第 39 卷第 6 期 湖 南 工 业 大 学 学 报 Vol.39 No.6
2025 年 11 月 Journal of Hunan University of Technology Nov. 2025

doi:10.3969/j.issn.1673-9833.2025.06.012

一类新的高精度数值积分公式

张红梅，张 昊

（湖南工业大学 理学院，湖南 株洲 412007）

摘 要：首先，利用积分区间中 3 个节点处的函数值和一、二阶导数值，构造了一种具有 9 次代数精度的数值积分公式。然后给出该公式的复合公式和加速公式，对于每个新的数值积分公式都给出了误差分析，并给出加速数值积分公式的收敛阶 ($O(h^{10})$)。最后通过几个数值算例验证了这些公式的高效性。

关键词：计算数学；数值积分；复合公式；代数精度

中图分类号：O241.4 **文献标志码**：A **文章编号**：1673-9833(2025)06-0080-07

引文格式：张红梅，张 昊 . 一类新的高精度数值积分公式 [J]. 湖南工业大学学报，2025，39(6)：80-86.

A Newly Proposed High-Precision Numerical Integration Formula

ZHANG Hongmei，ZHANG Hao

（School of Science，Hunan University of Technology，Zhuzhou Hunan 412007，China）

Abstract：By using the function values at three nodes in the integration interval and the 1st and 2nd-order derivative values, a numerical integration formula with 9-degree algebraic accuracy has thus been constructed firstly in this current research. Then, a composite formula and acceleration formula are provided for this proposed formula, followed by an error analysis for each new numerical integration formula, with ($O(h^{10})$) the given convergence order of the accelerated numerical integration formula. Finally, the high efficiency of these formulas is verified through several numerical examples.

Keywords：computational mathematics；numerical integration；compound formula；algebraic precision

物理学中面对变力所做的功、液体的静压力、转动惯量、质量、质心等的计算问题都离不开定积分。这些定积分通常使用牛顿-莱布尼茨公式计算。但是，在研究金融问题时，常有分布函数的计算，而这些分布函数通常是一些复杂函数的定积分；还有在信号处理、系统工程理论、科学与工程计算、小波分析等应用领域中将大量用到定积分的计算。这些定积分通常也存在如下困难：1）被积函数没有完整的解析表达式，甚至常用函数列表的形式给出；2）被积函数没有初等原函数；3）被积函数的解析式非常复杂，很难求出其原函数 [1]。这些定积分通常无法用牛顿 - 莱布尼茨公式计算，只能通过数值求积公式来求数值解。数值积分方法是根据黎曼积分等相关数学原理，采用数值逼近的方法近似计算定积分的值。借助电子计算机设备，好的数值积分公式可以快速高效地计算复杂的定积分。因而构造高精度的数值求积公式是非常有实际应用价值的。受文献 [2-12] 的启发，本文利用一阶、二阶导数构造了 3 个节点满足 9 个条件的一种新型数值积分公式，并验证了该公式具有 9 阶代数精度，同时给出其复合公式和加速公式，对每个公式进行误差分析，最后通过几个典型例子验证这些公式的高效性。

1 数值积分公式分析

首先，假设被积函数 $f(x)$ 在积分区间 $[a, b]$ 上对应节点处的函数值和一、二阶导数值存在，$f(a)$、

收稿日期：2024-05-31

基金项目：湖南省教育厅基金资助重点项目（23A0443）；湖南省教育改革基金资助项目（HNJG-20230754）

作者简介：张红梅，女，湖南工业大学副教授，博士，主要研究方向为偏微分方程数值解，E-mail：1045562230@qq.com

$f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$、$f(b)$ 为 $f(x)$ 在求积节点处对应的函数值，$f'(a)$、$f'(b)$ 为对应一阶导数的函数值，$f''(a)$、$f''\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$、$f''(b)$为对应二阶导数的函数值。

由文献 [4] 可得求积公式为

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = h\left[\frac{7}{15}f(a)+\frac{16}{15}f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{7}{15}f(b)\right]+ h^2\left[\frac{1}{15}f'(a)-\frac{1}{15}f'(b)\right]+E(f),\quad h=\frac{b-a}{2}。\tag{1}$$

由参考文献 [2] 得如下求积公式：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = h\left[\frac{5}{21}f(a)+\frac{32}{21}f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{5}{21}f(b)\right]+ h^3\left[-\frac{1}{315}f''(a)+\frac{32}{315}f''\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{1}{315}f''(b)\right]+ E(f),\quad h=\frac{b-a}{2}。\tag{2}$$

