DOI：10.20271/j.cnki.1673−9833.2026.4002

考虑运动副间隙的折叠翼机构运动精度可靠性分析

黎　钰[1,2]，彭鑫阳[1,2]，王泽鑫[1,2]，姚齐水[1,2]，唐嘉昌[1,2]

（1. 湖南工业大学 机械工程学院，湖南 株洲 412007；
2. 高性能滚动轴承技术湖南省高校重点实验室，湖南 株洲 412007）

摘　要: 针对运动副间隙引发的冲击振动问题，提出一种并行加点策略的自适应 Kriging 可靠性分析方法。首先，基于 L-N 模型和改进 Coulomb 模型建立了铰链间隙碰撞模型，并采用 Lagrange 法构建了机构动力学模型。通过引入影响函数（IF）和伪学习函数（PH），实现了每次迭代中多个训练点的并行选取，显著提升了建模效率。然后以数值模拟分析了间隙值、材料弹性模量和摩擦因数对角位移误差可靠性的影响。结果表明，与传统方法相比，所提出方法在保证精度的同时提高了计算效率，可为折叠翼机构的可靠性设计提供理论支持。

关键词：折叠翼机构；运动副间隙；自适应 Kriging；并行加点策略；运动精度可靠性

中图分类号：V224　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673−9833(2026)04−0008−09

引文格式：黎　钰，彭鑫阳，王泽鑫，等 . 考虑运动副间隙的折叠翼机构运动精度可靠性分析 [J]. 湖南工业大学学报，2026，40(4)：8−16.

Reliability Analysis of the Motion Accuracy of Folding Wing Mechanism Considering the Clearance Between Motion Pairs

LI Yu[1,2]，PENG Xinyang[1,2]，WANG Zexin[1,2]，YAO Qishui[1,2]，TANG Jiachang[1,2]

（1. School of Mechanical Engineering，Hunan University of Technology，Zhuzhou Hunan 412007，China；
2. Key Laboratory of High-Performance Rolling Bearings in Hunan Province，Zhuzhou Hunan 412007，China）

Abstract：A reliability analysis method using adaptive Kriging with a parallel point strategy has been proposed to address the impact vibration problem caused by the clearance between motion pairs. Firstly, a hinge clearance collision model is established based on the L-N model and an improved Coulomb model, with a mechanism dynamics model constructed by using the Lagrange method. By introducing the influence function (IF) and pseudo learning function (PH), parallel selection of multiple training points in each iteration has been achieved, significantly improving modeling efficiency. A numerical simulation analysis has been made of the influence of gap value, material elastic modulus, and friction coefficient on the reliability of diagonal displacement error. The results demonstrate that, compared to traditional methods, the proposed approach significantly enhances computational efficiency while ensuring accuracy, providing effective theoretical support for the reliability design of folding wing mechanisms.

Keywords：folding wing mechanism；motion pair clearance；adaptive Kriging；parallel point strategy；motion accuracy reliability

收稿日期：2025−10−21

基金项目：国家自然科学基金资助项目（U20B2028）

作者简介：黎　钰，男，湖南工业大学硕士生，主要研究方向为运载装备关键件设计理论及应用，
E-mail：2879666952@qq.com

通信作者：姚齐水，男，湖南工业大学教授，博士，主要研究方向为机构学与机构动力学，机械零部件安全服役科学，
E-mail：yaoqishui@126.com

0　引言

折叠翼展开机构是飞机的关键功能部件，而折叠翼机构动作的可靠性直接关系着整个飞行器设备和系统的安全可靠性，折叠翼可借助折叠机构的运动改变自身的气动外形，从而满足飞行器宽飞行包线、高性能、低功耗等任务需求。随着飞行器精度和高速程度不断提高，对折叠翼机构运动精度的要求也不断提高。然而由于制造、安装误差与磨损，运动副间隙不可避免，其引发的冲击振动会显著降低运动精度，直接影响飞行器的安全与可靠性 [1]。国内外学者对折叠翼机构进行了大量研究。王博文等 [2] 通过试验与仿真结合方式建立了折叠翼展开机构虚拟样机，并用 Monte-Carlo 仿真方法验证了多组折叠翼展开机构组成的系统存在共因失效现象，提出一种考虑共因失效效应的机构系统可靠度模型。胡明等 [3] 利用机械系统动力学自动分析（automatic dynamic analysis of mechanical systems，ADAMS）软件为机构工作可靠性分析平台，建立了折叠翼展开机构参数化模型，并确定了 ADAMS/Insight 模块下折叠翼展开机构的工作可靠性仿真流程。Tian K. Y. 等 [4–5] 提出了一个全局模态法，可用于折叠翼机构非线性颤振分析。王才东等 [6] 基于四板机构理论，以甲虫后翅为仿生对象设计了一种仿生甲虫四板折叠翼，并研究其气动特性。

而折叠翼机构运动副间的间隙是不可忽略的，在机构运行过程中，运动副间隙间会发生碰撞、冲击和摩擦，影响折叠翼机构的运动精度。近年来部分学者对含间隙机构进行了研究。余江鸿等 [7] 采用 Archard 磨损模型数值模拟法，对含间隙的飞行器折叠翼磨损分布规律进行了研究。金国光等 [8] 建立了含间隙关节变胞机构动力学模型。万琦等 [9] 建立了含多间隙铰链凸轮连杆机构的动力学模型，并分析了间隙尺寸等对机构动态响应的影响。Geng X. Y. 等 [10] 基于非概率模型区间干涉模型计算了旋转关节磨损影响下四杆机构的运动可靠性。Zhang H. W. 等 [11] 基于拉格朗日乘子法和绝对节点坐标公式法建立了含间隙的叶片机构动力学方程。Wu J. N. 等 [12] 提出了一种多体机构可靠性评估间接概率模型，并研究了间隙及机床热变形等对曲柄滑块机构动态精度的影响。陈修龙等 [13] 以 3SPS-S 空间并联机构为对象，研究了间隙磨损前后对机构动态特性的影响。

在含间隙机构可靠性分析中，间隙引发的碰撞、冲击等非线性动力学行为使得传统分析方法的计算效率与精度矛盾较突出。Kriging 模型兼具局部插值精度与全局拟合能力，成为复杂机械系统可靠性评估常用代理模型，但传统自适应 Kriging 模型多采用单点迭代加点策略，在处理含间隙机构类强非线性问题时，迭代次数多、计算周期长的缺陷较明显。为此，学界探索并行加点策略以提升 Kriging 模型的构建效率。查从燚等 [14] 提出了一种并行自适应加点策略 CF-K，并以桁架为对象分析了其结构可靠性。张建侠等 [15] 提出了一种基于 Kriging 模型多目标策略和聚类方法的优化算法，该算法具较高优化精度和效率。

