

doi:10.3969/j.issn.1673-9833.2025.04.013

一类二维常系数反应扩散方程的 交替方向隐式差分方法

刘天源, 张海湘, 杨雪花, 刘 嘉, 张伟燕

(湖南工业大学 理学院, 湖南 株洲 412007)

摘 要: 对一类二维常系数反应扩散方程, 建立了 P-R 交替方向隐格式和 D'Yakonov 交替方向隐格式这两类交替方向隐式差分格式, 并应用能量分析法证明了差分格式解的存在性, 稳定性及收敛性。最后, 通过两个数值算例验证了理论结果。

关键词: 计算数学; 反应扩散方程; 有限差分格式; 能量分析法; 交替方向隐格式

中图分类号: O241.82

文献标志码: A

文章编号: 1673-9833(2025)04-0096-09

引文格式: 刘天源, 张海湘, 杨雪花, 等. 一类二维常系数反应扩散方程的交替方向隐式差分方法 [J]. 湖南工业大学学报, 2025, 39(4): 96-104.

Study on the Alternating Direction Implicit Difference Method for a Class of Two-Dimensional Constant Coefficient Reaction-Diffusion Equations

LIU Tianyuan, ZHANG Haixiang, YANG Xuehua, LIU Jia, ZHANG Weiyan

(College of Science, Hunan University of Technology, Zhuzhou Hunan 412007, China)

Abstract: In view of a class of two-dimensional constant coefficient reaction-diffusion equations, two types of alternating direction implicit difference schemes have thus been established: P-R alternating direction implicit scheme and D'Yakonov alternating direction implicit scheme. By adopting energy analysis method, the existence, stability, and convergence of the difference scheme solutions can be proved. Finally, the theoretical results are verified by two numerical examples.

Keywords: computational mathematics; reaction diffusion equation; finite difference scheme; energy analysis method; alternating direction implicit scheme

1 研究背景

近年来, 反应扩散方程的行波解研究已逐渐演变为应用数学与计算数学领域的重要研究方向。由于行波现象在生物系统、物理过程、化学工程, 以及流行

病学等跨学科领域中具有普遍存在性, 因此该研究方向展现出显著的理论价值和应用前景。具体而言, 行波解能够有效刻画生态系统中物种的空间扩张模式、物理系统中不同稳态间的过渡行为、化学反应体系中物质浓度的动态演变以及传染病传播过程的时空演

收稿日期: 2024-06-18

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (12226340, 12226337, 12126321); 湖南省自然科学基金资助项目 (2024JJ7146, 2022JJ50083); 湖南省教育厅优秀青年基金资助项目 (21B0550)

作者简介: 刘天源, 男, 湖南工业大学硕士生, 主要研究方向为计算数学, E-mail: liutianyuan1121@163.com

通信作者: 张海湘, 男, 湖南工业大学副教授, 博士(后), 硕士生导师, 主要研究方向为大规模科学计算与应用, E-mail: hassenzhang@163.com

化规律等。因此, 对该方程行波解的分析不仅具有重要的理论意义, 更为相关实际问题的建模提供了坚实的数学基础^[1]。

一般情况下, 微分方程的精确解难以获取^[2-10]。于是, 构造高效且稳定的数值方法以求解此类方程, 并获得较精确的数值解, 是求解方程的另一种有效途径和手段。用有限差分方法(FDM)研究这类问题的数值解法目前已经有了许多工作。文献[2]研究了高效快速的数值方法求解3种类型的非线性扩散方程。文献[3]对于非线性的反应扩散方程的空间二阶导数, 建立了一种五点六阶差分格式。文献[4]提出了一种将六阶紧致FDM格式与保持强稳定性的四阶龙格-库塔方法相结合的数值方法, 并将其应用于求解非线性反应-扩散方程和对流-反应-扩散方程。文献[5]研究了四阶非线性 Extended Fisher-Kolmogorov 方程的两类非标准有限元方法。针对含弱奇异核的高维发展型方程, 文献[7]构建了一种交替方向隐式(ADI)欧拉数值格式。文献[8]进一步探讨了含弱奇异核的二维抛物型积分微分方程问题的 ADI-FDM 格式。相较于传统数值方法, 文献[9]运用了新型时空 Sinc 配点算法, 提出了四阶含奇异核的积分微分方程的高精度数值格式。文献[10]证明了 Burgers 方程的三层线性格式的守恒性和收敛性。

对于二维及以上维度的常系数反应扩散方程所建立的普通差分格式, 一般要用迭代法求解以大型稀疏矩阵为系数矩阵的线性方程组, 计算量较大, 并且随着迭代次数的升高, 一些迭代方法的误差也会升高, 稳定性条件也会更加苛刻^[11-18]。而 ADI 格式的构建能够将原格式的求解转换为连续求解多个以三对角矩阵为系数矩阵的线性方程组, 并且无条件稳定, 从而减小计算量, 节约计算时间。

本文主要考虑如下二维反应扩散方程的初边值问题:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - b \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + cu = f(x, y, t), \\ (x, y) \in \Omega, 0 < t \leq T; \quad (1) \\ u(x, y, 0) = \varphi(x, y), (x, y) \in \bar{\Omega}; \quad (2) \\ u(x, y, t) = \alpha(x, y, t), (x, y) \in \Gamma, 0 < t \leq T. \quad (3) \end{cases}$$

式中: a 、 b 、 c 均为正常数; $\Omega = (0, L_1) \times (0, L_2)$; Γ 为 Ω 的边界, 且当 $(x, y) \in \Gamma$ 时, $\alpha(x, y, 0) = \phi(x, y)$ 。

2 差分格式建立与分析

2.1 D'Yakonov ADI 格式建立

本节将对上述二维反应扩散方程(1)~(3)建

立 Crank-Nicolson ADI-FDM 格式。

取正整数 m_1 、 m_2 、 n , 并记 $h_1 = L_1/m_1$, $h_2 = L_2/m_2$, $\tau = T/n$, $x_i = ih_1$, $0 \leq i \leq m_1$, $y_j = jh_2$, $t_k = k\tau$,

$$0 \leq k \leq n. \quad \Omega_h = \{(x_i, y_j) | 0 \leq i \leq m_1, 0 \leq j \leq m_2\},$$

$$\Omega_\tau = \{t_k | 0 \leq k \leq n\}, \quad \omega = \{(i, j) | (x_i, y_j) \in \Omega\},$$

$$\gamma = \{(i, j) | (x_i, y_j) \in \Gamma\}, \quad \bar{\omega} = \omega \cup \gamma.$$

$$\text{此外, 记 } t_{k+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(t_k + t_{k+1}), \quad f_{ij}^{k+\frac{1}{2}} = f(x_i, y_j, t_{k+\frac{1}{2}}).$$

称 (x_i, y_j, t_k) 为结点。

设 $v = \{v_{ij}^k | 0 \leq i \leq m_1, 0 \leq j \leq m_2, 0 \leq k \leq n\}$ 为 $\Omega_h \times \Omega_\tau$ 上的网格函数, 引入如下记号:

$$v_{ij}^{k+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(v_{ij}^k + v_{ij}^{k+1}), \quad \delta_i v_{ij}^{k+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\tau}(v_{ij}^{k+1} - v_{ij}^k),$$

$$\delta_x v_{i-\frac{1}{2}, j}^k = \frac{1}{h_1}(v_{ij}^k - v_{i-1, j}^k), \quad \delta_y v_{i, j-\frac{1}{2}}^k = \frac{1}{h_2}(v_{ij}^k - v_{i, j-1}^k),$$

$$\delta_x^2 v_{ij}^k = \frac{1}{h_1^2}(v_{i-1, j}^k - 2v_{ij}^k + v_{i+1, j}^k),$$

$$\delta_y^2 v_{ij}^k = \frac{1}{h_2^2}(v_{i, j-1}^k - 2v_{ij}^k + v_{i, j+1}^k).$$