维持相同的计算复杂程度，仿照式（1）~（2）构造了求积公式（3）：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = h\left[\frac{1}{2}f(a)+\frac{1}{2}f(b)\right]+h^2\left[\frac{1}{10}f'(a)- \frac{1}{10}f'(b)\right]+h^3\left[\frac{1}{120}f''(a)+\frac{1}{120}f''(b)\right]+ E(f),\ h=b-a。\tag{3}$$

将 $f(x)=1, x, x^2, \cdots$分别代入以上 3 个求积公式中，分别求得式（1）具有 5 次代数精度，式（2）具有 7 次代数精度，式（3）具有 5 次代数精度。

通过对比分析，得到如下影响数值求积公式代数精度的几点结论：1）增加积分区间中求积节点的个数可以提高公式的代数精度（参照式（2）与（3））；2）运用求积节点处二阶导数值所构造的求积公式相对来说比运用一阶导数值构造的公式代数精度更高（参照式（1）与（2））；3）无论是求积区间中求积节点的个数，还是求积节点处的导数值是否加入都会对求积公式的代数精度产生影响；4）一般来说，增加被积函数在已知点的信息量，相应地，所构造出的求积公式的代数精度也会随之提高。

构造数值积分公式既不能使被积函数在已知节点处信息量太多，使得所构造的公式计算量增加，也不能因使用被积函数的信息量太少，使得所构造的求积公式代数精度太低。本文利用求积区间中 3 个求积节点处的函数值、一阶和二阶导数值，共 9 个已知量，构造出一种新的高精度数值积分公式，且该公式的代数精度远高于公式（1）~（3）和文献 [2-6] 中的公式。

2　新的高精度数值积分公式

通过上一小节的分析发现，如果想提高数值积分公式的代数精度，可以通过增加求积节点达到目标，例如文献 [3] 中构造的公式就是在式（1）的基础上增加到 4 个求积节点，使得代数精度从 5 次提高到 7 次。现通过增加一个节点对式（3）进行改进，使其代数精度从 5 次提高到 9 次。通过增加少量的节点，可以极大地提高数值积分公式的代数精度。

2.1　数值积分公式的构造

为便于误差分析，假设被积函数 $f(x)$ 在积分区间 $[a, b]$ 上足够光滑，设数值积分式的形式表达式为

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = h\left[A_0 f(a)+A_1 f\left(\frac{a+b}{2}\right)+A_2 f(b)\right]+ h^2\left[B_0 f'(a)+B_1 f'\left(\frac{a+b}{2}\right)+B_2 f'(b)\right]+ h^3\left[C_0 f''(a)+C_1 f''\left(\frac{a+b}{2}\right)+C_2 f''(b)\right]+E(f)。\tag{4}$$

式中：$h=(b-a)/2$、A_i、B_i、C_i、$(i=0, 1, 2)$，为待定参数；$E(f)$ 为误差项。

现需确定式（4）中的 9 个待定参数 A_i、B_i、C_i、$(i=0, 1, 2)$，使得求积公式具有尽可能高的代数精度。为此，令 $E(x^m)=0$, $m=0, 1, \cdots, 8$，即式（4）对 $f(x)=1, x, x^2, \cdots, x^8$ 精确成立，由此得到一个 9 阶的线性方程组，并求解该线性方程组，得：

$$A_0=A_2=41/105,\quad A_1=128/105;$$
$$B_0=2/35,\ B_1=0,\ B_2=-2/35;$$
$$C_0=C_2=1/315,\ C_1=16/315。$$

于是可以得到数值求积公式，为

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx h\left[\frac{41}{105}f(a)+\frac{128}{105}f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{41}{105}f(b)\right]+ h^2\left[\frac{2}{35}f'(a)-\frac{2}{35}f'(b)\right]+h^3\left[\frac{1}{315}f''(a)+ \frac{16}{315}f''\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{1}{315}f''(b)\right]。\tag{5}$$

当 $f(x)=x^9$ 时，该公式也精确成立，但当 $f(x)=x^{10}$ 时，该公式不成立。因此，式（5）具有 9 次代数精度。为了估计上述公式的截断误差，需要用到广义皮亚诺（Peano）定理。

广义皮亚诺（Peano）定理[7]：设截断误差 $E(f)$ 是空间 $C^{m+1}[a, b]$ 上的线性泛函，且 $E(f)=0$ 的代数精度为 m，那么对于任意 $f(x)\in C^{m+1}[a, b]$，有 $E(f)=E[e(x)]$。其中：

$$e(x)=\frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_m),$$

式中：$x_0, x_1, \cdots, x_m$ 为 $[a, b]$ 上任意点；ξ 为 $x_0, x_1, \cdots, x_m, x$ 之间且与 $x_0, x_1, \cdots, x_m, x$ 的选取有关的任意点。