综上，目前折叠翼机构研究多集中于结构可靠性与气动特性，而对其展开过程中的运动精度可靠性分析尚不充分。此外，现有可靠性分析方法多侧重提升精度，忽略了计算效率与时间成本。为此，本文拟将并行加点自适应 Kriging 模型用于含多间隙折叠翼机构运动精度可靠性分析，研究间隙值、材料弹性模量与摩擦因数等对运动精度可靠性的影响，从而确定合理的间隙范围，保障其运动精度满足设计要求。

1　带间隙折叠翼多连杆机构模型建立

1.1　转动副间隙的数学模型

转动副间隙建模时，轴与轴承在一个周期内的相对关系为分离、接触及碰撞 3 种状态，见图 1。

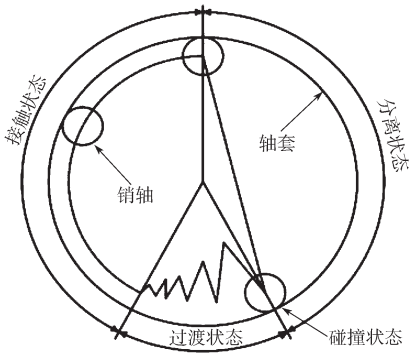


图 1　转动副模型运动状态

Fig. 1　Motion state of the rotating pair model

在转动副间隙建模过程中，对转动副中轴承和轴进行了几何描述。转动间隙的数学模型如图 2 所示。

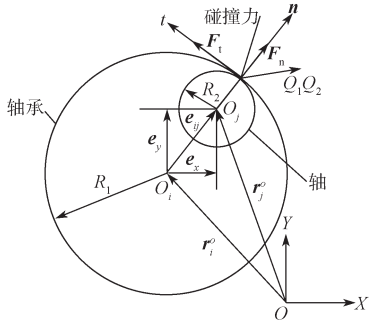


图 2　转动关节间隙的数学模型

Fig. 2　Mathematical model of rotational joint clearance

图 2 中，发生碰撞时的接触变形量 $\boldsymbol{\delta}$ 为

$$\boldsymbol{\delta}=\boldsymbol{e}_{ij}-c, \tag{1}$$

式中：$\boldsymbol{e}_{ij}$ 为轴颈相对轴承的偏心矢量；c 为径向间隙。

O-XY 为系统的全局坐标，O_i 和 O_j 分别为轴承和轴的圆心，R_1 和 R_2 分别为轴承和轴的半径，Q_1 和 Q_2 分别为轴承和轴颈上的接触点，$\boldsymbol{e}_{ij}$ 为转动副间隙矢量，可被表示为

$$\boldsymbol{e}_{ij}=\boldsymbol{r}_j^O-\boldsymbol{r}_i^O, \tag{2}$$

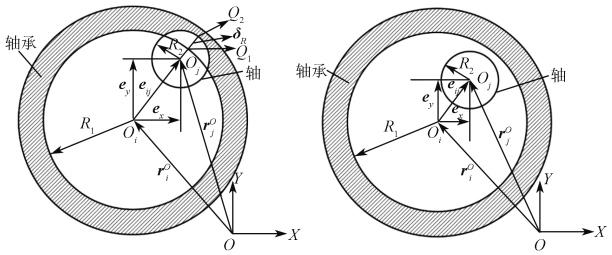
因此，间隙矢量的偏心矢量大小可表示为

$$|\boldsymbol{e}_{ij}|=\sqrt{\boldsymbol{e}_x^2+\boldsymbol{e}_y^2}, \tag{3}$$

间隙矢量的单位矢量可表示为

$$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{e}_{ij}/|\boldsymbol{e}_{ij}|。 \tag{4}$$

图 3 描述了轴承和轴颈之间的碰撞。



a）间隙碰撞状态　　b）间隙自由状态

图 3　运动副间隙与接触模型

Fig. 3　Motion pair clearance and contact model

全局坐标系中，$\boldsymbol{r}_i^O$ 和 $\boldsymbol{r}_j^O$ 为轴承和轴颈的位置向量。轴承与轴颈发生碰撞时产生的变形 $\boldsymbol{\delta}_R$ 可表示为

$$\boldsymbol{\delta}_R=\boldsymbol{e}_{ij}-c。 \tag{5}$$

$|\boldsymbol{\delta}_R|$ 可用来判断轴承和轴颈是否接触，轴与轴承的运动触发条件可由式（6）得出：

$$|\boldsymbol{\delta}_R|=\sqrt{\boldsymbol{e}_x^2+\boldsymbol{e}_y^2}-c。 \tag{6}$$

当 $|\boldsymbol{\delta}_R|\geqslant 0$ 时，轴和轴承将发生碰撞，碰撞点的位置向量可以表示为

$$\begin{cases}\boldsymbol{r}_i^{Q_1}=\boldsymbol{r}_i^O+R_1\boldsymbol{n};\\ \boldsymbol{r}_j^{Q_2}=\boldsymbol{r}_j^O+R_2\boldsymbol{n}。\end{cases} \tag{7}$$

将式（7）对时间进行一阶微分，得到碰撞点的速度为

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{r}}_i^{Q_1}=\dot{\boldsymbol{r}}_i^O+R_1\dot{\boldsymbol{n}};\\ \dot{\boldsymbol{r}}_j^{Q_2}=\dot{\boldsymbol{r}}_j^O+R_2\dot{\boldsymbol{n}}。\end{cases} \tag{8}$$

将碰撞速度分别投影到碰撞点的法向和切线方向，得到相对法向速度 $\boldsymbol{V}_\mathrm{n}$ 和相对切向速度 $\boldsymbol{V}_\mathrm{t}$ 为

$$\begin{cases}\boldsymbol{V}_\mathrm{n}=\left(\dot{\boldsymbol{r}}_j^{Q_2}-\dot{\boldsymbol{r}}_i^{Q_1}\right)^\mathrm{T}\boldsymbol{n};\\ \boldsymbol{V}_\mathrm{t}=\left(\dot{\boldsymbol{r}}_j^{Q_2}-\dot{\boldsymbol{r}}_i^{Q_1}\right)^\mathrm{T}\boldsymbol{t}。\end{cases} \tag{9}$$

式中：切向量 $\boldsymbol{t}$ 可由法向量 $\boldsymbol{n}$ 逆时针旋转 90°得到，即 $\boldsymbol{t}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{n}$，$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$。

1.2　转动副间隙接触力的数学模型

本文采用 Lankarani 和 Nikravesh 改进的 Hertz 模型建立法向接触力模型，考虑了碰撞产生的能量损耗、材料特性和局部弹性变形情况。由文献 [16] 可知，法向接触力可表示为

$$\boldsymbol{F}_\mathrm{n}=K\boldsymbol{\delta}_R^n+D\dot{\boldsymbol{\delta}}_R, \tag{10}$$