若令 $v^n = \{v_{ij}^k | (i, j) \in \bar{\omega}\}$, 则 v^n 为 Ω_h 上的网格函数。

记 $V_h = \{w | w = \{w_{ij}^k | (i, j) \in \bar{\omega}\} \text{ 为 } \Omega_h \text{ 上的网格函数}\},$

$$\dot{V}_h = \{w | w = \{w_{ij}^k | (i, j) \in \bar{\omega}\} \in V_h, \text{ 且当 } (i, j) \in \gamma \text{ 时 } w_{ij} = 0\}.$$

设 $v, w \in \dot{V}_h$, 引进如下内积和范数:

$$(v, w) = h_1 h_2 \sum_{i=1}^{m_1-1} \sum_{j=1}^{m_2-1} v_{ij} w_{ij}, \quad \|v\| = \sqrt{(v, v)},$$

$$(\delta_x v, \delta_x w) = h_1 h_2 \sum_{i=1}^{m_1} \sum_{j=1}^{m_2-1} (\delta_x v_{i-1/2, j}) (\delta_x w_{i-1/2, j}),$$

$$(\delta_y v, \delta_y w) = h_1 h_2 \sum_{i=1}^{m_1-1} \sum_{j=1}^{m_2} (\delta_y v_{i, j-1/2}) (\delta_y w_{i, j-1/2}),$$

$$(\delta_x \delta_y v, \delta_x \delta_y w) = h_1 h_2 \sum_{i=1}^{m_1} \sum_{j=1}^{m_2} (\delta_x \delta_y v_{i-1/2, j-1/2}) (\delta_x \delta_y w_{i-1/2, j-1/2}),$$

$$\|\delta_x v\| = \sqrt{(\delta_x v, \delta_x v)}, \quad \|\delta_y v\| = \sqrt{(\delta_y v, \delta_y v)},$$

$$\|\delta_x \delta_y v\| = \sqrt{(\delta_x \delta_y v, \delta_x \delta_y v)}.$$

定义 $\Omega_h \times \Omega_\tau$ 上的网格函数

$$U = \{U_{ij}^k | (i, j) \in \bar{\omega}, 0 \leq k \leq n\},$$

式中: $U_{ij}^k = u(x_i, y_j, t_k)$, $(i, j) \in \bar{\omega}$, $0 \leq k \leq n$ 。

在点 $(x_i, y_j, t_{k+\frac{1}{2}})$ 处考虑微分方程(1), 有

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, y_j, t_{k+\frac{1}{2}}) - a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j, t_{k+\frac{1}{2}}) - b \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j, t_{k+\frac{1}{2}}) + cu(x_i, y_j, t_{k+\frac{1}{2}}) = f_{ij}^{k+\frac{1}{2}}, (i, j) \in \omega, 0 \leq k \leq n-1. \quad (4)$$

由泰勒展开式, 有:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, y_j, t_{k+\frac{1}{2}}) &= \delta_t U_{ij}^{k+\frac{1}{2}} - \frac{\tau^2}{16} \int_0^1 \left(u_{ttt}(x_i, y_j, t_{k+\frac{1}{2}} - \frac{s\tau}{2}) + u_{ttt}(x_i, y_j, t_{k+\frac{1}{2}} + \frac{s\tau}{2}) \right) (1-s)^2 ds, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j, t_{k+\frac{1}{2}}) &= \frac{1}{2} \left[\delta_x^2 U_{ij}^k - \frac{h_1^2}{6} \int_0^1 (u_{xxxx}(x_i - sh_1, y_j, t_k) + u_{xxxx}(x_i + sh_1, y_j, t_k)) (1-s)^3 ds + \delta_x^2 U_{ij}^{k+1} - \frac{h_1^2}{6} \int_0^1 (u_{xxxx}(x_i - sh_1, y_j, t_{k+1}) + u_{xxxx}(x_i + sh_1, y_j, t_{k+1})) (1-s)^3 ds \right] - \frac{\tau^2}{8} \int_0^1 \left(u_{xxtt}(x_i, y_j, t_{k+\frac{1}{2}} - \frac{s\tau}{2}) + u_{xxtt}(x_i, y_j, t_{k+\frac{1}{2}} + \frac{s\tau}{2}) \right) (1-s) ds; \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j, t_{k+\frac{1}{2}}) &= \frac{1}{2} \left[\delta_y^2 U_{ij}^k - \frac{h_2^2}{6} \int_0^1 (u_{yyyy}(x_i, y_j - sh_2, t_k) + u_{yyyy}(x_i, y_j + sh_2, t_k)) (1-s)^3 ds + \delta_y^2 U_{ij}^{k+1} - \frac{h_2^2}{6} \int_0^1 (u_{yyyy}(x_i, y_j - sh_2, t_{k+1}) + u_{yyyy}(x_i, y_j + sh_2, t_{k+1})) (1-s)^3 ds \right] - \frac{\tau^2}{8} \int_0^1 \left(u_{yytt}(x_i, y_j, t_{k+\frac{1}{2}} - \frac{s\tau}{2}) + u_{yytt}(x_i, y_j, t_{k+\frac{1}{2}} + \frac{s\tau}{2}) \right) (1-s) ds; \\ u(x_i, y_j, t_{k+\frac{1}{2}}) &= \frac{1}{2} (u(x_i, y_j, t_k) + u(x_i, y_j, t_{k+1})) - \frac{\tau^2}{8} \int_0^1 \left(u_{tt}(x_i, y_j, t_{k+\frac{1}{2}} - \frac{s\tau}{2}) + u_{tt}(x_i, y_j, t_{k+\frac{1}{2}} + \frac{s\tau}{2}) \right) (1-s) ds. \end{aligned}$$

将以上4式代入式(4), 得

$$\delta_t U_{ij}^{k+\frac{1}{2}} - a \delta_x^2 U_{ij}^{k+\frac{1}{2}} - b \delta_y^2 U_{ij}^{k+\frac{1}{2}} + c U_{ij}^{k+\frac{1}{2}} = f_{ij}^{k+\frac{1}{2}} + (R_1)_{ij}^{k+\frac{1}{2}}, (i, j) \in \omega, 0 \leq k \leq n-1, \quad (5)$$

式中:

$$\begin{aligned} (R_1)_{ij}^k &= \frac{\tau^2}{8} \left\{ \frac{1}{2} \int_0^1 \left(u_{ttt}(x_i, y_j, t_{k+\frac{1}{2}} - \frac{s\tau}{2}) + u_{ttt}(x_i, y_j, t_{k+\frac{1}{2}} + \frac{s\tau}{2}) \right) (1-s)^2 ds - \int_0^1 \left[a \left(u_{xxtt}(x_i, y_j, t_{k+\frac{1}{2}} - \frac{s\tau}{2}) + u_{xxtt}(x_i, y_j, t_{k+\frac{1}{2}} + \frac{s\tau}{2}) \right) + b \left(u_{yytt}(x_i, y_j, t_{k+\frac{1}{2}} - \frac{s\tau}{2}) + u_{yytt}(x_i, y_j, t_{k+\frac{1}{2}} + \frac{s\tau}{2}) \right) - c \left(u_{tt}(x_i, y_j, t_{k+\frac{1}{2}} - \frac{s\tau}{2}) + u_{tt}(x_i, y_j, t_{k+\frac{1}{2}} + \frac{s\tau}{2}) \right) \right] (1-s) ds \right\} - u_{xxxx}(x_i - sh_1, y_j, t_{k+1}) + u_{xxxx}(x_i + sh_1, y_j, t_{k+1}) (1-s)^3 ds - \frac{a}{12} h_1^2 \int_0^1 [u_{xxxx}(x_i - sh_1, y_j, t_k) + u_{xxxx}(x_i + sh_1, y_j, t_k) + \frac{a}{12} h_2^2 \int_0^1 [u_{yyyy}(x_i, y_j - sh_2, t_k) + u_{yyyy}(x_i, y_j + sh_2, t_k) + u_{yyyy}(x_i, y_j - sh_2, t_{k+1}) + u_{yyyy}(x_i, y_j + sh_2, t_{k+1})] (1-s)^3 ds]. \end{aligned}$$

故存在常数 c_1 , 使得

$$|(R_1)_{ij}^{k+\frac{1}{2}}| \leq c_1 (\tau^2 + h_1^2 + h_2^2), (i, j) \in \omega, 0 \leq k \leq n-1,$$