由于式（5）具有 9 次代数精度，根据广义皮亚诺（Peano）定理，得误差为

$$E(f)=E(e(x))=\int_a^b e(x)\mathrm{d}x=\int_a^b \frac{f^{(10)}(\xi)}{10!}(x-a)^3(x-a-h)^4(x-b)^3\mathrm{d}x, \tag{6}$$

式中：$\xi\in(a, b)$，且与 a、$a+h$、b、x 有关。

由积分中值定理，令 $x=a+(t+1)h$，则误差公式（6）可化为

$$E(f)=\frac{f^{(10)}(\eta)}{10!}\int_a^b(x-a)^3(x-a-h)^4(x-b)^3\mathrm{d}x=h^{11}\frac{f^{(10)}(\eta)}{10!}\int_{-1}^{1}(t+1)^3t^4(t-1)^3\,\mathrm{d}t=-\frac{h^{11}}{130\ 977\ 000}f^{(10)}(\eta),\quad a<\eta<b。\tag{7}$$

2.2 数值积分公式的复合公式

由式（7）可知，当 $h=(b-a)/2$ 越大，即积分区间 $[a, b]$ 的长度越大时，截断误差 $E(f)$ 的绝对值也会增加，求积公式（5）的精度则会降低。为了控制误差，需减小 h 的值，在 $[a, b]$ 长度不变的情况下，可以通过将 $[a, b]$ 剖分成多个子区间，每个子区间上应用式（5），从而达到减少 h、提高求积公式精度的目标，也得到了式（5）的复合公式。

将积分区间 $[a, b]$ 分成 $2n$ 等份，记求积节点

$$x_i=a+ih_1,\ i=0, 1, \cdots, 2n,\ h_1=(b-a)/2n。$$

在每个小区间 $[x_{2i-2}, x_{2i}]$$(i=1, 2, \cdots, n)$ 上应用式（5）可得：

$$I=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}}f(x)\mathrm{d}x\approx I_n,$$

$$\begin{aligned}I_n=&\sum_{i=1}^{n}\Bigg\{h_1\left[\frac{41}{105}f(x_{2i-2})+\frac{128}{105}f(x_{2i-1})+\frac{41}{105}f(x_{2i})\right]+\\&h_1^2\left[\frac{2}{35}f'(x_{2i-2})-\frac{2}{35}f'(x_{2i})\right]+\\&h_1^3\left[\frac{1}{315}f''(x_{2i-2})+\frac{16}{315}f''(x_{2i-1})+\frac{1}{315}f''(x_{2i})\right]\Bigg\}=\\&\frac{b-a}{210n}\left[41\sum_{i=1}^{n}f(x_{2i-2})+128\sum_{i=1}^{n}f(x_{2i-1})+41\sum_{i=1}^{n}f(x_{2i})\right]+\\&\frac{(b-a)^2}{140n^2}\left[2\sum_{i=1}^{n}f'(x_{2i-2})-2\sum_{i=1}^{n}f'(x_{2i})\right]+\\&\frac{(b-a)^3}{2\,520n^3}\left[\sum_{i=1}^{n}f''(x_{2i-2})+16\sum_{i=1}^{n}f''(x_{2i-1})+\sum_{i=1}^{n}f''(x_{2i})\right]。\end{aligned}$$

将上式整理如下：

$$\begin{aligned}I\approx I_n=&\frac{41(b-a)}{210n}\cdot\left[f(a)+f(b)+2\sum_{i=1}^{n-1}f(x_{2i})+\frac{128}{41}\sum_{i=1}^{n}f(x_{2i-1})\right]+\\&\frac{(b-a)^2}{70n^2}\left[f'(a)-f'(b)\right]+\frac{(b-a)^3}{2\,520n^3}\Bigg[f''(a)+\\&f''(b)+2\sum_{i=1}^{n-1}f''(x_{2i})+16\sum_{i=1}^{n}f''(x_{2i-1})\Bigg]。\end{aligned}\tag{8}$$

在复合式（8）中：

1）令 $J_1=\frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1}f(x_{2i})$ 或 $J_1=\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}f(x_{2i})$，$J_2=\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}f(x_{2i-1})$，则它们都是 $f(x)$ 相应于区间 $[a, b]$ 的分割 $[x_0, x_2], \cdots, [x_{2n-2}, x_{2n}]$ 的一个黎曼和。由定积分定义可知，当 $n\to\infty$ 时，J_1、J_2 都收敛于 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$。