式中：$\boldsymbol{F}_\mathrm{n}$ 为法向接触力；$K\boldsymbol{\delta}_R^n$ 为弹性力；n 为非线性度；$D\dot{\boldsymbol{\delta}}_R$ 为由于内部阻尼引起的能量耗散；D 为阻尼系数；K 为刚度系数，可表示为

$$K=\frac{4}{3\left(\delta_i+\delta_j\right)}\sqrt{\frac{R_iR_j}{R_i+R_j}}。 \tag{11}$$

其中，R_i 和 R_j 分别为两个碰撞体接触点的曲率半径，$\delta_i=\left(1-\nu_i^2\right)/E_i$，$\delta_j=\left(1-\nu_j^2\right)/E_j$，其中 ν_i 和 ν_j 分别为轴承和轴的泊松比，E_i 和 E_j 分别为轴承和轴的弹性模量。

法向接触力公式中的阻尼系数 D 可表示为

$$D=3K\left(1-c_\mathrm{e}^2\right)\boldsymbol{\delta}_R^n/\left(4\dot{\boldsymbol{\delta}}_0\right), \tag{12}$$

式中：c_e 为回复系数；$\dot{\boldsymbol{\delta}}_0$ 为初始阶段轴承间隙碰撞的冲击速度。

此外，当部件在间隙内发生相对切向运动时，轴承和轴间会产生相对摩擦，其将进一步影响带间隙机构的动力学特性。因此在带间隙机构动力学建模过程中必须考虑摩擦力的作用。常用 Coulomb 摩擦力模型，而为了计算的稳定性，Ambrósio 在 Coulomb 摩擦力模型的基础上提出了一种改进的摩擦力模型计算数值稳定性，修正的 Coulomb 摩擦力表示为

$$\boldsymbol{F}_\mathrm{t}=-c_\mathrm{f}c_\mathrm{d}\boldsymbol{F}_\mathrm{n}\,\boldsymbol{v}_\mathrm{t}/|\boldsymbol{v}_\mathrm{t}|, \tag{13}$$

式中：$\boldsymbol{F}_\mathrm{t}$、$\boldsymbol{F}_\mathrm{n}$ 为切向和法向接触力；$\boldsymbol{v}_\mathrm{t}$ 为切向速度；c_f 为滑动摩擦因数；c_d 为动力学修正系数，可表示为

$$c_\mathrm{d}=\begin{cases}0, & |\boldsymbol{v}_\mathrm{t}|\leqslant v_0,\\ \left(\boldsymbol{v}_\mathrm{t}-v_0\right)/\left(v_\mathrm{m}-v_0\right), & v_0<|\boldsymbol{v}_\mathrm{t}|\leqslant v_\mathrm{m},\\ c, & |\boldsymbol{v}_\mathrm{t}|>v_m。\end{cases} \tag{14}$$

其中 v_0 和 v_m 为给定的切向速度容差极小值和极大值。

由此，通过建立转动副间隙数学模型和接触力模型揭示了运动副间隙对机构动态特性的影响机制，特别是碰撞过程中的能量损耗和摩擦效应，这为后续含有间隙折叠翼机构动力学模型的建立奠定了基础。

2　含间隙折叠翼机构动力学模型建立

折叠翼机构由机架、曲柄 1、连杆 2、曲柄 3、连杆 4、滑块 5 组成，如图 4 所示。折叠翼机构由电机提供动力，电机启动时通过丝杠连接带动活塞沿着 x 轴负方向推动联轴器滑块，带动折叠翼绕翼轴旋转，电机转速 $\omega=2\pi$ rad/s。基于 Zhao Z. Q.[17] 的研

究，本文对折叠翼机构模型进行如下处理：首先，鉴于机构在几何、驱动及载荷方面均具有左右对称性，故采用对称性简化策略，仅对机构上半部分进行动力学建模与分析，从而将原系统简化为单自由度系统，在保证响应代表性的前提下显著提升计算效率。

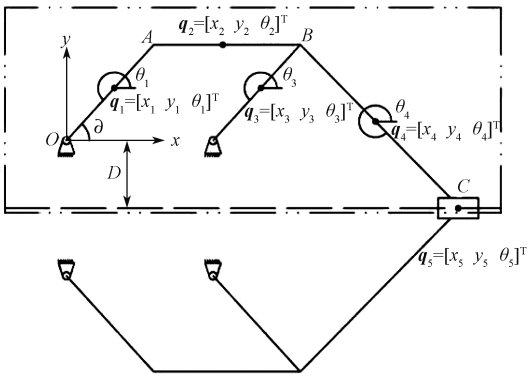


图 4　折叠翼机构简图

Fig. 4　Schematic diagram of folding wing mechanism

折叠翼在飞行过程中会受到空气阻力[17]，故所有构件都会受到空气阻力的影响，且其方向总是指向 x 轴的正方向，阻力大小可表示为

$$\boldsymbol{f}_i=\rho_{\mathrm{a}}C_0b_i\left|l_i\sin\theta_i\right|\boldsymbol{v}_{\mathrm{q}}^2/2,\ i=1,2,3,4。\tag{15}$$

式中：$\boldsymbol{f}_i$ 为第 i 根杆的空气阻力；ρ_{a}为空气密度；C_0 为空气阻力系数；b_i、l_i 分别为第 i 根杆的厚度和长度；$\boldsymbol{v}_{\mathrm{q}}$ 为飞行器的飞行速度。

应用参考点坐标法对机构各部件的质心建立局部坐标后，各部件对应的全局广义坐标可表示为

$$\boldsymbol{q}_i=[x_i\ \ y_i\ \ \theta_i]^{\mathrm{T}},\ \ i=1,2,\cdots,5。\tag{16}$$

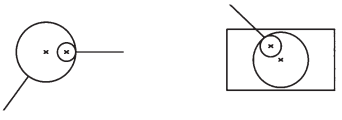
式中：x_i 和 y_i 为全局坐标系中 x 和 y 方向上构件的质心坐标；θ_i 为全局坐标系中的角度。

基于广义坐标，将式（16）对时间进行一次和二次微分，得到如下广义速度 $\dot{\boldsymbol{q}}$ 和广义加速度$\ddot{\boldsymbol{q}}_i$方程：

$$\dot{\boldsymbol{q}}_i=\left[\dot{x}_i\ \ \dot{y}_i\ \ \dot{\theta}_i\right]^{\mathrm{T}},\ \ i=1,2,\cdots,5;\tag{17}$$

$$\ddot{\boldsymbol{q}}_i=\left[\ddot{x}_i\ \ \ddot{y}_i\ \ \ddot{\theta}_i\right]^{\mathrm{T}},\ \ i=1,2,\cdots,5。\tag{18}$$