由初边值条件, 有

$$\begin{cases} U_{ij}^0 = \phi(x_i, y_j), (i, j) \in \omega; \\ U_{ij}^k = \alpha(x_i, y_j, t_k), (i, j) \in \gamma, 0 \leq k \leq n. \end{cases} \quad (6)$$

在式(5)中略去小量项 $(R_1)_{ij}^k$, 并用 u_{ij}^k 代替 U_{ij}^k

可得如下差分格式:

$$\begin{cases} \delta_t u_{ij}^{k+\frac{1}{2}} - a \delta_x^2 u_{ij}^{k+\frac{1}{2}} - b \delta_y^2 u_{ij}^{k+\frac{1}{2}} + c u_{ij}^{k+\frac{1}{2}} = f_{ij}^{k+\frac{1}{2}}, \\ (i, j) \in \omega, 0 \leq k \leq n-1; \end{cases} \quad (7)$$

$$u_{ij}^0 = \phi(x_i, y_j), (i, j) \in \omega; \quad (8)$$

$$u_{ij}^k = \alpha(x_i, y_j, t_k), (i, j) \in \gamma, 0 \leq k \leq n. \quad (9)$$

为构造 ADI 格式, 在式(7)的两边同时加上

$$\begin{aligned} \frac{ab\tau^2}{2(2+c\tau)} \delta_x^2 \delta_y^2 \delta_t u_{ij}^{k+\frac{1}{2}}, \text{ 得} \\ \delta_t u_{ij}^{k+\frac{1}{2}} - a \delta_x^2 u_{ij}^{k+\frac{1}{2}} - b \delta_y^2 u_{ij}^{k+\frac{1}{2}} + c u_{ij}^{k+\frac{1}{2}} + \frac{ab\tau^2}{2(2+c\tau)} \delta_x^2 \delta_y^2 \delta_t u_{ij}^{k+\frac{1}{2}} = f_{ij}^{k+\frac{1}{2}} + (R_2)_{ij}^{k+\frac{1}{2}}, (i, j) \in \omega, 0 \leq k \leq n-1. \end{aligned} \quad (10)$$

式中:

$$(R_2)_{ij}^{k+\frac{1}{2}} = (R_1)_{ij}^{k+\frac{1}{2}} + \frac{ab\tau^2}{2(2+c\tau)} \delta_x^2 \delta_y^2 \delta_t u_{ij}^{k+\frac{1}{2}}.$$

由泰勒展开式, 有:

$$\delta_x^2 \delta_y^2 \delta_t u_{ij}^{k+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \delta_x^2 \delta_y^2 \int_0^1 \left[u_t \left(x_i, y_j, t_{k+\frac{1}{2}} - \frac{s\tau}{2} \right) + u_t \left(x_i, y_j, t_{k+\frac{1}{2}} + \frac{s\tau}{2} \right) \right] ds.$$

并且存在常数 c_2 使得

$$\left| (R_2)_{ij}^{k+\frac{1}{2}} \right| \leq c_2 (\tau^2 + h_1^2 + h_2^2), (i, j) \in \omega, 0 \leq k \leq n-1. \quad (11)$$

在式(10)中略去小量项 $(R_2)_{ij}^k$, 并注意到式(8)(9), 用 u_{ij}^k 代替 U_{ij}^k 可得如下交替方向隐式差分格式:

$$\begin{cases} \delta_t u_{ij}^{k+\frac{1}{2}} - a \delta_x^2 u_{ij}^{k+\frac{1}{2}} - b \delta_y^2 u_{ij}^{k+\frac{1}{2}} + c u_{ij}^{k+\frac{1}{2}} + \\ \frac{ab\tau^2}{2(2+c\tau)} \delta_x^2 \delta_y^2 \delta_t u_{ij}^{k+\frac{1}{2}} = f_{ij}^{k+\frac{1}{2}}, (i, j) \in \omega, 0 \leq k \leq n-1; \end{cases} \quad (12)$$

$$u_{ij}^0 = \varphi(x_i, y_j), (i, j) \in \omega; \quad (13)$$

$$u_{ij}^k = \alpha(x_i, y_j, t_k), (i, j) \in \gamma, 0 \leq k \leq n. \quad (14)$$

差分格式(12)可写为

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{c\tau}{2}\right) u_{ij}^{k+1} - \frac{a\tau}{2} \delta_x^2 u_{ij}^{k+1} - \frac{b\tau}{2} \delta_y^2 u_{ij}^{k+1} + \frac{ab\tau^2}{4+2c\tau} \delta_x^2 \delta_y^2 u_{ij}^{k+1} = \\ \left(1 + \frac{c\tau}{2}\right) u_{ij}^k + \frac{a\tau}{2} \delta_x^2 u_{ij}^k + \frac{b\tau}{2} \delta_y^2 u_{ij}^k + \frac{ab\tau^2}{4+2c\tau} \delta_x^2 \delta_y^2 u_{ij}^k - \\ c\tau u_{ij}^k + \tau f_{ij}^{k+\frac{1}{2}}, (i, j) \in \omega, 0 \leq k \leq n-1. \end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned} \left(I - \frac{a\tau}{2+c\tau} \delta_x^2 \right) \left(I - \frac{b\tau}{2+c\tau} \delta_y^2 \right) u_{ij}^{k+1} = \\ \left(I + \frac{a\tau}{2+c\tau} \delta_x^2 \right) \left(I + \frac{b\tau}{2+c\tau} \delta_y^2 \right) u_{ij}^k - \frac{2c\tau}{2+c\tau} u_{ij}^k + \\ \frac{2\tau}{2+c\tau} f_{ij}^{k+\frac{1}{2}}, (i, j) \in \omega, 0 \leq k \leq n-1. \end{aligned} \quad (15)$$

令 $u_{ij}^* = \left(I - \frac{b\tau}{2+c\tau} \delta_y^2 \right) u_{ij}^{k+1}$, 则式(15)等价于

$$\begin{cases} \left(I - \frac{a\tau}{2+c\tau} \delta_x^2 \right) u_{ij}^* = \left(I + \frac{a\tau}{2+c\tau} \delta_x^2 \right) \left(I + \frac{b\tau}{2+c\tau} \delta_y^2 \right) u_{ij}^k - \\ \frac{2c\tau}{2+c\tau} u_{ij}^k + \frac{2\tau}{2+c\tau} f_{ij}^{k+\frac{1}{2}}, (i, j) \in \omega; \end{cases} \quad (16)$$

$$\left(I - \frac{b\tau}{2+c\tau} \delta_y^2 \right) u_{ij}^{k+1} = u_{ij}^*, (i, j) \in \omega. \quad (17)$$

当第 k 层上的值 $\{u_{ij}^k | (i, j) \in \bar{\omega}\}$ 已知时, 由式(16)

求出过渡层变量 $\{u_{ij}^* | (i, j) \in \omega\}$ 的值: 对于任意固定的 $j (1 \leq j \leq m_2-1)$, 引入边界条件

$$u_{0j}^* = \left(I - \frac{b\tau}{2+c\tau} \delta_y^2 \right) u_{0j}^{k+1}, u_{m_1,j}^* = \left(I - \frac{b\tau}{2+c\tau} \delta_y^2 \right) u_{m_1,j}^{k+1}, \quad (18)$$

求解如下方程

$$\begin{aligned} \left(I - \frac{a\tau}{2+c\tau} \delta_x^2 \right) u_{ij}^* = \left(I + \frac{a\tau}{2+c\tau} \delta_x^2 \right) \left(I + \frac{b\tau}{2+c\tau} \delta_y^2 \right) u_{ij}^k - \\ \frac{2c\tau}{2+c\tau} u_{ij}^k + \frac{2\tau}{2+c\tau} f_{ij}^{k+\frac{1}{2}}, (i, j) \in \omega, 1 \leq i \leq m_1-1, \end{aligned} \quad (19)$$

