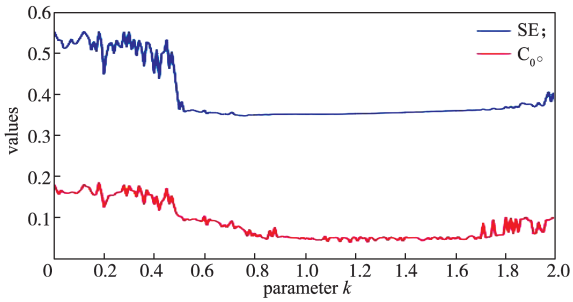
a）a 变化时



b）b 变化时



c）c 变化时



d）k 变化时

图 4 不同参数变化下的谱熵 SE 和 C_0 复杂度图

Fig. 4 SE and C_0 complexity graphs under varying parameters

通过对比图 4 和图 2 可知，不同参数变化下所对应的分岔图与 SE 和 C_0 复杂度图是较为吻合的。

从图 2 可看出，系统处于周期运动状态时，SE 和 C_0 复杂度值均较小；随着系统逐渐向混沌状态过渡，SE 和 C_0 值也随之增大，系统呈现出从周期态向混沌态的演化趋势。

对比不同参数的 SE 与 C_0 复杂度图和均值数据（见表 2），可以得知参数 b 变化对于系统复杂度的影响更显著。

表 2 不同参数下的 SE 均值与 C_0 均值

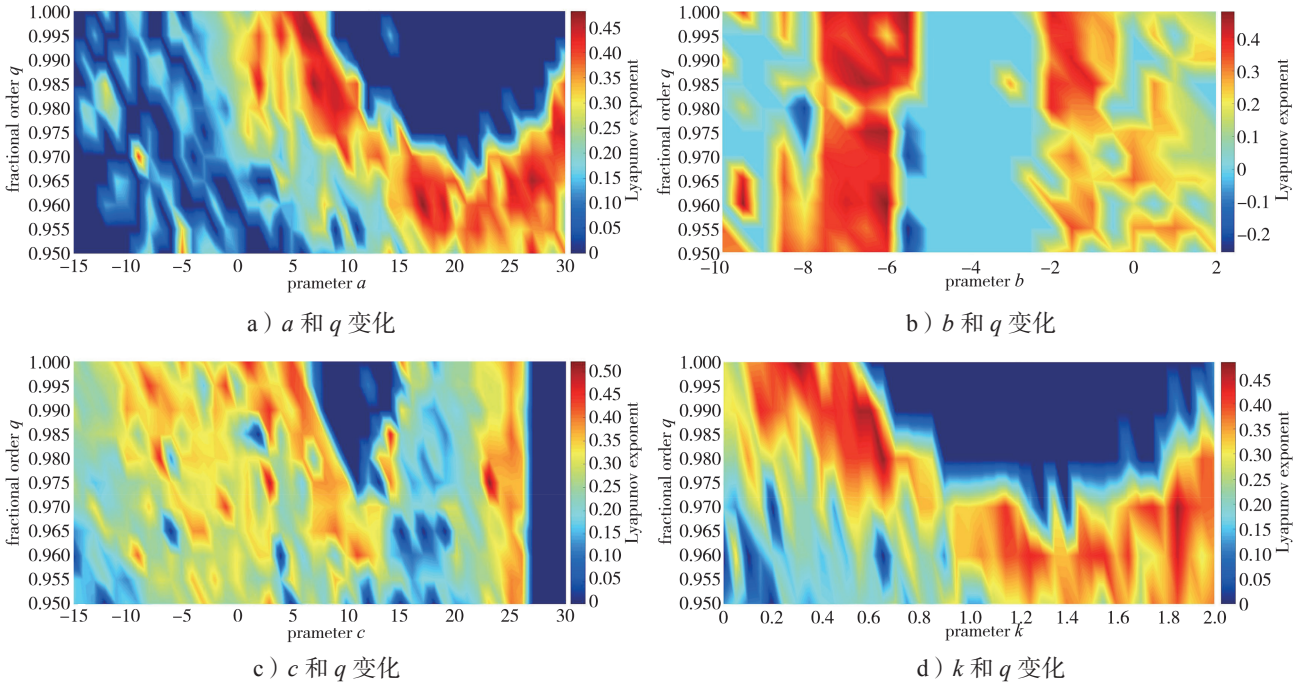
Table 2 SE and C_0 mean value under different parameters