多间隙折叠翼机构由 6 个转动副和 1 个移动副组成，根据机构学原理，这些运动副共产生 14 个约束方程。为确保机构运动确定性，需额外增加 1 个驱动约束方程。当机构中存在 A 和 C 间隙时（见图 5），这两个运动副处的约束功能会失效，导致总约束方程的数量相应减少 4 个。



a）间隙 A　　b）间隙 C

图 5　间隙局部示意图

Fig. 5　Partial clearance schematic diagram

机构的约束方程如下：

$$\boldsymbol{\Phi}(q,t)=\begin{bmatrix}x_1-0.5l_1\cos\theta_1\\ y_2-0.5l_2\sin\theta_1\\ x_2+0.5l_2\cos\theta_2-x_3-0.5l_3\cos\theta_3\\ y_2+0.5l_2\sin\theta_2-y_3-0.5l_3\sin\theta_3\\ x_3-0.5l_3\cos\theta_3-0.4\\ y_3-0.5l_3\sin\theta_3\\ x_3+0.5l_3\cos\theta_3-x_4+0.5l_4\cos\theta_4\\ y_3+0.5l_3\sin\theta_3-y_4+0.5l_4\sin\theta_4\\ y_5+0.15\\ \theta_5\\ x_5-1.134\,95+\left(0.128\,6-0.128\,6\times\cos(\omega t)\right)\end{bmatrix}。\tag{19}$$

分别对式（16）（19）求解时间的一阶和二阶微分，可得到机构的速度和加速度约束方程为

$$\boldsymbol{\Phi}_q\dot{\boldsymbol{q}}=-\boldsymbol{\Phi}_t\equiv\boldsymbol{v},\tag{20}$$

$$\boldsymbol{\Phi}_q\ddot{\boldsymbol{q}}=-\left(\boldsymbol{\Phi}_q\dot{\boldsymbol{q}}\right)_q\dot{\boldsymbol{q}}-\boldsymbol{\Phi}_q\dot{\boldsymbol{q}}-\boldsymbol{\Phi}_{tt}\equiv\boldsymbol{\gamma}。\tag{21}$$

式（20）（21）中：$\boldsymbol{\Phi}_q$为系统约束方程的 Jacobian 矩阵。

在确定了受约束系统的动力学响应之后，建立了含间隙折叠翼机构的动力学方程，为

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{q}}=\boldsymbol{g}+\boldsymbol{g}^{(r)},\tag{22}$$

式中：$\boldsymbol{M}$ 为广义质量矩阵；$\boldsymbol{g}$ 为广义力矢量；$\boldsymbol{g}^{(r)}$ 为联合反作用力矢量，可表示为

$$\boldsymbol{g}^{(r)}=-\boldsymbol{\Phi}_q^{\mathrm{T}}\lambda。\tag{23}$$

其中 λ 为 Lagrange 乘子。

根据上述分析，采用第一类拉格朗日乘子法，可得如下折叠翼机构动力学微分方程：

$$\begin{cases}\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{\Phi}_q^{\mathrm{T}}\lambda=\boldsymbol{g},\\ \boldsymbol{\Phi}(q,\ t)=0。\end{cases}\tag{24}$$

将式（24）中的约束方程对 t 求两次微分，得到的微分代数方程形式可表示为

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{M} & \boldsymbol{\Phi}_q^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\Phi}_q & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ddot{\boldsymbol{q}}\\ \lambda\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{g}\\ \boldsymbol{\gamma}'\end{bmatrix}。\tag{25}$$

为得到稳定计算结果，根据 J. Baumgarte[18] 违约稳定算法在方程中引入机构运动位移和速度约束，可得

$$\boldsymbol{\gamma}'=\boldsymbol{\gamma}-2\alpha\dot{\boldsymbol{\Phi}}-\beta^2\boldsymbol{\Phi}。\tag{26}$$

式中：α 和 β 为违约系数，且 α=β=50；$\dot{\boldsymbol{\Phi}}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Phi}}{\mathrm{d}t}$。

3　含间隙折叠翼机构运动精度可靠性模型建立

3.1　运动精度可靠性模型

机构的运动精度可靠性是指机构在规定的工作

条件下及工作时间内，在运动误差极限指标内顺利完成指定动作的能力。机构的运动误差常由可靠度衡量，即顺利完成指定动作的概率。

折叠翼机构需要在规定时间内完成展开运动，以满足正常的飞行要求，假设机构运动的时间 t 范围为（t_0，t_1），则误差函数定义为

$$g(x,\ t)=p(x,\ t)-p', \tag{27}$$

式中：$p(x, t)$、p' 分别为机构运动的实际位置和理想位置；$g(x, t)$ 为规定时间内运动时的角位移误差。

根据随机变量的误差特性，当 $g(x, t)$ 的最大值 $\max\{g(x,\ t)\}$在误差限制范围内时，该机构是可靠的，否则该运动机制无效，可表示为

$$\max\{g(x,\ t)\}<\varepsilon, \tag{28}$$

式中，ε 为折叠翼机构运动输出参数允许的误差值，当折叠翼运动输出参数值小于允许运动输出的误差值时，机构满足精度要求，反之机构不满足运动精度要求，即不可靠。

3.2 自适应 Kriging 模型基础理论

自适应 Kriging 代理模型以其高效、准确的特点被广泛应用于可靠性分析中，特别是针对复杂的隐式极限状态函数及小失效概率的评估中更为有效。该模型是一种基于已知样本点构建的代理模型，其包含回归函数和随机分量，可表示为

$$G_{\mathrm{K}}(x)=\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(x)\beta_i+Z(x)=\sum_{i=1}^{n}f_i(x)\beta_i+Z(x), \tag{29}$$

式中：$\boldsymbol{f}(x)=[f_1(x), f_2(x), \cdots, f_m(x)]^{\mathrm{T}}$ 为 x 的多项式函数向量；$\boldsymbol{\beta}=[\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m]^{\mathrm{T}}$ 为回归系数向量；m 为多项式函数个数；$Z(x)$ 为均值为零的平稳高斯过程。

协方差函数如下：

$$C[z(x_i),\ z(x_j)]=\sigma_z^2\rho_z(x_i,\ x_j), \tag{30}$$

式中：σ_z^2、$\rho_z(x_i,\ x_j)$为 $Z(x)$ 的标准差和自相关函数。

相关函数存在多种，但其中最常用的是高斯自相关函数，其表达式如下：

$$\rho_{\mathrm{E}}(x_i,\ x_j)=\exp\left(-\sum_{k=1}^{d}\theta_k|x_{ik}-x_{jk}|^2\right), \tag{31}$$

式中：d 为随机变量样本点的维度；$\boldsymbol{\theta}=[\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_d]$ 为相关超参数。