得到 $\{u_{ij}^* | 1 \leq i \leq m_1-1\}$ 。

当 $\{u_{ij}^* | (i, j) \in \omega\}$ 已求出时, 可基于式(17)求出

第 $k+1$ 层上 u 的数值解 $\{u_{ij}^{k+1} | (i, j) \in \omega\}$: 对任意固定的 $i (1 \leq i \leq m_1-1)$, 取边界条件

$$u_{i0}^{k+1} = \alpha(x_i, y_0, t_{k+1}), u_{i,m_2}^{k+1} = \alpha(x_i, y_{m_2}, t_{k+1}), \quad (20)$$

求解如下方程

$$\left(I - \frac{b\tau}{2+c\tau} \delta_y^2 \right) u_{ij}^{k+1} = u_{ij}^*, 1 \leq j \leq m_2-1, \quad (21)$$

得到 $\{u_{ij}^{k+1} | 1 \leq j \leq m_2-1\}$ 。

其中, 式(18)(19)是关于 x 方向的隐格式, 式(20)和(21)是关于 y 方向的隐格式, 这两组方程的系数矩阵均呈现为严格对角占优的三对角结构, 可用 Thomas 算法求解。

2.2 预备引理

本节将给出一些基础引理, 方便后续对差分格式(12)~(14)进行理论分析。

引理 1 对于 $v \in \bar{V}_h$ 有如下等式成立

$$\left(\delta_x^2 \delta_y^2 \delta_t v^{k+\frac{1}{2}}, v^{k+\frac{1}{2}} \right) = \frac{1}{2\tau} \left(\left\| \delta_x \delta_y v^{k+1} \right\|^2 - \left\| \delta_x \delta_y v^k \right\|^2 \right).$$

证明 注意到 $(i, j) \in \bar{\omega}$ 和 $v_{ij} = 0 (i, j) \in \gamma$, 得到

$$\begin{aligned} \left(\delta_x^2 \delta_y^2 \delta_t v^{k+\frac{1}{2}}, v^{k+\frac{1}{2}} \right) = \\ \frac{1}{2\tau} \left(\left\| \delta_x \delta_y v^{k+1} \right\|^2 + \left(\delta_x^2 \delta_y^2 v^{k+1}, v^k \right) - \right. \\ \left. \left(\delta_x^2 \delta_y^2 v^k, v^{k+1} \right) - \left\| \delta_x \delta_y v^k \right\|^2 \right). \end{aligned}$$

式中:

$$\begin{aligned} \left(\delta_x^2 \delta_y^2 v^{k+1}, v^k \right) &= h_1 h_2 \sum_{i=1}^{m_1-1} \sum_{j=1}^{m_2-1} \left(\delta_x^2 \delta_y^2 v_{ij}^{k+1} \right) v_{ij}^k = \\ h_1 h_2 \sum_{i=1}^{m_1-1} \sum_{j=1}^{m_2-1} \left(\delta_y^2 \left(v_{i-1,j}^{k+1} - 2v_{ij}^{k+1} + v_{i+1,j}^{k+1} \right) \right) v_{ij}^k &= \\ h_1 h_2 \sum_{j=1}^{m_2-1} \left[\sum_{i=1}^{m_1-1} \left(\delta_y^2 v_{i-1,j}^{k+1} \right) v_{ij}^k - 2 \sum_{i=1}^{m_1-1} \left(\delta_y^2 v_{ij}^{k+1} \right) v_{ij}^k + \sum_{i=1}^{m_1-1} \left(\delta_y^2 v_{i+1,j}^{k+1} \right) v_{ij}^k \right] &= \\ h_1 h_2 \sum_{j=1}^{m_2-1} \left[\sum_{i=1}^{m_1-1} \left(\delta_y^2 v_{ij}^{k+1} \right) v_{i+1,j}^k - 2 \sum_{i=1}^{m_1-1} \left(\delta_y^2 v_{ij}^{k+1} \right) v_{ij}^k + \sum_{i=1}^{m_1-1} \left(\delta_y^2 v_{ij}^{k+1} \right) v_{i-1,j}^k \right] &= \\ h_1 h_2 \sum_{j=1}^{m_2-1} \sum_{i=1}^{m_1-1} \left(\delta_y^2 v_{ij}^{k+1} \right) \left(v_{i-1,j}^k - 2v_{ij}^k + v_{i+1,j}^k \right) &= \\ h_1 h_2 \sum_{i=1}^{m_1-1} \sum_{j=1}^{m_2-1} \left(\delta_y^2 v_{ij}^{k+1} \right) \left(\delta_x^2 v_{ij}^k \right) &= \left(\delta_x^2 \delta_y^2 v_{ij}^{k+1}, \delta_x^2 v_{ij}^k \right). \end{aligned}$$

同理, 可得

$$(\delta_x^2 \delta_y^2 v^k, v^{k+1}) = (\delta_x^2 v^k, \delta_y^2 v^{k+1}),$$

因此得到

$$(\delta_x^2 \delta_y^2 \delta_t v^{k+\frac{1}{2}}, v^{k+\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2\tau} (\|\delta_x \delta_y v^{k+1}\|^2 - \|\delta_x \delta_y v^k\|^2).$$

定理证毕。

引理 2^[6] 设 $\{F^k\}_{k=0}^\infty$ 是非负序列, $\{g^k\}_{k=0}^\infty$ 是非负单调递增 (不必严格递增), 且

$$F^k \leq c\tau \sum_{l=0}^{k-1} F^l + g^k, \quad k=0, 1, 2, \dots,$$

则有

$$F^k \leq e^{ck\tau} g^k, \quad k=0, 1, 2, \dots.$$

2.3 理论分析

本节将主要运用能量分析法来严格给出 ADI-FDM 格式 (12) ~ (14) 解的存在唯一性、无条件稳定性以及收敛性的证明。

定理 1 差分格式 (12) ~ (14) 是唯一可解的。

证明 记 $u^k = \{u_{ij}^k | (i, j) \in \bar{\omega}\}$, 由式 (13) (14) 知 u^0 已给定。现设已求得 u^k , 则关于 u^{k+1} 的差分格式为

$$\begin{cases} \delta_t u_{ij}^{k+\frac{1}{2}} - a\delta_x^2 u_{ij}^{k+\frac{1}{2}} - b\delta_y^2 u_{ij}^{k+\frac{1}{2}} + c u_{ij}^{k+\frac{1}{2}} + \\ \frac{ab\tau^2}{2(2+c\tau)} \delta_x^2 \delta_y^2 \delta_t u_{ij}^{k+\frac{1}{2}} = f_{ij}^{k+\frac{1}{2}}, \quad (i, j) \in \omega; \quad (22) \\ u_{ij}^{k+1} = \alpha(x_i, y_j, t_{k+1}), \quad (i, j) \in \gamma. \quad (23) \end{cases}$$

考虑其齐次方程组

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{\tau} + \frac{c}{2}\right) u_{ij}^{k+1} - \frac{a}{2} \delta_x^2 u_{ij}^{k+1} - \frac{b}{2} \delta_y^2 u_{ij}^{k+1} + \\ \frac{ab\tau}{2(2+c\tau)} \delta_x^2 \delta_y^2 u_{ij}^{k+1} = 0, \quad (i, j) \in \omega; \\ u_{ij}^{k+1} = 0, \quad (i, j) \in \gamma. \end{cases}$$

用 u^{k+1} 与式 (22) 的两边做内积, 得

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{\tau} + \frac{c}{2}\right) \|u^{k+1}\|^2 - \frac{a}{2} (\delta_x^2 u^{k+1}, u^{k+1}) - \frac{b}{2} (\delta_y^2 u^{k+1}, u^{k+1}) + \\ & \frac{ab\tau}{2(2+c\tau)} (\delta_x^2 \delta_y^2 u^{k+1}, u^{k+1}) = 0. \end{aligned} \quad (24)$$

注意到式 (23), 由分部求和公式, 得到

$$\begin{aligned} -(\delta_x^2 u^{k+1}, u^{k+1}) &= \|\delta_x u^{k+1}\|^2, \\ -(\delta_y^2 u^{k+1}, u^{k+1}) &= \|\delta_y u^{k+1}\|^2, \\ (\delta_x^2 \delta_y^2 u^{k+1}, u^{k+1}) &= \|\delta_x \delta_y u^{k+1}\|^2. \end{aligned}$$