2）令 $H_1=\frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1}f''(x_{2i})$ 或 $H_1=\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}f''(x_{2i})$，$H_2=\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}f''(x_{2i-1})$，则它们都是 $f''(x)$ 相应于区间 $[a, b]$ 的分割 $[x_0, x_2], \cdots, [x_{2n-2}, x_{2n}]$ 的一个黎曼和。由定积分定义可知，当 $n\to\infty$ 时，H_1、H_2 都收敛于积分 $\int_a^b f''(x)\mathrm{d}x=f'(b)-f'(a)$。

综上可知，当 $n\to\infty$ 时，由于 J_1、J_2 系数相加等于 1，并且由于：

1）$\frac{(b-a)^2}{70n^2}\left[f'(a)-f'(b)\right]\to 0,\ n\to\infty$；

2）$\frac{(b-a)^3}{2\,520n^3}\left[f''(a)+f''(b)+2\sum_{i=1}^{n-1}f''(x_{2i})+16\sum_{i=1}^{n}f''(x_{2i-1})\right]=\frac{(b-a)^2}{2\,520n^2}(2H_1+16H_2)\to 0,\ n\to\infty$。

所以复合公式（8）右端 I_n 收敛于积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，即复合公式（8）收敛。

假设 $f(x)\in C^{(10)}[a, b]$，由误差式（7）可知，复合求积公式的误差为

$$E_n(f)=-\frac{1}{130\ 977\ 000}\left(\frac{b-a}{2n}\right)^{11}\cdot n\cdot f^{(10)}(\eta_1)=-\frac{(b-a)^{11}}{268\ 240\ 896\ 000n^{10}}f^{(10)}(\eta_1)。\tag{9}$$

式中，$\eta_1\in(a, b)$ 且与每个小区间 $[x_{2i-2}, x_{2i}]$$(i=1, 2, \cdots, n)$ 中的 $\eta_1(i=1, 2, \cdots, n)$ 有关。

为了进一步提高复合求积公式（8）的收敛速度，可用外推法对式（8）进行推导，得到加速数值积分

公式。

2.3　加速数值积分公式

将积分区间 $[a, b]$ 再细分，剖分成 $4n$ 等份，记 $h_2=h_1/2=(b-a)/4n$，每个节点对应的坐标为 $x_i=a+ih_1(i=0, 1, 2, \cdots, 2n)$，及 $x_{i-1/2}=(x_{i-1}+x_i)/2\ (i=1, 2,\cdots, 2n)$。在每一个小区间 $[x_{2i-2}, x_{2i-1}]$ 和 $[x_{2i-1}, x_{2i}](i=1, 2, \cdots, n)$ 上分别应用式（5）得：

$$I=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\sum_{i=1}^{n}\left[\int_{x_{2i-2}}^{x_{2i-1}}f(x)\mathrm{d}x+\int_{x_{2i-1}}^{x_{2i}}f(x)\mathrm{d}x\right]\approx$$

$$\begin{aligned}I_{2n}=&\sum_{i=1}^{n}\left\{h_2\left[\frac{41}{105}f(x_{2i-2})+\frac{128}{105}f(x_{2i-3/2})+\frac{41}{105}f(x_{2i-1})\right]+\right.\\&h_2^2\left[\frac{2}{35}f'(x_{2i-2})-\frac{2}{35}f'(x_{2i-1})\right]+\\&\left.h_2^3\left[\frac{1}{315}f''(x_{2i-2})+\frac{16}{315}f''(x_{2i-3/2})+\frac{1}{315}f'(x_{2i-1})\right]\right\}+\\&\sum_{i=1}^{n}\left\{h_2\left[\frac{41}{105}f(x_{2i-1})+\frac{128}{105}f(x_{2i-1/2})+\frac{41}{105}f(x_{2i})\right]+\right.\\&h_2^2\left[\frac{2}{35}f'(x_{2i-1})-\frac{2}{35}f'(x_{2i})\right]+\\&\left.h_2^3\left[\frac{1}{315}f''(x_{2i-1})+\frac{16}{315}f''(x_{2i-1/2})+\frac{1}{315}f'(x_{2i})\right]\right\}。\end{aligned}$$