参数	SE 均值	C_0 均值
k	0.377 5	0.099 2
a	0.382 6	0.091 5
b	0.575 0	0.201 4
c	0.439 2	0.003 3

3.3 双参数变化分析

绘制的系统参数 (a, b, c, k) 和分数阶 q 双参数控

制下的 Lyapunov 指数分布图见图 5，图中颜色越深表示 Lyapunov 指数越大，对应的混沌效应越强。



a）a 和 q 变化　　b）b 和 q 变化

c）c 和 q 变化　　d）k 和 q 变化

图 5　双参数变化下的李雅普诺夫指数分布图

Fig. 5　Distribution diagram of Lyapunov exponent under dual parameter variation

选取不同区间内的系统参数和 $q \in [0.95, 1.00]$ 进行分析，进一步对区间进行细分研究，最终得到了各区间内的混沌最大值点和最小值点，计算结果见表 3。

表 3　双参数变化下的李雅普诺夫指数表

Table 3　Lyapunov exponent table under dual parameter variation

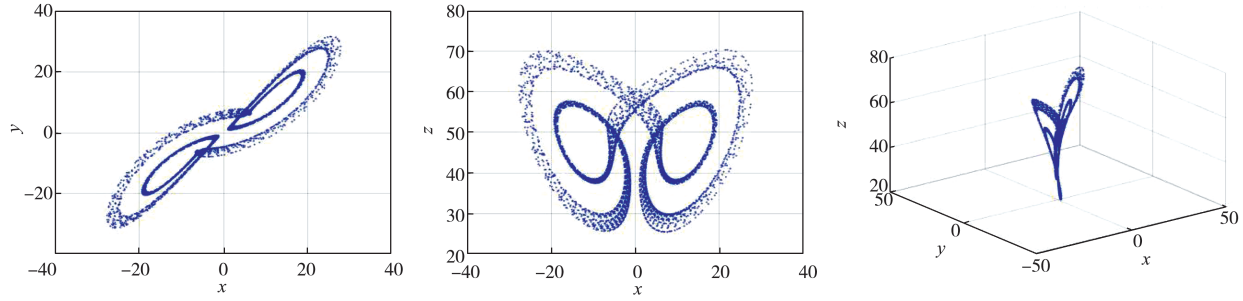
双参数	区间范围	最大值	最小值	图形编号
a 与 q	$a\in[-15, 30]$, $q\in[0.95, 1.00]$	0.482 6 (a=17.00, q=0.96)	0 (a= −15, q=0.95)	图 6
	$a\in[5, 10]$, $q\in[0.97, 1.00]$	0.500 9 (a=8.80, q=0.98)	0 (a=7.10, q=0.97)	
	$a\in[15, 19]$, $q\in[0.95, 0.98]$	0.518 6 (a=18.55, q=0.96)(A_1 双涡卷混沌吸引子)	0 (a=15, q=0.98)(A_2 周期 2 态涡卷吸引子)	
b 与 q	$b\in[-10, 2]$, $q\in[0.95, 1.00]$	0.480 6 (b= −6.00, q=0.96)	−0.251 3 (b= −5.5, q=0.955)	图 7
	$b\in[-10, -5]$, $q\in[0.95, 1.00]$	0.507 4 (b= −5.8, q=0.99)(B_1 混沌吸引子)	−0.251 3 (b= −5.5, q=0.955) ($B_1$2 周期 1 态涡卷吸引子)	
c 与 q	$c\in[-15, 30]$, $q\in[0.95, 1.00]$	0.520 6 (c=23, q=0.975)	0 (c= −12, q=0.95)	图 8
	$c\in[18, 25]$, $q\in[0.96, 0.98]$	0.520 6 (c=23, q=0.975)(C_1 混沌吸引子)	0 (c=10, q=0.98)(C_2 周期 2 态涡卷吸引子)	
k 与 q	$k\in$ [0, 2], $q\in[0.95, 1.00]$	0.483 5 (k=0.30, q=1.00)	0 (k=0.20, q=0.95)	图 9
	$k\in$ [0.2, 0.8], $q\in[0.95, 1.00]$	0.492 1 (k=0.46, q=0.99)(K_1 双涡卷混沌态吸引子)	0 (k=0.20, q=0.95)(K_2 混沌吸引子)	
	$k\in$ [1.6, 2.0], $q\in[0.95, 1.00]$	0.484 6 (k=1.96, q=0.98)	0 (k=1.60, q=0.98)	