由式（29）~（31）可知，Kriging 代理模型被参数 $\boldsymbol{\beta}$、$\boldsymbol{\theta}$ 和σ_z^2定义，这些参数的计算式如下：

$$\begin{cases}\boldsymbol{\beta}=\left(\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{F}\right)^{-1}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}^{-1}y;\\ \sigma_z^2=\dfrac{1}{m_{\mathrm{c}}}(y-\boldsymbol{F}\boldsymbol{\beta})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}^{-1}(y-\boldsymbol{F}\boldsymbol{\beta});\\ \boldsymbol{\theta}=\arg\min_{\theta}\left\{|\boldsymbol{R}|^{1/m_{\mathrm{c}}}\sigma_z^2\right\}。\end{cases} \tag{32}$$

式中：$\boldsymbol{F}$ 为回归矩阵；$\boldsymbol{R}$ 为相关矩阵；y 为训练样本集的响应；m_{c} 为测试样本点数量。

根据其定义，Kriging 代理模型在未观测点是一个高斯随机变量：

$$G(x)\sim\mathrm{N}[\mu_G(x),\ \sigma_G^2(x)], \tag{33}$$

$$\begin{cases}\mu_G(x)=\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(x)\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}(x)\boldsymbol{R}^{-1}(y-\boldsymbol{F}\boldsymbol{\beta}),\\ \sigma_G^2(x)=\sigma_z^2\left[1+\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}(x)\left(\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{F}\right)^{-1}\boldsymbol{u}(x)-\boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}(x)\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{r}(x)\right],\\ \boldsymbol{u}(x)=\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{r}(x)-\boldsymbol{f}(x)。\end{cases} \tag{34}$$

式（33）（34）中：$\mu_G(x)$、$\sigma_G(x)$ 分别为高斯随机变量的均值及标准差；$\boldsymbol{r}(x)$ 为相关系数向量。

至此，完成了 Kriging 代理模型的建立，其关键在于通过已知样本数据特性对新样本及模型参数进行自适应选择。通过选择合适的加点准则获取对模型精度提升最大的若干样本，可显著提升模型的建模效率。对折叠翼机构运动精度可靠性分析而言，需优先捕捉角位移误差极限状态函数中的高不确定性区域，因此本文采用H学习函数作为加点准则。Lü Z. Y. 等[19]提出的 H 函数是一种常用的学习函数，其通过信息熵衡量预测不确定性，并选择不确定性较高的样本点更新试验设计，表达式如下：

$$\begin{aligned}H(x)=\Bigg|\ln\left[\sqrt{2\pi}\sigma_G(x)+\frac{1}{2}\right]\Bigg\{\phi\left[2-\frac{\mu_G(x)}{\sigma_G(x)}\right]-\\ \phi\left[-2-\frac{\mu_G(x)}{\sigma_G(x)}\right]\Bigg\}-\Bigg\{\left[\sigma_G(x)-\frac{\mu_G(x)}{2}\right]\varphi\left[2-\frac{\mu_G(x)}{\sigma_G(x)}\right]+\\ \left[\sigma_G(x)+\frac{\mu_G(x)}{2}\right]\varphi\left[-2-\frac{\mu_G(x)}{\sigma_G(x)}\right]\Bigg\}\Bigg|,\end{aligned} \tag{35}$$

式中：ϕ为标准正态分布的累积分布函数；φ 为标准正态分布的概率密度函数。

与信息熵较低的预测值对比，信息熵较高则代表预测值可能会有很大的不确定性，因此选择 H 函数最大值的点加入样本点中是可取的。本研究中，H 函数的收敛条件设置为

$$H(x)\leqslant 0.1。 \tag{36}$$

3.3 并行加点策略自适应 Kriging

传统的基于 H 函数的自适应 Kriging 模型因能够提供概率信息而被广泛应用。主动学习 Kriging 方法通过迭代选择训练点逐步改进模型，但传统的学习函数每次只能选择一个训练点，这在并行计算环境下效率较低。针对此问题，本文提出一种并行加点策略的自适应 Kriging 模型，通过引入影响函数（influence

function，IF）按顺序进行迭代，可在每次迭代中识别多个样本点，同时添加进样本集中，以此模拟训练点对学习函数的影响。

影响函数 *IF* 用于量化新增训练点对学习函数的影响。具体来说，当一个新的训练点被添加到设计实验（*DoE*）中时，Kriging 模型会更新，进而更新学习函数。影响函数通过反映新增点对原始学习函数的影响，使得在不进行额外功能评估的情况下，可以近似更新学习函数。*IF* 函数的定义为

$$IF\left(x,\ x^*\right)=1-\rho_G\left(x,\ x^*\right)。\tag{37}$$

式中：$\rho_G\left(x,\ x^*\right)$为 Kriging 模型中点 x 与新增样本点 x^* 之间的相关函数，当 x 接近 x^* 时，$IF(x, x^*)$ 趋近于 0；当 x 远离 x^* 时，$IF(x,\ x^*)$ 趋近于 1。

可见影响函数仅依赖于新增点的位置，而不需要进行功能评估。

在并行主动学习 Kriging 法中，影响函数被用于构建伪学习函数 *PH*。伪学习函数通过将原始学习函数与影响函数相乘，近似模拟新增样本点对学习函数的影响。具体来说，伪学习函数的构建过程如下。

首先，在并行加点自适应 Kriging 中，第一个训练点的选择与传统自适应 Kriging 的相同，将选择 H 函数取最大值时的点 x_1^* 作为第一个训练点，其表达式如下：

$$x_1^*=\arg\max\left[H\left(x\right)\right]。\tag{38}$$

在选择了第一个训练点后，通过将原始学习函数与影响函数相乘，构建伪学习函数，可表示为

$$PH\left(x,\ x_1^*\right)=H\left(x\right)\cdot IF\left(x,\ x_1^*\right)。\tag{39}$$

根据式（39），第二个训练点可表示为

$$x_2^*=\arg\max\left[H\left(x,\ x_1^*\right)\right]。\tag{40}$$

随着过程的进行，将前 $i-1$ 个训练点加入样本集后，*PH* 可表示为

$$\begin{aligned}&PH\left(x,\ x_1^*,\ \cdots,\ x_{i-1}^*\right)=\\&\quad H\left(x\right)\cdot IF\left(x,\ x_1^*\right),\ \cdots,\ IF\left(x,\ x_{i-1}^*\right),\end{aligned}\tag{41}$$

第 i 个训练点可表示为

$$x_i^*=\arg\max\left[PH\left(x,\ x_1^*,\ \cdots,\ x_{i-1}^*\right)\right]。\tag{42}$$