将上述 3 式代入式 (24), 可得:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{\tau} + \frac{c}{2}\right) \|u^{k+1}\|^2 + \frac{a}{2} \|\delta_x u^{k+1}\|^2 + \frac{b}{2} \|\delta_y u^{k+1}\|^2 + \\ & \frac{ab\tau}{2(2+c\tau)} \|\delta_x \delta_y u^{k+1}\|^2 = 0. \end{aligned}$$

即

$$u_{ij}^{k+1} = 0, \quad (i, j) \in \omega.$$

由归纳原理, 差分格式 (12) ~ (14) 唯一可解。

定理证毕。

定理 2 设 $\{v_{ij}^k | (i, j) \in \bar{\omega}, 0 \leq k \leq n\}$ 为差分格式

$$\begin{cases} \delta_t v_{ij}^{k+\frac{1}{2}} - a\delta_x^2 v_{ij}^{k+\frac{1}{2}} - b\delta_y^2 v_{ij}^{k+\frac{1}{2}} + c v_{ij}^{k+\frac{1}{2}} + \\ \frac{ab\tau^2}{2(2+c\tau)} \delta_x^2 \delta_y^2 \delta_t v_{ij}^{k+\frac{1}{2}} = g_{ij}^{k+\frac{1}{2}}, \\ (i, j) \in \omega, \quad 0 \leq k \leq n-1; \end{cases} \quad (25)$$

$$v_{ij}^0 = \varphi(x_i, y_j), \quad (i, j) \in \omega; \quad (26)$$

$$v_{ij}^k = \alpha(x_i, y_j, t_k), \quad (i, j) \in \gamma, \quad 0 \leq k \leq n \quad (27)$$

的解, 则当 $\tau \leq 7$ 时, 有

$$\begin{aligned} \|v^{k+1}\|^2 &\leq e^{2k\tau} \left[(8+\tau) \|v^0\|^2 + \frac{2ab\tau^2}{2+c\tau} \|\delta_x \delta_y v^0\|^2 + \right. \\ & \left. 4\tau \left(\|g^{\frac{1}{2}}\|^2 + 2 \sum_{l=1}^k \|g^l\|^2 + \|g^{k+\frac{1}{2}}\|^2 \right) \right], \quad 0 \leq k \leq n-1. \end{aligned}$$

式中:

$$\|g^k\|^2 = h_1 h_2 \sum_{i=1}^{M_1-1} \sum_{j=1}^{M_2-1} (g_{ij}^k)^2.$$

证明 用 $v^{k+\frac{1}{2}}$ 与式 (25) 两边做内积, 得

$$\begin{aligned} & (\delta_t v^{k+\frac{1}{2}}, v^{k+\frac{1}{2}}) - a(\delta_x^2 v^{k+\frac{1}{2}}, v^{k+\frac{1}{2}}) - b(\delta_y^2 v^{k+\frac{1}{2}}, v^{k+\frac{1}{2}}) + \\ & c(v^{k+\frac{1}{2}}, v^{k+\frac{1}{2}}) + \frac{ab\tau^2}{2(2+c\tau)} (\delta_x^2 \delta_y^2 \delta_t v^{k+\frac{1}{2}}, v^{k+\frac{1}{2}}) = (g^{k+\frac{1}{2}}, v^{k+\frac{1}{2}}), \\ & 0 \leq k \leq n-1. \end{aligned}$$

注意到

$$\begin{aligned} (\delta_t v^{k+\frac{1}{2}}, v^{k+\frac{1}{2}}) &= \frac{1}{2\tau} (\|v^{k+1}\|^2 - \|v^k\|^2), \\ -(\delta_x^2 v^{k+\frac{1}{2}}, v^{k+\frac{1}{2}}) &= \|\delta_x v^{k+\frac{1}{2}}\|^2, \\ -(\delta_y^2 v^{k+\frac{1}{2}}, v^{k+\frac{1}{2}}) &= \|\delta_y v^{k+\frac{1}{2}}\|^2, \end{aligned}$$

并由引理 1

$$(\delta_x^2 \delta_y^2 \delta_t v^{k+\frac{1}{2}}, v^{k+\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2\tau} (\|\delta_x \delta_y v^{k+1}\|^2 - \|\delta_x \delta_y v^k\|^2),$$

可以得到

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\tau} (\|v^{k+1}\|^2 - \|v^k\|^2) + a \|\delta_x v^{k+\frac{1}{2}}\|^2 + b \|\delta_y v^{k+\frac{1}{2}}\|^2 + c \|v^{k+\frac{1}{2}}\|^2 + \\ & \frac{ab\tau}{4(2+c\tau)} (\|\delta_x \delta_y v^{k+1}\|^2 - \|\delta_x \delta_y v^k\|^2) = \\ & (g^{k+\frac{1}{2}}, v^{k+\frac{1}{2}}), \quad 0 \leq k \leq n-1, \end{aligned}$$

即

$$\frac{1}{\tau}(\|v^{k+1}\|^2 - \|v^k\|^2) + \frac{ab\tau}{4(2+c\tau)}(\|\delta_x \delta_y v^{k+1}\|^2 - \|\delta_x \delta_y v^k\|^2) \leq (g^{k+\frac{1}{2}}, v^{k+\frac{1}{2}}), \quad 0 \leq k \leq n-1.$$

将上式中的 k 换为 l , 并对 l 从 0 到 k 求和, 得

$$\frac{1}{\tau}(\|v^{k+1}\|^2 - \|v^0\|^2) + \frac{ab\tau}{4(2+c\tau)}(\|\delta_x \delta_y v^{k+1}\|^2 - \|\delta_x \delta_y v^0\|^2) \leq \sum_{l=1}^k (g^l, v^l) + \frac{1}{2} \left[(g^{\frac{1}{2}}, v^0) + (g^{k+\frac{1}{2}}, v^{k+1}) \right], \quad 0 \leq k \leq n-1.$$

将上式乘以 τ , 并移项, 得到

$$\begin{aligned} \|v^{k+1}\|^2 &\leq \|v^0\|^2 + \frac{ab\tau^2}{4(2+c\tau)} \|\delta_x \delta_y v^0\|^2 + \\ &\frac{\tau}{2} \left[(g^{\frac{1}{2}}, v^0) + (g^{k+\frac{1}{2}}, v^{k+1}) \right] + \tau \sum_{l=1}^k (g^l, v^l) \leq \\ &\|v^0\|^2 + \frac{ab\tau^2}{4(2+c\tau)} \|\delta_x \delta_y v^0\|^2 + \frac{\tau}{2} \left(\|g^{\frac{1}{2}}\|^2 + \frac{1}{4} \|v^0\|^2 + \right. \\ &\left. \|g^{k+\frac{1}{2}}\|^2 + \frac{1}{4} \|v^{k+1}\|^2 \right), \quad 0 \leq k \leq n-1. \end{aligned}$$

因此, 当 $\tau \leq 7$ 时, 有

$$\begin{aligned} \|v^{k+1}\|^2 &\leq (8+\tau) \|v^0\|^2 + \frac{2ab\tau^2}{2+c\tau} \|\delta_x \delta_y v^0\|^2 + 8\tau \sum_{l=1}^k \|g^l\|^2 + \\ &4\tau \left(\|g^{\frac{1}{2}}\|^2 + \|g^{k+\frac{1}{2}}\|^2 \right) + 2\tau \sum_{l=1}^k \|v^l\|^2, \quad 0 \leq k \leq n-1. \end{aligned}$$

由引理 2 得到:

$$\begin{aligned} \|v^{k+1}\|^2 &\leq e^{2k\tau} \left[(8+\tau) \|v^0\|^2 + \frac{2ab\tau^2}{2+c\tau} \|\delta_x \delta_y v^0\|^2 + \right. \\ &\left. 4\tau \left(\|f^{\frac{1}{2}}\|^2 + 2 \sum_{l=1}^k \|f^l\|^2 + \|f^{k+\frac{1}{2}}\|^2 \right) \right], \quad 0 \leq k \leq n-1. \end{aligned}$$