对比表 3 中的数据，发现最大值 B_1（0.507 4）和最小值 B_2（−0.251 3）混沌值差异最为显著。

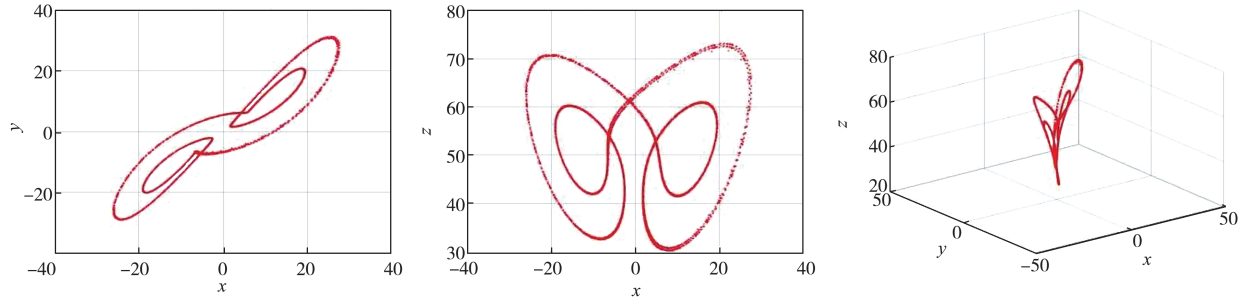
进一步绘制各区间内混沌最大值点和最小值点的相图轨迹，具体见图 6~9。

图 6 中，A_1 为双涡卷混沌吸引子，A_2 为周期 2 态涡卷吸引子；图 7 中，B_1 为混沌吸引子，B_2 为周期 1 态涡卷吸引子；图 8 中，C_1 为混沌吸引子，C_2 为周期 2 态涡卷吸引子；图 9 中，K_1 为双涡卷混沌态吸引子，K_2 为混沌吸引子。由图 6~9 可发现，系统呈现出丰富的动力学特性。最大值点的轨道呈现较为分散的蝴蝶翼形状，点和轨道分布更加离散，混沌特性更强；而最小值点的轨道蝴蝶翼形状更加规整，系统行为更加规则，轨道分布更加集中。

针对最大值 B_1 和最小值 B_2，绘制对应的时间序列图（见图 10）。由图 10 可知，系统的最大值点时间序列在前 3 500 个时间步长内表现出明显的周期性波动，之后振幅逐渐减小，然后再次增大。而最小值点时间序列表现出稳定的周期性波动，振幅相对一致。其结果揭示了两者在动态行为上存在显著的差异。



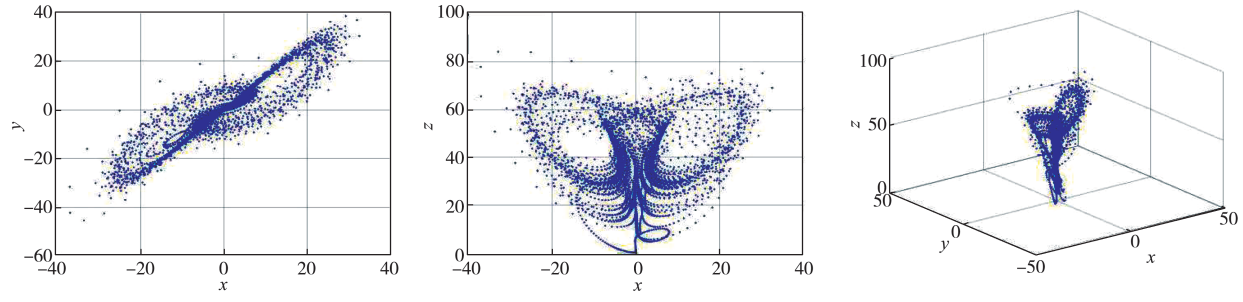
a）*x-y* 平面上的最大值处相图　b）*x-z* 平面上的最大值处相图　c）三维平面图上的最大值处相图