重复上述过程，直到选择足够数量的训练点。通过并行加点的方式在每次迭代中选择多个训练点，从而显著减少计算运行次数，提高计算效率。

3.4　算法流程

并行加点准则自适应 Kriging 法可靠度计算流程如图 6 所示。

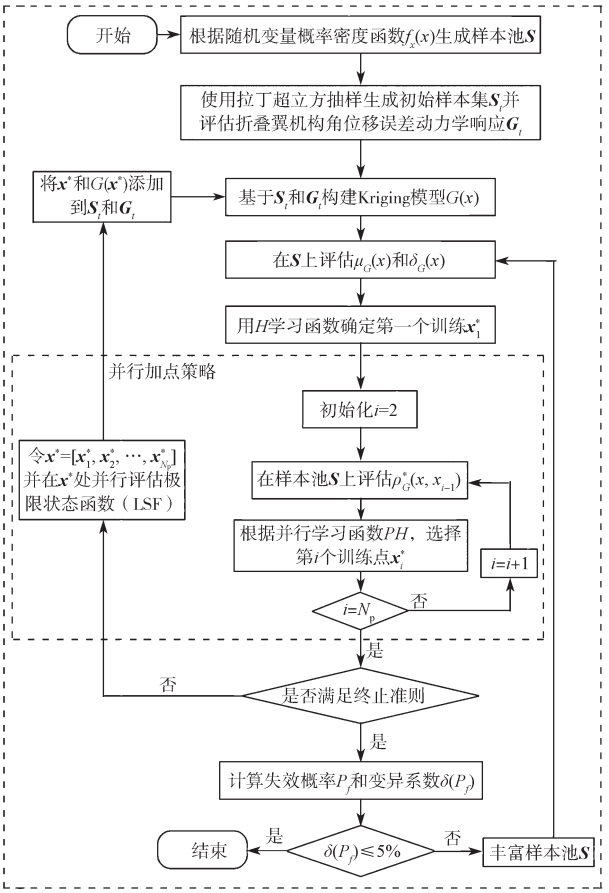


图 6　自适应 Kriging 法可靠度计算流程图

Fig. 6　Reliability calculation flowchart of adaptive Kriging method

自适应 Kriging 法可靠度计算流程步骤如下。

步骤 1　根据输入变量的联合概率密度函数 $f_x(x)$，生成一个大小为 x_{MCS} 的样本池 $\boldsymbol{S}$。

步骤 2　使用拉丁超立方抽样生成一个大小为 N_0 初始样本集 $\boldsymbol{S}_t$，并评估折叠翼机构动力学响应 $\boldsymbol{G}_t$。

步骤 3　基于初始样本训练集 $\boldsymbol{S}_t$ 和响应 $\boldsymbol{G}_t$，构建初始 Kriging 模型$G\left(x\right)$。

步骤 4　在样本池 S 上估计 Kriging 模型的均值 $\mu_G\left(x\right)$和标准差 $\delta_G\left(x\right)$。

步骤 5　根据 H 学习函数选择第一个训练点 $\boldsymbol{x}_1^*$，初始化 i=2。

步骤 6　在候选样本池 $\boldsymbol{S}$ 上评估 Kriging 模型的相关函数 $\rho_G^*\left(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x}_{i-1}\right)$。

步骤 7　据伪学习函数 *PH* 选择第 i 个训练点 $\boldsymbol{x}_i^*$。

步骤 8　若 i 未达到 N_{p} 则令 i=i+1，并返回步骤 6；否则，继续下一步。

步骤 9　检查停止条件是否满足终止准则 $\max\left[H\left(\boldsymbol{x}_i^*\right)\right]<0.1$，若满足，计算失效概率 P_f 和其变异系数 $\delta(P_f)$，并跳转到步骤 12；否则进行下一步。

步骤 10 在选定的训练点 $\boldsymbol{x}^*$ 上并行评估极限状态函数 $G(\boldsymbol{x}^*)$，以获取新样本点并更新 Kriging 模型。

步骤 11 将 $\boldsymbol{x}^*$ 和 $G(\boldsymbol{x}^*)$ 分别添加进训练点 $\boldsymbol{S}_t$ 和响应 $\boldsymbol{G}_t$ 中，然后返回步骤 3。

步骤 12 若 $\delta(P_f) \leqslant 5\%$，则输出失效概率 P_f 并结束算法；否则，生成另一组样本集成到样本池 $\boldsymbol{S}$ 中，然后返回步骤 4。

4 含间隙折叠翼机构实例分析

间隙值是影响带间隙机构运动可靠性的重要因素，用 Matlab 对第二节多体机构进行动力学求解，得到如图 7 所示折叠翼机构角位移误差动力学响应曲线。由图可知，随着间隙值增大折叠翼机构的角位移误差也增大，特别是折叠翼展开的起步阶段，角位移误差波动幅度较剧烈，表明间隙值增大会使轴与轴承间的碰撞更严重，这将降低折叠翼机构的运动精度。

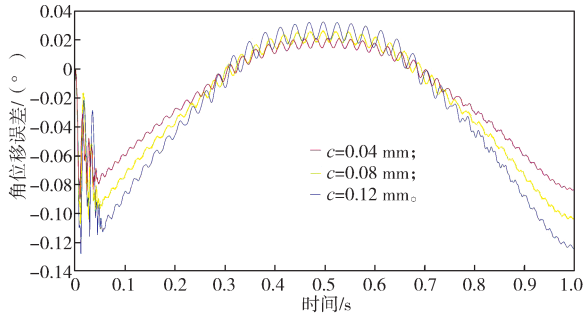
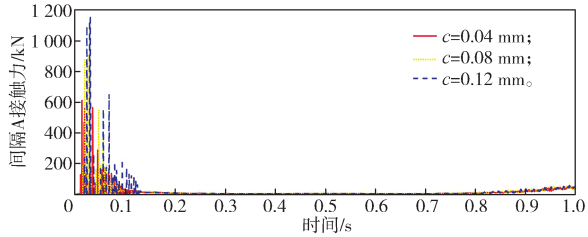


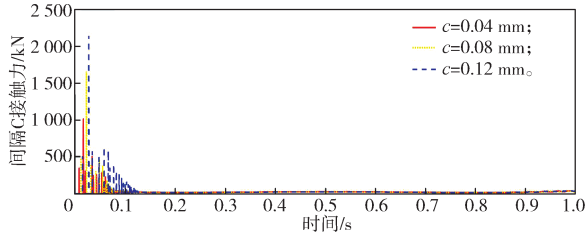
图 7 折叠翼间隙动力学响应曲线

Fig. 7 Dynamic response curves of the folded wing clearance

为深入解释间隙值对折叠翼机构运动的影响机制，探讨了不同间隙 A、C 转动副位置接触力的时程变化，所得结果如图 8 所示。



a）A 转动副



b）C 转动副

图 8 不同间隙值下的转动副接触力时程变化曲线

Fig. 8 Time-history curves of contact force of rotating pair under different clearance values