代入 h_2 得：

$$\begin{aligned}I_{2n}=&\frac{b-a}{420n}\left[41\sum_{i=1}^{n}f(x_{2i-2})+128\sum_{i=1}^{n}f\left(x_{2i-\frac{3}{2}}\right)+41\sum_{i=1}^{n}f(x_{2i-1})\right]+\\&\frac{(b-a)^2}{560n^2}\left[2\sum_{i=1}^{n}f'(x_{2i-2})-2\sum_{i=1}^{n}f'(x_{2i-1})\right]+\\&\frac{(b-a)^3}{20\,160n^3}\left[\sum_{i=1}^{n}f''(x_{2i-2})+16\sum_{i=1}^{n}f''(x_{2i-3/2})+\sum_{i=1}^{n}f''(x_{2i-1})\right]+\\&\frac{b-a}{420n}\left[41\sum_{i=1}^{n}f(x_{2i-1})+128\sum_{i=1}^{n}f(x_{2i-1/2})+41\sum_{i=1}^{n}f(x_{2i})\right]+\\&\frac{(b-a)^2}{560n^2}\left[2\sum_{i=1}^{n}f'(x_{2i-1})-2\sum_{i=1}^{n}f'(x_{2i})\right]+\\&\frac{(b-a)^3}{20\,160n^3}\left[\sum_{i=1}^{n}f''(x_{2i-1})+16\sum_{i=1}^{n}f''(x_{2i-1/2})+\sum_{i=1}^{n}f''(x_{2i})\right]。\end{aligned}$$

将上式合并并化简得：

$$\begin{aligned}I_{2n}=&\frac{b-a}{420n}\left[41\sum_{i=1}^{n}f(x_{2i-2})+128\sum_{i=1}^{n}f(x_{2i-3/2})+82\sum_{i=1}^{n}f(x_{2i-1})+\right.\\&\left.128\sum_{i=1}^{n}f(x_{2i-1/2})+41\sum_{i=1}^{n}f(x_{2i})\right]+\frac{(b-a)^2}{560n^2}\left[2\sum_{i=1}^{n}f'(x_{2i-2})-\right.\\&\left.2\sum_{i=1}^{n}f'(x_{2i})\right]+\frac{(b-a)^3}{20\,160n^3}\left[\sum_{i=1}^{n}f''(x_{2i-2})+16\sum_{i=1}^{n}f''(x_{2i-3/2})+\right.\\&\left.2\sum_{i=1}^{n}f''(x_{2i-1})+16\sum_{i=1}^{n}f''(x_{2i-1/2})+\sum_{i=1}^{n}f''(x_{2i})\right]。\end{aligned}\quad(10)$$

由式（9）可得式（10）的误差为

$$E_{2n}(f)=-\frac{2n}{130\,977\,000}\left(\frac{b-a}{4n}\right)^{11}\cdot 2n\cdot f^{(10)}(\eta_2)=-\frac{(b-a)^{11}}{274\,678\,677\,504\,000n^{10}}f^{(10)}(\eta_2)。\quad(11)$$

式中，$\eta_2\in(a, b)$ 且与每个小区间 $[x_{2i-2}, x_{2i-1}]$ 和 $[x_{2i-1}, x_{2i}](i=1, 2, \cdots, n)$ 中的 $\eta_j(j=1, 2, \cdots, 2n)$ 有关。

设 $f(x)\in C^{(10)}[a, b]$，并假定当 n 充分大时有 $f^{(10)}(\eta_1)\approx f^{(10)}(\eta_2)$，则有

$$\frac{I-I_{2n}}{I-I_n}\approx\frac{1}{1\,024},$$

即

$$I\approx\frac{1\,024}{1\,023}I_{2n}-\frac{1}{1\,023}I_n。$$

上式右端记为

$$\tilde{I}_{2n}=\frac{1\,024}{1\,023}I_{2n}-\frac{1}{1\,023}I_n。\quad(12)$$

式（12）为加速数值积分公式，其收敛速度要快于复合公式（8）。

下面给出加速数值积分公式（12）的误差项。

设 $\tilde{I}_{2n}$ 的余项为 $\tilde{E}_{2n}(f)$，且由于 $E_{2n}(f)<E_n(f)$，则：

$$\begin{aligned}\tilde{E}_{2n}(f)=&I-\tilde{I}_{2n}=I-\frac{1\,024}{1\,023}I_{2n}+\frac{1}{1\,023}I_n=\\&\frac{1\,024}{1\,023}(I-I_{2n})-\frac{1}{1\,023}(I-I_n)=\\&\frac{1\,024}{1\,023}E_{2n}(f)-\frac{1}{1\,023}E_n(f)<\\&\frac{1\,024}{1\,023}E_{2n}(f)-\frac{1}{1\,023}E_{2n}(f)=E_{2n}(f),\end{aligned}$$