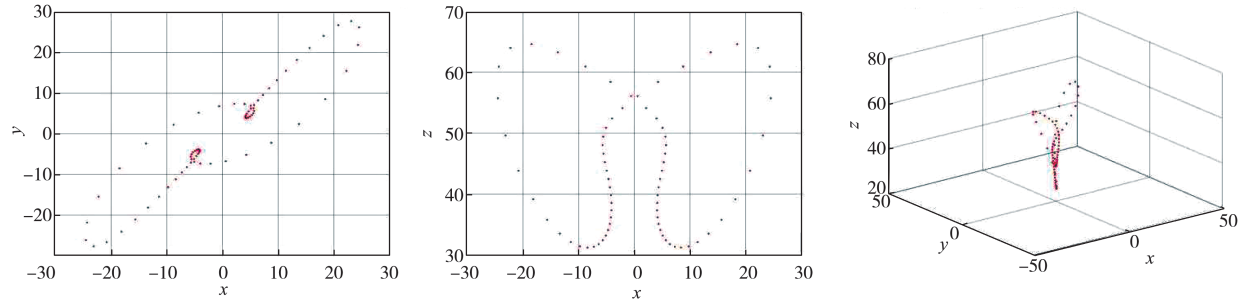
d）*x-y* 平面上的最小值处相图　e）*x-z* 平面上的最小值处相图　f）三维平面图上的最小值处相图

图 6　最大值 A_1 点和最小值 A_2 点的相图

Fig. 6　Phase diagram of the max value A_1 point and min value A_2 point



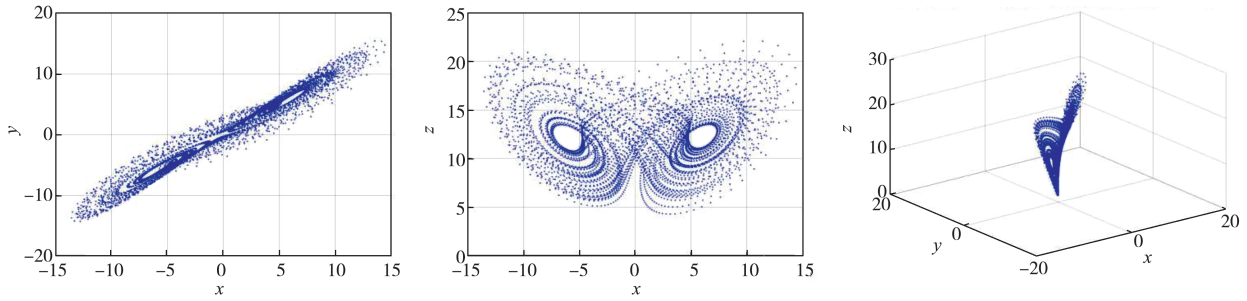
a）*x-y* 平面上的最大值处相图　b）*x-z* 平面上的最大值处相图　c）三维平面图上的最大值处相图



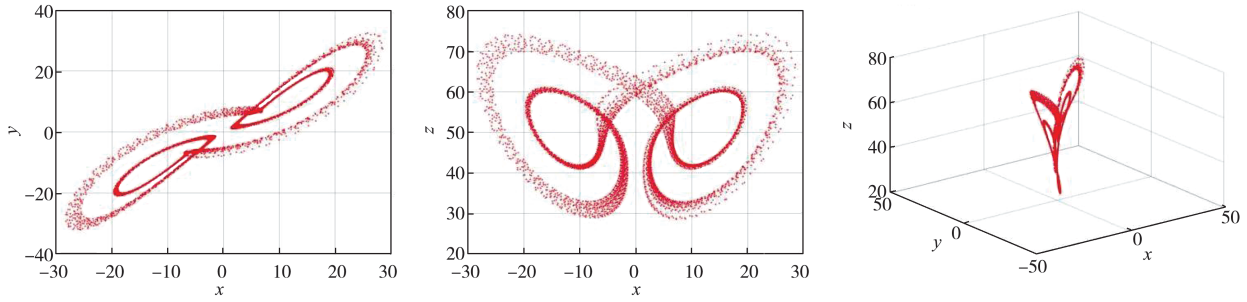
d）*x-y* 平面上的最小值处相图　e）*x-z* 平面上的最小值处相图　f）三维平面图上的最小值处相图