由图 8 可知，间隙值越大接触力峰值越高、冲击脉冲越密集。这与图 7 中的趋势相对应，其本质是小间隙时轴与轴承的相对运动空间受限，碰撞频率更高，瞬时冲击速度更大，导致接触力呈现高频冲击特性。随着间隙值增大，接触力峰值明显降低，且快速衰减至稳定值，说明大间隙下有更多的运动空间缓冲相对运动，碰撞冲击被削弱，但轴与轴承的相对运动量增大，反而导致角位移误差偏移量整体扩大。故建议将间隙值控制为 0.08~0.12 mm，此范围既能有效降低高频冲击对构件的损伤，又能将角位移误差控制在工程允许范围内，实现运动精度与机构稳定性平衡。

本研究对折叠翼展开机构在两种间隙情况下阈值为 0.12° 的角位移误差的可靠性进行了研究。折叠翼机构设计参数见表 1，运动副间隙参数见表 2。

表 1 折叠翼机构尺寸及结构参数

Table 1 Structural and dimensional parameters of the folding wing mechanism

构件	长度 /m	质量 /kg	转动惯量 /（kg·m²）
曲柄 1	0.3	0.588	0.004 41
连杆 2	0.4	0.784	0.010 45
曲柄 3	0.3	0.588	0.004 41
连杆 4	0.5	0.981	0.020 44
滑块 5	–	0.405	4.129E−04

表 2 运动副间隙参数

Table 2 Motion pair clearance parameters

参数	轴承半径 R/m	回复系数 c_e	泊松比	积分步长 /s
取值	0.015	0.9	0.3	0.000 1

本研究中，折叠翼机构通过改变其后掠角实现应对不同的飞行环境。后掠角的变形范围为（35°，75°），当折叠翼机构处于起步阶段时，运动副中的轴和轴承处于自由和碰撞状态，因此在间隙处会产生较大的碰撞力，对折叠翼的运动精度有很大的影响。因此，为了获得稳定的结果，对折叠翼机构的第一个运动周期内的运动精度进行了研究。

本算例中将间隙值、材料弹性模量及摩擦因数作为随机变量，其具体参数分布如表 3 所示。

表 3 随机变量参数分布

Table 3 Random variable parameter distribution

随机变量	均值	标准差	分布类型
间隙值 c_1/mm	0.1	0.002	正态
间隙值 c_2/mm	0.1	0.002	正态
弹性模量 /GPa	73	1	正态
摩擦因数	0.15	0.01	正态

本研究中，并行加点数 N_p 会直接影响计算迭代次数与效率，因此本文研究了 N_p=1, 2, 4, 6, 8 共 5 种情况，当 N_p=1 时，为传统串行加点策略，将其作为

基准比较。理论分析表明，迭代次数 N_i 与并行加点数 N_p 近似满足反比例关系，如式（43）所示：

$$N_i \approx \left(N_C - N_0\right)/N_p + 1 \circ \tag{43}$$

式中：N_i 为算法总迭代次数；N_0 为初始样本数；N_C 为极限状态函数的调用次数。

经多次计算发现，函数总调用次数 N_i 对所选并行加点数 N_p 的变化并不敏感。因此，计算迭代次数 N_i 与 N_p 之间可近似为反比关系。图 10 展示了 $1/N_p$ 随 N_p 变化的趋势，从中可看出，当 N_p 增加至 8 时，N_i 的下降幅度已趋于平缓，效率提升不再显著。综合计算资源与效率提升的平衡，本文建议将 N_p 的取值设为 4~6，以保证并行计算效益的同时，避免因点数过多导致的资源饱和与收益递减。

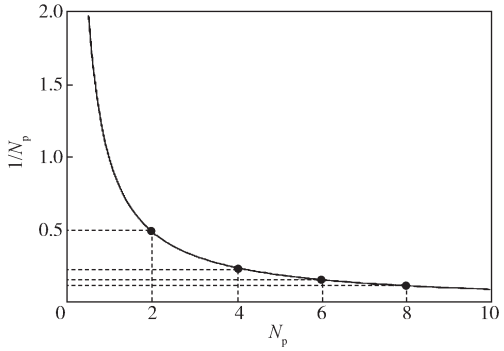


图 10　$1/N_p$ 随 N_p 的变化曲线

Fig. 10　Curves of $1/N_p$ versus N_p

表 4 列出了在传统蒙特卡罗法（MCS）和处于不同加点个数 N_p 情况下的失效概率计算结果，其中由 MCS 法计算得到的结果为精确解并用于检验。

表 4　失效概率计算结果

Table 4　Failure probability calculation results

N_p	方法	迭代次数	失效概率 /%	相对误差 /%	运行时间 /s
–	MCS	–	0.384	–	–
1	并行加点准则自适应 Kriging	31	0.383	0.26	527
2		24	0.376	2.13	373
4		17	0.375	2.40	264
6		15	0.394	2.54	190
8		14	0.387	0.78	177

由表 4 可得，通过将不同加点个数的结果与 MCS 法的结果进行比较，可发现本文提出的并行加点策略 Kriging 代理模型的计算精度表现良好，随着加点个数 N_p 增多，算法的迭代次数呈不断下降的趋势，算法所需运行时间总体也呈下降趋势，与传统的 MCS 法相比，提高了算法的计算效率。在并行加点环境下，本文提出的并行加点策略 Kriging 法是缩短算法计算周期的有效方法，但随着加点个数 N_p 的增多，可发现算法计算效率提升逐渐不明显，提升效率趋于饱和，甚至带来计算资源的浪费。

5　结论

本文基于并行加点策略的自适应 Kriging 模型与 Monte Carlo 模拟的可靠性分析方法，对含间隙的折叠翼机构运动精度进行了可靠性分析，考虑运动副间隙值大小、材料弹性模量、间隙摩擦因数对折叠翼机构在一个运动周期内最大角位移误差的影响，计算获得了可靠度，并得出以下结论：

1）使用第一类拉格朗日乘子法结合 L-N 碰撞模型和改进的 Coulomb 摩擦模型，可建立含间隙的折叠翼机构动力学方程。数值模拟结果表明，间隙值的增大会显著加剧轴与轴承之间的碰撞，导致角位移误差波动幅度增大，尤其在折叠翼展开的起步阶段，运动精度下降明显。

2）基于并行加点准则自适应 Kriging 方法建立折叠翼机构最大角位移误差极限状态函数是可靠的。

3）将传统的 MCS 法与并行加点策略自适应 Kriging 模型结果进行对比，可得本文提出的方法在保证计算精度的同时，显著提高了计算效率。

综上所述，本研究不仅揭示了含间隙折叠翼机构的动态特性与运动精度可靠性之间的关系，还为飞行器折叠翼机构的设计与优化提供了重要的理论支持和技术手段。未来的研究可进一步探索多间隙耦合效应及长期磨损对机构可靠性的影响。

参考文献：

[1] 胡　明，张苗苗，陈文华，等 . 考虑铰间隙的折叠翼展开机构展开过程碰撞动力学仿真分析 [J]. 机械制造，2011，49(9)：6-9.
HU Ming，ZHANG Miaomiao，CHEN Wenhua，et al. Simulation Analysis of Collision Dynamics in the Deployment Process of a Folding Wing Deployment Mechanism Considering Hinge Clearance[J]. Machine Building，2011，49(9)：6-9.