即 $\tilde{E}_{2n}(f)<E_{2n}(f)$。所以 $\tilde{I}_{2n}$ 是比 I_{2n} 及 I_n 更好地接近于真实值 I 的一个近似值，这从理论上证明了加速数值积分公式（12）的收敛性。由公式（9）和（11），可得其误差为

$$\begin{aligned}\tilde{E}_{2n}(f)=&I-\tilde{I}_{2n}=\frac{1\,024}{1\,023}E_{2n}(f)-\frac{1}{1\,023}E_n(f)=\\&\frac{1}{1\,023}\left(-\frac{1}{130\,977\,000}\right)\cdot n\cdot h_1^{11}\left[f^{(10)}(\eta_2)-f^{(10)}(\eta_1)\right]。\end{aligned}$$

对于上述的误差进行估计，有如下定理 1。

定理 1　设函数 $f(x)\in C^{(10)}[a, b]$、$h_1=(b-a)/2n$、$M=\max\limits_{x\in[a,b]}\left|f^{(10)}(x)\right|$，则式（12）有如下误差估计式：

$$\left|\tilde{E}_{2n}(f)\right|=\left|I-\tilde{I}_{2n}\right|\leqslant\frac{b-a}{133\,989\,471\,000}Mh_1^{10},$$

即说明收敛阶至少 $O(h^{10})$。

3　数值实验

为了比较所构造的数值积分式（5）（8）（12）的高效性，下面给出几个具有代表性的数值算例。在以下算例中，计算误差为近似值(数值计算结果)与准确值之差的绝对值。

算例 1　计算 $I=\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$。

积分精确值：

I=0.785 398 163 397 448 309 615 660；

运用式（5）所得到的近似值为

0.785 398 412 698 412 698 412 698；

运用式（5）所得计算误差为 $2.493\ 010\times10^{-7}$。

表 1　算例 1 的数值结果

Table 1　Numerical results of example 1

剖分数 n	计算结果	
	公式（8）	公式（12）
1	0.785 398 412 698 412 698 412	0.785 398 166 151 925 124 499
2	0.785 398 166 392 693 178 770	0.785 398 163 394 491 272 742
3	0.785 398 163 402 431 263 371	0.785 398 163 397 442 741 133
4	0.785 398 163 397 419 204 291	0.785 398 163 397 448 298 695
5	0.785 398 163 397 444 028 654	0.785 398 163 397 448 309 560
6	0.785 398 163 397 447 612 736	0.785 398 163 397 448 309 618
8	0.785 398 163 397 448 270 283	0.785 398 163 397 448 309 615

表 2　算例 1 的计算误差

Table 2　Numerical errors of example 1

剖分数 n	计算结果	
	公式（8）	公式（12）
1	2.493 010 × 10E−7	2.754 477 × 10E−9
2	2.995 245 × 10E−9	2.957 037 × 10E−12
3	4.982 954 × 10E−12	5.568 483 × 10E−15
4	2.910 532 × 10E−14	1.091 972 × 10E−17
5	4.280 962 × 10E−15	5.509 721 × 10E−20
6	6.968 789 × 10E−16	2.911 155 × 10E−21
8	3.933 222 × 10E−17	2.439 971 × 10E−23

由表 1 和表 2 的结果可以得出，本文所构造的新型数值积分的复合公式（8）比其在单区间上的公式（5）收敛速度要快很多，并且随着剖分数的增加，其计算精度越来越高。同时，数值积分的加速公式（12）的收敛速度远远快于复合公式（8），这恰恰从实际计算方面验证了外推法的有效性。

算例 2　计算 $I=\int_0^1 \cos x\mathrm{d}x$。

积分精确值：I=0.841 470 984 807 896 506 653。

运用式（5）所得近似值为

0.841 470 984 804 645 795 230；

运用式（5）所得计算误差为 $3.250\ 711\times10^{-12}$。

表 3　算例 2 的数值结果

Table 3　Numerical results of example 2

剖分数 n	计算结果	
	公式（8）	公式（12）
1	0.841 470 984 804 645 795 230	0.841 470 984 807 896 591 267
2	0.841 470 984 807 893 416 696	0.841 470 984 807 896 515 014
3	0.841 470 984 807 896 467 441	0.841 470 984 807 896 509 285
4	0.841 470 984 807 896 503 655	0.841 470 984 807 896 506 653

表 4　算例 2 的计算误差

Table 4　Numerical errors of example 2

剖分数 n	计算结果	
	公式（8）	公式（12）
1	3.250 711 × 10E−12	8.461 497 × 10E−17
2	3.089 956 × 10E−15	8.361 714 × 10E−18
3	3.921 088 × 10E−17	2.633 000 × 10E−18
4	2.997 951 × 10E−18	8.609 692 × 10E−23