图 7　最大值 B_1 点和最小值 B_2 点的相图

Fig. 7　Phase diagram of the max value B_1 point and min value B_2 point



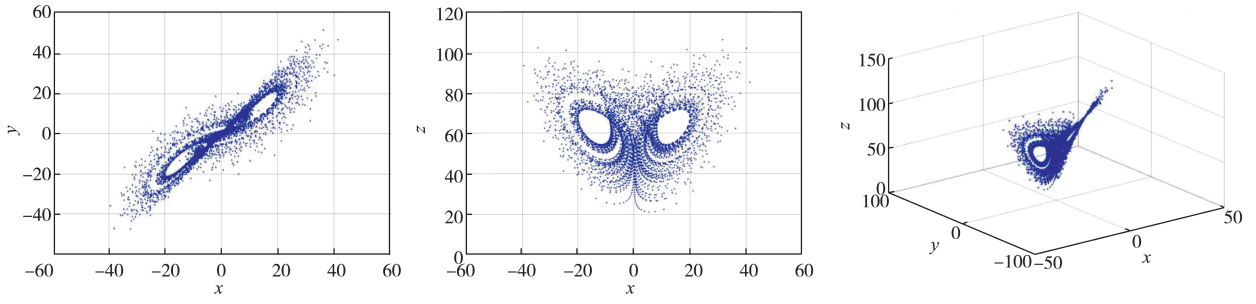
a）*x-y* 平面上的最大值处相图　b）*x-z* 平面上的最大值处相图　c）三维平面图上的最大值处相图



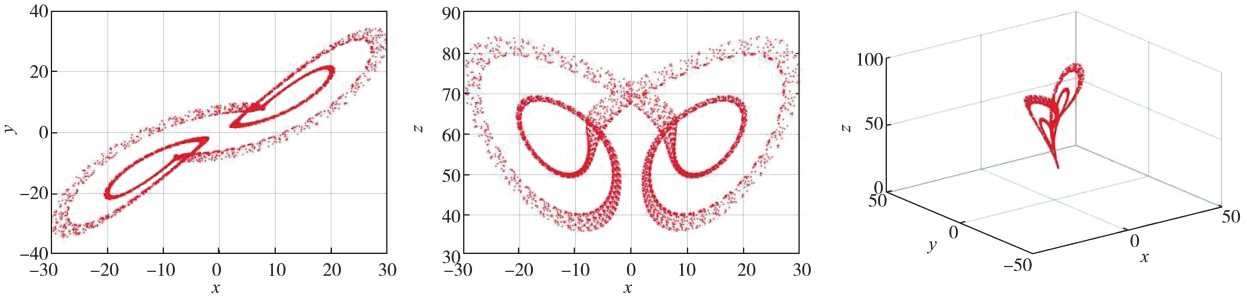
d）*x*-*y* 平面上的最小值处相图　　e）*x*-*z* 平面上的最小值处相图　　f）三维平面图上的最小值处相图

图 8　最大值 C_1 点和最小值 C_2 点的相图

Fig. 8　Phase diagram of the max value C_1 point and min value C_2 point



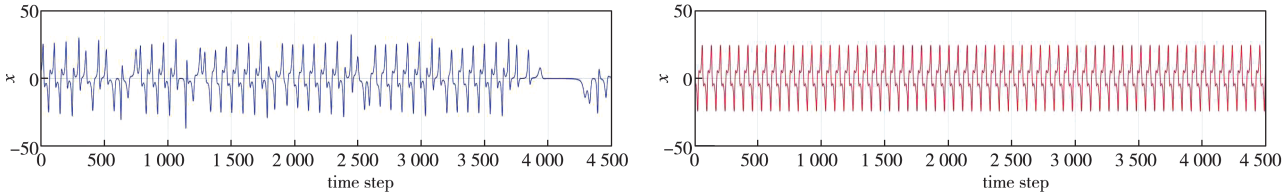
a）*x*-*y* 平面上的最大值处相图　　b）*x*-*z* 平面上的最大值处相图　　c）三维平面图上的最大值处相图



d）*x*-*y* 平面上的最小值处相图　　e）*x*-*z* 平面上的最小值处相图　　f）三维平面图上的最小值处相图

图 9　最大值 K_1 点和最小值 K_2 点的相图

Fig. 9　Phase diagram of the max value K_1 point and min value K_2 point



a）最大值 B_1 点（b=−5.8，q=0.99）　　b）最小值 B_2 点（b=−5.5，q=0.955）

图 10　最大值 B_1 点和最小值 B_2 点的时间序列图

Fig. 10　Time series chart of the max value B_1 point and min value B_2 point

5　结语

本文通过在分数阶 Lorenz 混沌系统中引入忆阻器作为反馈项，构建了一个新四维分数阶混沌系统。

在定量方面，基于 Adomian 分解法可以求得系统的近似解，同时进一步分析得知该系统具有无限平衡点集，这为系统产生丰富吸引子提供了可能性。

在定性方面，单参数变化下的系统呈现复杂的动力学行为。Lyapunov 指数谱、分岔图表明，分数阶系统在混沌态和周期态之间变化。双参数变化下的系统具有参数敏感性和复杂动力学转换性，这一特性通过双参数 Lyapunov 指数分布图、状态变量极值（最大值与最小值）的相图以及对应时间序列演化图得到了验证。根据谱熵 SE 和 C_0 复杂度图，得出了参数 b 对于分数阶 Lorenz 忆阻系统复杂度的影响较为显著，这为分数阶电路系统的研究提供了新思路。尽管本研究数值模拟已验证了系统的混沌与周期行为，但其硬