[2] 王博文，谢里阳，樊富友，等 . 考虑共因失效的折叠翼展开机构可靠度分析 [J]. 机械工程学报，2020，56(5)：161-171.
WANG Bowen，XIE Liyang，FAN Fuyou，et al. Reliability Analysis of Folding Wing Deployable Mechanism Considering Common Cause Failure[J]. Journal of Mechanical Engineering，2020，56(5)：161-171.

[3] 胡　明，章　斌，陈文华，等 . 基于 ADAMS/Insight 的折叠翼展开机构工作可靠性仿真 [J]. 机械设计，2016，33(6)：81-85.

HU Ming，ZHANG Bin，CHEN Wenhua，et al. Working Reliability Simulation of Folding-Wing Deployable Mechanism Based on ADAMS/Insight[J]. Journal of Machine Design，2016，33(6)：81−85.

[4] TIAN K Y，WANG Y L，CAO D Q，et al. Approximate Global Mode Method for Flutter Analysis of Folding Wings[J]. International Journal of Mechanical Sciences，2024，265：108902.

[5] WANG J G，GUO X Y. Research on the Flutter Characteristics of Folding Wings with Variable Swept Angles of the Outer Wing[J]. Aerospace Science and Technology，2024，155：109685.

[6] 王才东，张昊田，胡 坤，等 . 仿生折叠翼扑动过程气动特性分析 [J]. 机械设计与制造，2024(4)：286−290, 295.
WANG Caidong，ZHANG Haotian，HU Kun，et al. Analysis of Aerodynamic Characteristics of Bionic Folding Wing During Flapping[J]. Machinery Design & Manufacture，2024(4)：286−290, 295.

[7] 余江鸿，马文涛，易永胜，等 . 基于 Archard 模型的飞行器折叠翼含间隙铰链磨损特性研究 [J/OL]. 润滑与密封，2024：1−10. (2024−10−30)[2025−10−16]. https://link.cnki.net/ urlid/44.1260.th.20241029.0926.002.
YU Jianghong，MA Wentao，YI Yongsheng，et al. Research on the Wear Characteristics of Folding Wings with Gap Hinge in Aircraft Based on the Archard Model[J/OL]. Lubrication Engineering，2024：1−10. (2024−10−30)[2025−10−16]. https://link.cnki.net/urlid/44.1260.th.20241029.0926.002.

[8] 金国光，王志敏，畅博彦，等 . 含间隙变胞机构动力学建模与平稳性分析 [J]. 机械工程学报，2024，60(21)：144−155.
JIN Guoguang，WANG Zhimin，CHANG Boyan，et al. Dynamic Modeling and Stationarity Analysis of Metamorphic Mechanism with Clearance Joint[J]. Journal of Mechanical Engineering，2024，60(21)：144−155.

[9] 万 琦，张永芳，朱成龙 . 多间隙铰链印刷机递纸机构动力学特性研究 [J]. 机械传动，2024，48(9)：43−48, 75.
WAN Qi，ZHANG Yongfang，ZHU Chenglong. Research on the Dynamic Characteristics of the Gripper Mechanism with Multi Clearance Joints for Printing Machines[J]. Journal of Mechanical Transmission，2024，48(9)：43−48, 75.

[10] GENG X Y，LI M，LIU Y F，et al. Non-Probabilistic Kinematic Reliability Analysis of Planar Mechanisms with Non-Uniform Revolute Clearance Joints[J]. Mechanism and Machine Theory，2019，140：413−433.

[11] ZHANG H W，LUO Z，YAO S B，et al. Dynamic Response and Chaos Analysis of a Spatial Multi-Body System with Multiple Clearance Joints and a Flexible Component[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation，2025，145：108699.

[12] WU J N，YAN S Z，ZUO M J. Evaluating the Reliability of Multi-Body Mechanisms：A Method Considering the Uncertainties of Dynamic Performance[J]. Reliability Engineering & System Safety，2016，149：96−106.

[13] 陈修龙，张 昊，樊慧凯 . 考虑球面副磨损间隙的空间并联机构动力学响应分析 [J]. 振动工程学报，2025，38(3)：490−498.
CHEN Xiulong，ZHANG Hao，FAN Huikai. Dynamic Response Analysis of Spatial Parallel Mechanism Considering Wear Clearance of Spherical Joint[J]. Journal of Vibration Engineering，2025，38(3)：490−498.

[14] 查从燚，孙志礼，潘陈蓉，等 . 面向结构可靠性分析的并行自适应加点策略 [J]. 东北大学学报（自然科学版），2023，44(1)：76−81, 88.
ZHA Congyi，SUN Zhili，PAN Chenrong，et al. Parallel Adaptive Sampling Strategy for Structural Reliability Analysis[J]. Journal of Northeastern University (Natural Science)，2023，44(1)：76−81, 88.

[15] 张建侠，马义中，欧阳林寒，等 . 基于 Kriging 模型的多点加点准则和并行代理优化算法 [J]. 系统工程理论与实践，2020，40(1)：251−261.
ZHANG Jianxia，MA Yizhong，OUYANG Linhan，et al. A Multi-Points Infill Sampling Criterion and Parallel Surrogate-Based Optimization Algorithm Based on Kriging Model[J]. Systems Engineering-Theory & Practice，2020，40(1)：251−261.

[16] JIANG S，CHEN X L. Reducing Undesirable Effects of Clearances on Dynamic and Wear of Planar Multi-Link Mechanism[J]. Nonlinear Dynamics，2020，100(2)：1173−1201.

[17] ZHAO Z Q，XIE L Y，ZHAO B F，et al. Reliability Evaluation of Folding Wing Mechanism Deployment Performance Based on Improved Active Learning Kriging Method[J]. Probabilistic Engineering Mechanics，2023，74：103547.

[18] BAUMGARTE J. Stabilization of Constraints and Integrals of Motion in Dynamical Systems[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering，1972，1(1)：1−16.

[19] LÜ Z Y，LU Z Z，WANG P. A New Learning Function for Kriging and Its Applications to Solve Reliability Problems in Engineering[J]. Computers & Mathematics with Applications，2015，70(5)：1182−1197.

（责任编辑：廖友媛）