从表 3 和表 4 的结果同样可以得出与算例 1 的相关结论，不同点在于：对于这种光滑性很好的函数来说，本文所构造的新型数值积分公式有很好的适用性，从表 4 所示结果可以看出，只需剖分一次（n=2），其复合公式（8）就具有数量级为 10^{-15} 的计算误差。

算例 3　计算 $I=\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$。

积分精确值：

I=0.946 083 070 367 183 014 941 353 313；

运用式（5）所得近似值为

0.946 083 070 366 880 948 675 586 426；

运用式（5）所得计算误差为 $3.020\ 663\times10^{-13}$。

表 5　算例 3 的数值结果

Table 5　Numerical results of example 3

剖分数 n	计算结果	
	公式（8）	公式（12）
1	0.946 083 070 366 880 948 675	0.946 083 070 367 183 021 523
2	0.946 083 070 366 880 948 675	0.946 083 070 367 183 014 943

表 6　算例 3 的计算误差

Table 6　Numerical errors of example 3

剖分数 n	计算结果	
	公式（8）	公式（12）
1	3.020 663 × 10E−13	6.581 867 × 10E−18
2	2.884 111 × 10E−16	1.688 024 × 10E−21

上述数值计算结果表明，本文所构造的数值积分式（5）（8）（12）的精度都较高，加速式（12）的收敛速度远远快于复合式（8），复合式（8）的收敛速度快于式（5），式（5）是直接积分公式，其结果误差至少达 10^{-7}，表明精度已能满足通常需要。

4 对比分析

从计算精度角度比较，所得结果见表 7~9：

表 7　不同公式在算例 1 中的计算误差比较

Table 7　Numerical error comparison of different formulas in example 1

公　式		计算误差
文献 [2]	公式（2）	4.151 914 × 10E−5
	式（2）的复合公式 (n=2)	9.515 825 × 10E−8
本文公式	公式（5）	2.493 010 × 10E−7
	复合公式（8）(n=2)	2.995 245 × 10E−9

表 8　不同公式在算例 2 中的计算误差比较

Table 8　Numerical error comparison of different formulas in example 2

公　式		计算误差
文献 [3]	复合公式（4）(n=2)	4.839 906 × 10E−12
	复合公式（4）(n=4)	1.998 401 × 10E−14
本文公式	复合公式（8）(n=2)	3.089 956 × 10E−15
	复合公式（8）(n=4)	2.997 951 × 10E−18

表 9　不同公式在算例 3 中的计算误差比较

Table 9　Numerical error comparison of different formulas in example 3

公　式		计算误差
文献 [2]	公式（2）	4.888 000 × 10E−10
	式（2）的复合公式 (n=2)	1.869 543 × 10E−12
	式（2）的复合公式 (n=4)	7.143 701 × 10E−15
	式（2）的复合公式 (n=8)	7.274 861 × 10E−17
文献 [3]	复合式 (n=2)	8.089 995 × 10E−11
	复合公式 (n=4)	9.990 009 × 10E−12
	加速公式 (n=2)	1.305 001 × 10E−11
本文公式	公式（5）	3.020 663 × 10E−13
	复合公式（8）(n=2)	2.884 111 × 10E−16
	复合公式（8）(n=4)	0
	复合公式（8）(n=8)	0
	加速公式（12）(n=2)	1.688 024 × 10E−21

注：表格中 0 表示误差极小，几乎接近于 0。

从表 7~9 的对比结果可知：本文构造的新型数值积分式（5）（8）（12）的计算精度远高于相关文献中已有的数值积分公式的计算精度。

从代数精度角度比较：文献 [2] 中数值积分式的代数精度为 7 次，文献 [3] 中数值积分式的代数精度也为 7 次，文献 [4] 中数值积分式的代数精度为 5 次，文献 [5] 中数值积分式的代数精度为 7 次，而本文所构造的数值积分式（5）的代数精度为 9 次，远高于这些文献中数值积分式的代数精度。

从加速公式的收敛速度 (收敛阶) 角度比较：文献 [2] 中加速公式的收敛阶为 $O(h^8)$，文献 [3] 中加速公式的收敛阶同样为 $O(h^8)$，文献 [4] 中加速公式的收敛阶为 $O(h^6)$，文献 [5] 中加速公式的收敛阶为 $O(h^8)$，而本文所构造的数值积分式的加速式（12）的收敛阶为 $O(h^{10})$，远高于这些文献中已有的数值积分式的加速公式的收敛阶，即本文所构造的加速公式收敛速度更快。