定理证毕。

定理 3 设 $\{u(x, y, t) | (x, y) \in \bar{\Omega}, 0 \leq t \leq T\}$ 为反应扩散问题 (1) ~ (3) 的解, $\{u_{ij}^k | (i, j) \in \bar{\omega}, 0 \leq k \leq n\}$ 为 ADI-FDM 格式 (12) ~ (14) 的解。记

$$e_{ij}^k = u(x_i, y_j, t_k) - u_{ij}^k, \quad (i, j) \in \bar{\omega}, \quad 0 \leq k \leq n,$$

则有

$$\|e^k\| \leq 4e^T \sqrt{L_1 L_2 T c_2} (\tau^2 + h_1^2 + h_2^2), \quad 1 \leq k \leq n.$$

证明 将式 (10) (6) 和式 (12) ~ (14) 相减, 得到误差方程组

$$\begin{cases} \delta_t e_{ij}^{k+\frac{1}{2}} - a \delta_x^2 e_{ij}^{k+\frac{1}{2}} - b \delta_y^2 e_{ij}^{k+\frac{1}{2}} + c e_{ij}^{k+\frac{1}{2}} + \\ \frac{ab\tau^2}{2(2+c\tau)} \delta_x^2 \delta_y^2 \delta_t e_{ij}^{k+\frac{1}{2}} = (R_2)_{ij}^k, \\ (i, j) \in \omega, \quad 0 \leq k \leq n-1; \end{cases} \quad (28)$$

$$e_{ij}^0 = 0, \quad (i, j) \in \omega; \quad (29)$$

$$e_{ij}^k = 0, \quad (i, j) \in \gamma, \quad 0 \leq k \leq n. \quad (30)$$

应用定理 2, 并注意到式 (11), 得

$$\begin{aligned} \|e^{k+1}\|^2 &\leq e^{2k\tau} \left[(8+\tau) \|e^0\|^2 + \frac{2ab\tau^2}{2+c\tau} \|\delta_x \delta_y e^0\|^2 + \right. \\ &4\tau \left(\|(R_2)^{\frac{1}{2}}\|^2 + 2 \sum_{l=1}^k \|(R_2)^l\|^2 + \|(R_2)^{k+\frac{1}{2}}\|^2 \right) \Big] \leq \\ &16e^{2k\tau} L_1 L_2 T c_2^2 (\tau^2 + h_1^2 + h_2^2), \quad 0 \leq k \leq n-1. \end{aligned}$$

两边开方, 即得不等式

$$\|e^k\| \leq 4e^T \sqrt{L_1 L_2 T c_2} (\tau^2 + h_1^2 + h_2^2), \quad 1 \leq k \leq n.$$

定理证毕。

定理 4 ADI-FDM 格式 (12) ~ (14) 对初值和右端函数在如下 L_2 范数下稳定:

设 $\{u_{ij}^k | (i, j) \in \bar{\omega}, 0 \leq k \leq n\}$ 为差分方程组

$$\begin{cases} \delta_t u_{ij}^{k+\frac{1}{2}} - a \delta_x^2 u_{ij}^{k+\frac{1}{2}} - b \delta_y^2 u_{ij}^{k+\frac{1}{2}} + c u_{ij}^{k+\frac{1}{2}} + \\ \frac{ab\tau^2}{2(2+c\tau)} \delta_x^2 \delta_y^2 \delta_t u_{ij}^{k+\frac{1}{2}} = f_{ij}^{k+\frac{1}{2}}(i, j) \in \omega, \quad 0 \leq k \leq n-1; \\ u_{ij}^0 = \varphi(x_i, y_j), \quad (i, j) \in \omega; \\ u_{ij}^k = \alpha(x_i, y_j, t_k), \quad (i, j) \in \gamma, \quad 0 \leq k \leq n \end{cases}$$

的解, 则有:

$$\begin{aligned} \|u^{k+1}\|^2 &\leq e^{2k\tau} \left[(8+\tau) \|u^0\|^2 + \frac{2ab\tau^2}{2+c\tau} \|\delta_x \delta_y u^0\|^2 + \right. \\ &4\tau \left(\|f^{\frac{1}{2}}\|^2 + 2 \sum_{l=1}^k \|f^l\|^2 + \|f^{k+\frac{1}{2}}\|^2 \right) \Big], \quad 0 \leq k \leq n-1. \end{aligned}$$

证明 直接利用定理 2。

定理证毕。

2.4 P-R ADI 格式的建立

P-R 交替方向隐格式构造如下。

按如下方式引进过渡层变量 $\bar{u}_{ij}$:

$$\begin{cases} \left(I - \frac{a\tau}{2+c\tau} \delta_x^2 \right) \bar{u}_{ij} = \left(I + \frac{b\tau}{2+c\tau} \delta_y^2 \right) u_{ij}^k - \\ \frac{c\tau}{2+c\tau} u_{ij}^k + \frac{\tau}{2+c\tau} f_{ij}^{k+\frac{1}{2}}, \quad (i, j) \in \omega; \end{cases} \quad (31)$$

$$\begin{cases} \left(I - \frac{b\tau}{2+c\tau} \delta_y^2 \right) u_{ij}^{k+1} = \left(I + \frac{a\tau}{2+c\tau} \delta_x^2 \right) \bar{u}_{ij} - \\ \frac{c\tau}{2+c\tau} \bar{u}_{ij} + \frac{\tau}{2+c\tau} f_{ij}^{k+\frac{1}{2}}, \quad (i, j) \in \omega. \end{cases} \quad (32)$$

将式 (31) 与式 (32) 相加, 可以得到

$$\bar{u}_{ij} = u_{ij}^{k+\frac{1}{2}} - \frac{b\tau^2}{2+c\tau} \delta_y^2 \delta_t u_{ij}^{k+\frac{1}{2}}.$$

由于 $\{u_{0j}^k\}$ 和 $\{u_{m_1,j}^k\}$ 是已知的, 应要求过渡层变量满足

$$\begin{aligned} \bar{u}_{ij} &= u_{ij}^{k+\frac{1}{2}} - \frac{b\tau^2}{2+c\tau} \delta_y^2 \delta_t u_{ij}^{k+\frac{1}{2}}, \quad \bar{u}_{ij} = u_{ij}^{k+\frac{1}{2}} - \frac{b\tau^2}{2+c\tau} \delta_y^2 \delta_t u_{ij}^{k+\frac{1}{2}}, \\ 1 &\leq j \leq m_2 - 1. \end{aligned}$$

当第 k 层上的值 $\{u_{ij}^k | 0 \leq i \leq m_1, 0 \leq j \leq m_2\}$ 已知时, 由式 (31) 求出过渡层变量 $\{\bar{u}_{ij} | (i, j) \in \omega\}$ 的值: 对任意固定的 $j (1 \leq j \leq m_2 - 1)$, 取边界条件

$$\bar{u}_{0,j} = u_{0,j}^{k+\frac{1}{2}} - \frac{b\tau^2}{2+c\tau} \delta_y^2 \delta_t u_{0,j}^{k+\frac{1}{2}}, \quad \bar{u}_{m_1,j} = u_{m_1,j}^{k+\frac{1}{2}} - \frac{b\tau^2}{2+c\tau} \delta_y^2 \delta_t u_{m_1,j}^{k+\frac{1}{2}}, \quad (33)$$

求解

$$\left(I - \frac{a\tau}{2+c\tau} \delta_x^2 \right) \bar{u}_{ij} = \left(I + \frac{b\tau}{2+c\tau} \delta_y^2 \right) u_{ij}^k - \frac{c\tau}{2+c\tau} u_{ij}^k + \frac{\tau}{2+c\tau} f_{ij}^{k+\frac{1}{2}}, \quad 1 \leq i \leq m_1 - 1, \quad (34)$$