件实现与控制应用仍有待探索。

参考文献：

[1] HUSSAIN S，BASHIR Z，ABBAS MALIK M G. Chaos Analysis of Nonlinear Variable Order Fractional Hyperchaotic Chen System Utilizing Radial Basis Function Neural Network[J]. Cognitive Neurodynamics，2024，18(5)：2831−2855.

[2] NABIL H，TAYEB H. A Fractional-Order Chaotic Lorenz-Based Chemical System：Dynamic Investigation, Complexity Analysis, Chaos Synchronization, and Its Application to Secure Communication[J]. Chinese Physics B，2024，33(12)：120503.

[3] TABASI M，ABED HOSSEINI S，HOUSHMAND M. Stable Fractional-Order Adaptive Sliding-Based Control and Synchronization of Two Fractional-Order Duffing-Holmes Chaotic Systems[J]. Journal of Control, Automation and Electrical Systems，2025，36(1)：20−33.

[4] DENG Y，LI S Y，ZHANG P，et al. Exploring Thickness-Dependent Cu/TiO_x：Cu/Ti Memristor and Chaotic Dynamics in a Real Fifth-Order Memristive Circuit[J]. Nonlinear Dynamics，2024，112(2)：1377−1394.

[5] WANG N，XU D，LI Z，et al. A General Configuration for Nonlinear Circuit Employing Current-Controlled Nonlinearity：Application in Chua's Circuit[J]. Chaos, Solitons & Fractals，2023，177：114233.

[6] KAMDEM TCHIEDJO S，KAMDJEU KENGNE L，KENGNE J，et al. Dynamical Behaviors of a Chaotic Jerk Circuit Based on a Novel Memristive Diode Emulator with a Smooth Symmetry Control[J]. The European Physical Journal Plus，2022，137(8)：940.

[7] WU P，LI C D，HE X，et al. A Memristor-Based Lorenz Circuit and Its Stabilization via Variable-Time Impulsive Control[J]. International Journal of Bifurcation and Chaos，2017，27(3)：1750031.

[8] WU H J，HU X，FENG Y M. Finite-Time Synchronisation of Memristive Hyperchaotic Circuit Based on Lorenz System with Transmission Delay[J]. International Journal of Simulation and Process Modelling，2018，13(6)：582.

[9] LIU J D，WANG Z，CHEN M S，et al. Chaotic System Dynamics Analysis and Synchronization Circuit Realization of Fractional-Order Memristor[J]. The European Physical Journal Special Topics，2022，231(16)：3095−3107.

[10] LENG X X，ZHANG L M，ZHANG C K，et al. Modeling and Complexity Analysis of a Fractional-Order Memristor Conservative Chaotic System[J]. Physica Scripta，2023，98(7)：075206.

[11] HE S B，SUN K H，WANG H H. Dynamics of the Fractional-Order Lorenz System Based on Adomian Decomposition Method and Its DSP Implementation[J]. IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica，2024，11(5)：1298−1300.

[12] WAZWAZ A M. A New Algorithm for Calculating Adomian Polynomials for Nonlinear Operators[J]. Applied Mathematics and Computation，2000，111(1)：33−51.

[13] PENG D，SUN K H，HE S B，et al. Numerical Analysis of a Simplest Fractional-Order Hyperchaotic System[J]. Theoretical and Applied Mechanics Letters，2019，9(4)：220−228.

[14] BAO B C，LIU Z，XU J P. Transient Chaos in Smooth Memristor Oscillator[J]. Chinese Physics B，2010，19(3)：30510−30516.

[15] 阮静雅，孙克辉，牟 俊. 基于忆阻器反馈的 Lorenz 超混沌系统及其电路实现 [J]. 物理学报，2016，65(19)：25−35.
RUAN Jingya，SUN Kehui，MOU Jun. Memristor-Based Lorenz Hyper-Chaotic System and Its Circuit Implementation[J]. Acta Physica Sinica，2016，65(19)：25−35.

[16] MATIGNON D. Stability Results for Fractional Differential Equations with Applications to Control Processing[J]. Computational Engineering in Systems Applications，1996，2(1)：963−968.

（责任编辑：廖友媛）