综上，无论从计算精度、代数精度、收敛速度（收敛阶）角度进行比较，本文所构造的数值积分公式都明显优于其他文献中的公式。

5 结论

数值积分是用数值逼近的方法近似计算一个积分的数值结果。无论是在数学领域，还是在工程应用领域，数值积分都占有极其重要的地位。

本文通过分析和推导一些带有导数值的数值积分公式，构造了具有更高代数精度的数值积分公式。并通过复合和外推法给出对应的复合公式和加速公式，对每个公式都进行了误差分析，得出对应的误差估计式。最后，通过几个经典的数值算例验证了公式的高效性。

参考文献：

[1] 张红梅，尹江华 . 定常线性薛定谔方程的一种高精度数值解法 [J]. 湖南工业大学学报，2023，37(6)：69−73，102.
ZHANG Hongmei，YIN Jianghua. A High-Precision Numerical Solution Method for the Linear Steady Schrö dinger Equation[J]. Journal of Hunan University of Technology，2023，37(6)：69−73，102.

[2] 陈亚婷，冀德刚，贾　鹂，等 . 利用二阶导数构造的数值积分公式 [J]. 河北大学学报（自然科学版），2014，34(4)：347−350，356.
CHEN Yating，JI Degang，JIA Li，et al. Numerical Integration Formula by Second Derivative[J]. Journal of Hebei University (Natural Science Edition)，2014，34(4)：347−350，356.

[3] 徐　伟，郑华盛，李　曦 . 一类新的高精度数值积分公式的构造 [J]. 数学的实践与认识，2012，42(18)：207−215.
XU Wei，ZHENG Huasheng，LI Xi. Constructions of New High Accurate Numerical Integration Formula[J]. Mathematics in Practice and Theory，2012，42(18)：207−215.

[4] 郑华盛，唐经纶，危　地 . 高精度数值积分公式的构造及其应用 [J]. 数学的实践与认识，2007，37(15)：141−148.
ZHENG Huasheng，TANG Jinglun，WEI Di.

Constructions of High Accurate Numerical Integration Formula and Its Applications[J]. Mathematics in Practice and Theory，2007，37(15)：141-148.

[5] 董 魁，李 星，吴呈良，等 . 数值积分公式的一种构造 [J]. 数学学习与研究，2016(19)：125-126.
DONG Kui，LI Xing，WU Chengliang，et al. A Construction of Numerical Integral Formula[J]. Shuxue Xuexi Yu Yanjiu， 2016(19)：125-126.

[6] 郑华盛，徐 伟 . 一种构建高精度求积公式的新策略 [J]. 江西科学，2012，30(5)：559-561，602.
ZHENG Huasheng，XU Wei. A New Tactics of Constructing High-Order Accurate Quadrature Formula[J]. Jiangxi Science，2012，30(5)：559-561，602.

[7] 邓建中 . 线性截断误差表达式的简化 [J]. 西安交通大学学报，1993，27(4)：83-89.
DENG Jianzhong. Simplyfying of the Expression for Truncation Errors[J]. Journal of Xi’an Jiaotong University，1993，27(4)：83-89.

[8] 龙爱芳，胡军浩 . 高精度数值求积公式的构造 [J]. 河南师范大学学报（自然科学版），2012，40(5)：31-34.
LONG Aifang，HU Junhao. Construction of High Accurate Numerical Integral Formula[J]. Journal of Henan Normal University (Natural Science Edition)，2012，40(5)：31-34.

[9] 龙爱芳，胡军浩 . 基于 Hermite 插值的高精度数值积分公式 [J]. 华侨大学学报（自然科学版），2013，34(3)：349-352.
LONG Aifang，HU Junhao. A High Accurate Numerical Integration Formula Base on Hermite Interpolation Formula[J]. Journal of Huaqiao University (Natural Science)，2013，34(3)：349-352.

[10] 许江浩，陈志坤，刘 斌 . 一个高精度数值积分公式 [J]. 四川理工学院学报 (自然科学版)，2011，24(2)：168-170.
XU Jianghao，CHEN Zhikun，LIU Bin. A Higher Order Accuracy Numerical Quadrature Rule[J]. Journal of Sichuan University of Science & Engineering (Natural Science Edition)，2011，24(2)：168-170.

[11] DEEB A，DUTYKH D. Numerical Integration of Navier-Stokes Equations by Time Series Expansion and Stabilized FEM[J]. Mathematics and Computers in Simulation，2025，233：208-236.

[12] 刘芙妍，颜 冰 . 一种新型多重积分数值计算的余项公式 [J]. 数学的实践与认识，2022，52(7)：265-272.
LIU Fuyan，YAN Bing. A New Type of Remainder Formula for Numerical Calculation of Multiple Integral[J]. Mathematics in Practice and Theory，2022，52(7)：265-272.

（责任编辑：姜利民）