得到 $\{\bar{u}_{ij} | 1 \leq i \leq m_1 - 1\}$ 。

当 $\{\bar{u}_{ij} | (i, j) \in \omega\}$ 已求出时, 由式 (32) 求出第 $k+1$ 层 u 的值 $\{u_{ij}^{k+1} | (i, j) \in \omega\}$: 对任意固定的 $i (1 \leq i \leq m_1 - 1)$, 引入边界条件

$$u_{i0}^{k+1} = \alpha(x_i, y_0, t_{k+1}), \quad u_{i,m_2}^{k+1} = \alpha(x_i, y_{m_2}, t_{k+1}), \quad (35)$$

求解

$$\left(I - \frac{b\tau}{2+c\tau} \delta_y^2 \right) u_{ij}^{k+1} = \left(I + \frac{a\tau}{2+c\tau} \delta_x^2 \right) \bar{u}_{ij} - \frac{c\tau}{2+c\tau} \bar{u}_{ij} + \frac{\tau}{2+c\tau} f_{ij}^{k+\frac{1}{2}}, \quad 1 \leq j \leq m_2 - 1, \quad (36)$$

得到 $\{u_{ij}^{k+1} | 1 \leq j \leq m_2 - 1\}$ 。

式 (33) (34) 是关于 x 方向的隐格式, 式 (35) (36) 是关于 y 方向的隐格式, 其系数矩阵也均呈现严格对角占优的三对角结构, 可用 Thomas 算法求解。

3 数值算例

算例 1 运用 ADI-FDM 格式计算如下定解问题:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2u = \frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}(x+y)-t}, & 0 < x, y < 1, 0 < t \leq 1; \\ u(x, y, 0) = e^{\frac{1}{2}(x+y)}, & 0 \leq x, y \leq 1; \\ u(0, y, t) = e^{\frac{1}{2}y-t}, \quad u(1, y, t) = e^{\frac{1}{2}(1+y)-t}, & 0 \leq y \leq 1, 0 < t \leq 1; \\ u(x, 0, t) = e^{\frac{1}{2}x-t}, \quad u(x, 1, t) = e^{\frac{1}{2}(1+x)-t}, & 0 < x < 1, 0 < t \leq 1. \end{cases}$$

该问题的精确解为 $u(x, y, t) = e^{\frac{1}{2}(x+y)-t}$ 。

取 $h_1 = h_2 = h = 1/m$, 记最大误差

$$E_{\infty}(h, \tau) = \max_{0 \leq i, j \leq m, 0 \leq k \leq n} |u(x_i, y_j, t_k) - u_{ij}^k|,$$

记误差阶为

$$rate = \log_2 \left(\frac{E_{\infty}(2\tau, 2h_1, 2h_2)}{E_{\infty}(\tau, h_1, h_2)} \right).$$

表 1 呈现了算例 1 取不同步长时数值解的最大误差 $E_{\infty}(h, \tau)$ 与收敛阶结果。数据直观显示, 当空间步长、时间步长同步缩减至原来的 1/2 时, 最大误差约衰减至原来的 1/4。此数值算例结果与理论预期的收敛阶形成有效印证, 进一步验证了数值格式在时空步长细化过程中的误差衰减规律。

表 1 算例 1 取不同步长时数值解的最大误差与误差阶

Table 1 Example 1 maximum error and error order of non synchronous step size numerical solutions

h	τ	$E_{\infty}(h, \tau)$	rate
1/10	1/10	5.602e-05	*
1/20	1/20	1.402e-05	1.998
1/40	1/40	3.468e-06	2.015
1/80	1/80	8.634e-07	2.006

图 1 展示了 $t=1$ 时精确解的曲面, 以及采用步长 $h=1/10$ 、 $\tau=1/10$ 时所得到的数值解曲面; 图 2 给出了 $t=1$ 时, 基于不同步长得到的数值解误差曲面分布。

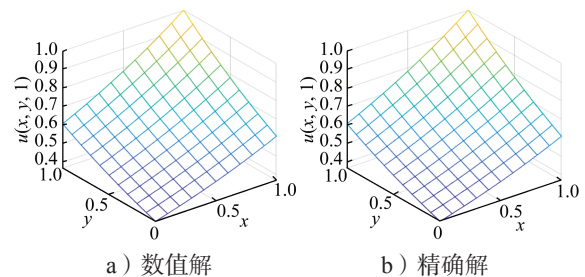


图 1 算例 1 $t=1$ 时的数值解与精确解曲面

Fig. 1 Numerical solution and exact solution surface with $t=1$ in example 1

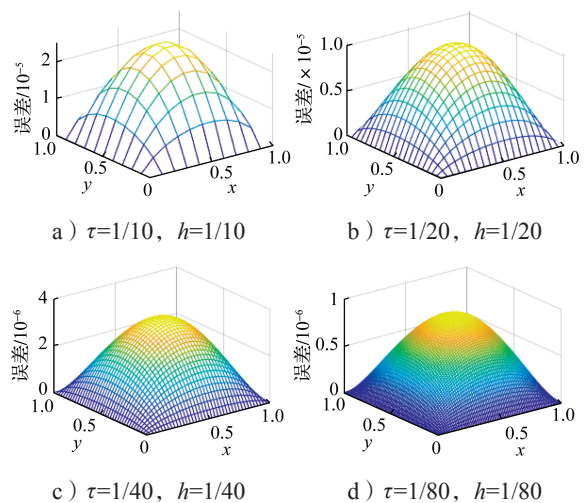


图 2 算例 1 $t=1$ 时不同步长数值解的误差曲面

Fig. 2 Error surface of numerical solutions with different step sizes with $t=1$ in example 1

算例 2 运用 ADI-FDM 格式计算如下定解问题:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + u = 2e^{-t} \sin(x+y), \\ 0 < x, y < 1, 0 < t \leq 1; \\ u(x, y, 0) = \sin(x+y), 0 \leq x, y \leq 1; \\ u(0, y, t) = e^{-t} \sin y, u(1, y, t) = e^{-t} \sin(1+y), \\ 0 \leq y \leq 1, 0 < t \leq 1; \\ u(x, 0, t) = e^{-t} \sin x, u(x, 1, t) = e^{-t} \sin(1+x), \\ 0 < x < 1, 0 < t \leq 1. \end{cases}$$

该问题的精确解为 $u(x, y, t) = e^{-t} \sin(x+y)$ 。

图 3 展示了 $t=1$ 时刻精确解的曲面, 以及采用步长 $h=1/10$ 、 $\tau=1/10$ 时得到的数值解曲面; 图 4 则给出了 $t=1$ 时, 基于不同时间步长计算得到的数值解误差曲面。

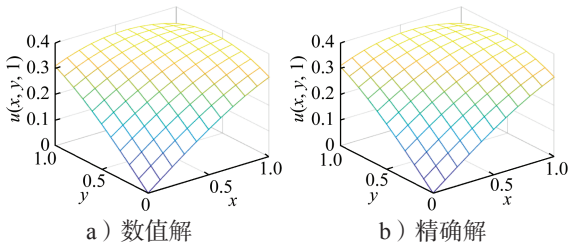


图 3 算例 2 $t=1$ 时的数值解与精确解曲面
Fig. 3 Numerical solution and exact solution surface with $t=1$ in example 2

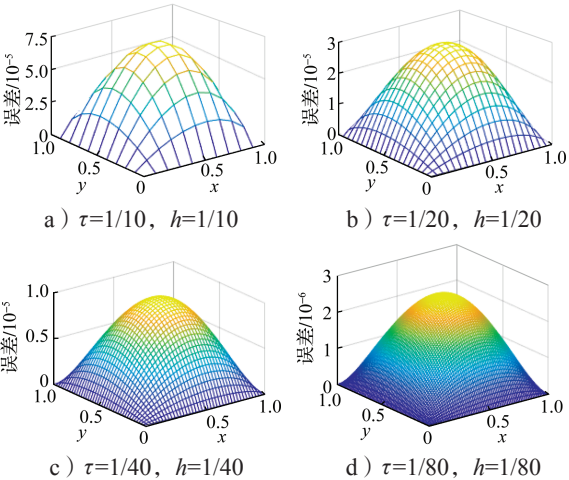


图 4 算例 2 $t=1$ 时不同步长数值解的误差曲面
Fig. 4 Error surface of asynchronous step size numerical solutions with $t=1$ in example 2

表 2 展示了不同步长下数值解的最大误差 $E_{\infty}(h, \tau)$ 与收敛阶分析结果。

表 2 算例 2 取不同步长时数值解的最大误差与误差阶			
Table 2 Maximum error and error order of non synchronous step size numerical solutions in example 2			
h	τ	$E_{\infty}(h, \tau)$	rate
1/10	1/10	1.568e-04	*
1/20	1/20	4.049e-05	1.812
1/40	1/40	1.017e-05	1.933
1/80	1/80	2.553e-06	1.989

对表 2 内数据进行剖析可知: 当空间步长与时间步长每缩减 1/2 时, 最大误差呈现近似衰减 1/4 的规律, 再次证明了数值格式理论的正确性。

4 结语

本文针对二维反应扩散边值问题 (1) ~ (3), 构建了二阶精度的 FDM 格式, 以及 P-R ADI 格式和 D' Yakonov ADI 格式, 并通过能量分析法严格证明了该格式解的存在唯一性、收敛性和稳定性, 数值算例验证了本文理论的正确性。三维反应扩散方程边值问题以及反应扩散方程的紧致差分格式的建立是接下来要做的工作。

参考文献:

[1] 闫宝强, 程红梅, 房钦贺, 等. 反应扩散方程及其应用研究进展 [J]. 山东师范大学学报 (自然科学版), 2021, 36(3): 253-266.
YAN Baoqiang, CHENG Hongmei, FANG Qinhe, et al. Recent Development on Applicable of Reaction-Diffusion Equations[J]. Journal of Shandong Normal University (Natural Science), 2021, 36(3): 253-266.

[2] 刘 昊. 一类三维非线性扩散方程的快速数值方法研究 [D]. 沈阳: 沈阳师范大学, 2023.
LIU Hao. Study on Fast Numerical Method for a Class of Three-Dimensional Nonlinear Diffusion Equations[D]. Shenyang: Shenyang Normal University, 2023.

[3] 刘圣恩, 葛永斌, 祁应楠. 非线性反应扩散方程的高精度有限差分方法 [J]. 应用数学, 2023, 36(3): 747-755.
LIU Sheng'en, GE Yongbin, QI Yingnan. High-Order Finite Difference Scheme for the Nonlinear Reaction Diffusion Equation[J]. Mathematica Applicata, 2023, 36(3): 747-755.

[4] 张嘉杰. 非线性反应扩散方程的高阶紧致差分算法 [D]. 南充: 西华师范大学, 2022.
ZHANG Jiajie. High-Order Compact Difference Algorithm for Nonlinear Reaction-Diffusion Equation[D]. Nanchong: China West Normal University, 2022.

[5] 张朝凤. 一类四阶非线性反应扩散方程的非标准有限元方法 [D]. 郑州: 郑州大学, 2022.
ZHANG Zhao Feng. Nonstandard Finite Element Method for a Class of Fourth-Order Nonlinear Reaction-Diffusion Equations[D]. Zhengzhou: Zhengzhou University, 2022.

[6] 孙志忠. 偏微分方程数值解法 [M]. 3 版. 北京: 科学出版社, 2022: 226-286.
SUN Zhizhong. Numerical Solution of Partial Differential Equation[M]. 3rd ed. Beijing: Science Press, 2022:

- 226–286.
- [7] 杨雪花, 刘艳玲, 张海湘. 计算高维带弱奇异核发展型方程的交替方向隐式欧拉方法[J]. 计算数学, 2023, 45(1): 39–56.
- YANG Xuehua, LIU Yanling, ZHANG Haixiang. Alternating Direction Implicit Euler Method for the High-Dimensional Evolution Equations with Weakly Singular Kernel[J]. *Mathematica Numerica Sinica*, 2023, 45(1): 39–56.
- [8] 杨雪花, 蒋小玄, 刘艳玲, 等. 二维带弱奇异核抛物型积分微分方程的交替方向隐式有限差分格式[J]. 高等学校计算数学学报, 2022, 44(3): 267–284.
- YANG Xuehua, JIANG Xiaoxuan, LIU Yanling, et al. Alternating Direction Implicit Finite Difference Method for Two-Dimensional Parabolic-Type Integro-Differential Equations with a Weakly Singular Kernel[J]. *Numerical Mathematics A Journal of Chinese Universities*, 2022, 44(3): 267–284.
- [9] YANG X H, WU L J, ZHANG H X. A Space-Time Spectral Order Sinc-Collocation Method for the Fourth-Order Nonlocal Heat Model Arising in Viscoelasticity[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2023, 457: 128192.
- [10] SHI Y, YANG X H. Pointwise Error Estimate of Conservative Difference Scheme for Supergeneralized Viscous Burgers' Equation[J]. *Electronic Research Archive*, 2024, 32(3): 1471–1497.
- [11] 钱江, 陈雨青, 刘雯星. 基于二元三次 B 样条拟插值的反应-扩散方程数值解[J]. 四川师范大学学报(自然科学版), 2024, 47(3): 411–421.
- QIAN Jiang, CHEN Yuqing, LIU Wenxing. Numerical Solutions of Reaction-Diffusion Equations Based on Bivariate Cubic B-Spline Quasi-Interpolation[J]. *Journal of Sichuan Normal University (Natural Science)*, 2024, 47(3): 411–421.
- [12] 高鹏. 非线性时空分数阶反应扩散方程的可解性[D]. 兰州: 西北师范大学, 2023.
- GAO Peng. Solvability of Nonlinear Space-Time Fractional Reaction-Diffusion Equation[D]. Lanzhou: Northwest Normal University, 2023.
- [13] 张荣培, 刘昊, 左韩星, 等. 基于快速傅里叶变换的有限差分方法求解三维反应扩散方程[J]. 沈阳师范大学学报(自然科学版), 2023, 41(1): 73–77.
- ZHANG Rongpei, LIU Hao, ZUO Hanxing, et al. Finite Difference Method Based on Fast Fourier Transform for Solving Three Dimensional Reaction Diffusion Equation[J]. *Journal of Shenyang Normal University (Natural Science Edition)*, 2023, 41(1): 73–77.
- [14] 鲁清清. 反应扩散方程的双插值有限元法研究[D]. 长沙: 湖南师范大学, 2021.
- LU Qingqing. Study on Double Interpolation Finite Element Method for Reaction-Diffusion Equation[D]. Changsha: Hunan Normal University, 2021.
- [15] 吴金泰, 李晋达, 蒋思艺, 等. 反应扩散方程的差分解法: 以行星冷却模型为例[J]. 大学物理, 2020, 39(3): 72–77.
- WU Jintai, LI Jinda, JIANG Siyi, et al. The Difference Method for Solving the Reaction-Diffusion Equation: Planetary Cooling Model as an Example[J]. *College Physics*, 2020, 39(3): 72–77.
- [16] 张亚平. 几类分数阶扩散方程的数值方法[D]. 湘潭: 湘潭大学, 2020.
- ZHANG Yaping. Numerical Methods for Several Kinds of Fractional Diffusion Equations[D]. Xiangtan: Xiangtan University, 2020.
- [17] 李曹杰, 张海湘, 杨雪花. 一类椭圆型 Dirichlet 边值问题的高精度 Richardson 外推法[J]. 湖南工业大学学报, 2024, 38(1): 91–97, 104.
- LI Caojie, ZHANG Haixiang, YANG Xuehua. A High-Precision Richardson Extrapolation Method for a Class of Elliptic Dirichlet Boundary Value Calculation[J]. *Journal of Hunan University of Technology*, 2024, 38(1): 91–97, 104.
- [18] 王佳威, 张海湘, 杨雪花. 一类非线性 Burgers 型问题的预测校正紧差分方法[J]. 湖南工业大学学报, 2024, 38(1): 98–104.
- WANG Jiawei, ZHANG Haixiang, YANG Xuehua. A Predictor-Corrector Compact Difference Scheme for a Class of Nonlinear Burgers Equations[J]. *Journal of Hunan University of Technology*, 2024, 38(1): 98–104.

(责任编辑: 申剑)