doi:10.3969/j.issn.1673-9833.2025.04.012

具有不确定性脉冲系统的鲁棒有限时间稳定性

杨　祯[1]，刘　斌[1]，李梦歌[2]，周小奇[3]

（1. 湖南工业大学 理学院，湖南 株洲 412007；2. 湖南工业大学 电气与信息工程学院，湖南 株洲 412007；
3. 湖南信息学院 通识学院，湖南 长沙 410151）

摘　要：主要研究了具有不确定性脉冲系统的有限时间稳定性。首先，基于比较原理，引入 Hamilton-Jacobi/ Riccati 不等式，分别得到不确定性脉冲系统有限时间稳定性和鲁棒有限时间稳定性的判据。然后，通过两个数值例子验证了所得结果的有效性。

关键词：不确定性脉冲系统；有限时间稳定性；鲁棒有限时间稳定性；比较原理

中图分类号：O193　　　　**文献标志码**：A　　　　**文章编号**：1673-9833(2025)04-0089-07

引文格式：杨　祯，刘　斌，李梦歌，等. 具有不确定性脉冲系统的鲁棒有限时间稳定性[J]. 湖南工业大学学报，2025，39(4)：89-95.

Research on Robust Finite-Time Stability of Impulsive Systems with Uncertainty

YANG Zhen[1]，LIU Bin[1]，LI Mengge[2]，ZHOU Xiaoqi[3]

（1. College of Science，Hunan University of Technology，Zhuzhou Hunan 412007，China；2. College of Electrical and Information Engineering，Hunan University of Technology，Zhuzhou Hunan 412007，China；3. College of Liberal Studies，Hunan University of Information Technology，Changsha 410151，China）

Abstract：A research has been made mainly on the finite-time stability of impulsive systems with uncertainty. Firstly, based on the comparison principle, Hamilton-Jacobi/Riccati inequality has been introduced so as to obtain the criterion of finite-time stability and finite-time robust stability of impulsive systems with uncertainty, respectively. Finally, the validity of the obtained results can be verified by two numerical examples.

Keywords：uncertainty impulsive system；finite-time stability；robust finite-time stability；comparison principle

1　研究背景

脉冲微分方程描述的系统常常被称作脉冲动态系统或脉冲系统[1]。不确定性脉冲系统是指脉冲系统模型参数或干扰是不确定的，这些不确定性的存在导致系统的建模精度和控制效果受到影响。Liu B. 等[2]通过引入均匀正定矩阵函数和Hamilton-Jacobi/Riccati不等式的概念，建立了不确定性脉冲系统的鲁棒稳定性、鲁棒渐近稳定性和鲁棒指数稳定性的判别准则。Chen W. H. 等[3]利用 Lyapunov 函数和 Razumikhin-type 技术，研究了具有不确定的时滞脉冲系统的鲁棒稳定性、镇定性和 H_∞ 控制问题。F. Amato 等[4]首次

收稿日期：2024-03-01

基金项目：国家自然科学基金资助项目（62073132）

作者简介：杨　祯，女，湖南工业大学硕士生，主要研究方向为脉冲系统的有限时间稳定性，
E-mail：m22070100013@stu.hut.edu.cn

通信作者：刘　斌，男，湖南工业大学教授，博士，硕士生导师，主要研究方向为混合系统与网络的稳定性与脉冲控制，
E-mail：liubin@hut.edu.cn

研究了一类不确定混合系统的鲁棒有限时间稳定性，特别考虑了不确定性脉冲动力系统，其状态轨迹可以由时间驱动，也可以由特定状态值驱动，并给出了不确定性脉冲动力系统达到有限时间稳定的充分条件。

近年来，脉冲系统的有限时间稳定性研究在控制领域引起了广泛关注，有限时间稳定与 Lyapunov 稳定性不同，指的是系统的解会在有限时间内达到平衡状态。有不少学者对脉冲切换系统的有限时间稳定性进行了研究 [5-7]。Li X. D. 等 [8-10] 研究了非线性脉冲系统、时变非线性脉冲系统和具有扰动的脉冲系统的有限时间稳定性，结合 Lyapunov 条件，给出了各脉冲系统稳定时间的估算法。吴桐等 [11] 构建了新的 Lyapunov 泛函，利用 Caputo 导数性质以及广义的 Gronwall 不等式研究了分数阶退化脉冲微分系统的有限时间稳定性，给出了不具有扰动情形下分数阶退化脉冲微分系统的有限时间稳定性判据。吴迪等 [12] 基于 Lyapunov 理论，给出了在固定驻留时间条件下非线性脉冲系统有限时间输入到状态稳定的一个充分条件。仝云旭等 [13] 利用线性矩阵不等式和松弛变量，给出了离散时间不确定脉冲系统的有限时间稳定性充分条件。Hu H. 等 [14] 将非线性无脉冲系统的经典有限时间和固定时间收敛定理很好地推广到非线性脉冲系统。

比较原理是基于 Lyapunov 稳定性分析方法的一种延伸，其基本思路是将一个复杂多维系统的平凡解稳定性问题简化为一个简单的标量微分方程平凡解的稳定性问题。Liu B.[15] 基于比较原理研究了随机脉冲系统解的稳定性问题，在此基础上，对脉冲动力系统、随机脉冲系统的有限时间稳定性展开研究，提出了脉冲动力系统、随机脉冲系统的有限时间稳定性、广义类函数有限时间稳定性判据，放宽了有限时间条件和系统跳变要求 [16-18]。李羽辰等 [19] 基于平均脉冲区间理论对有时滞的脉冲随机系统的有限时间稳定性进行了分析。

虽然目前对于脉冲系统的有限时间稳定性已有很多研究成果，但关于不确定脉冲系统的有限时间稳定性进行的研究还相对较少，其鲁棒有限时间稳定性准则也没有相应成果。因此，本文拟通过比较原理和 Hamilton-Jacobi/Riccati 不等式，推导出不确定性脉冲系统的有限时间稳定性与鲁棒有限时间稳定性准则，并以数值算例验证所得结果。

本文中，设 $\mathbf{R}^n$ 为 n 维欧几里得空间，$\mathbf{R}^+$=[0, +∞]，$\mathbf{N}=\{1, 2, \cdots\}$，$\mathbf{Z}^+$ 为非负整数集合，即 $\mathbf{Z}^+=\{0, 1, 2, \cdots\}$。$\|\cdot\|$ 为欧几里得范数。σ 为一类连续且严格单调递增的函数 $\phi:\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$；$\sigma_0$ 为一类当且仅当 s=0 时 $\psi(s)$=0 的函数；ζ 为一类除 t_k（$k\in\mathbf{N}$）外处处连续的函数 $\psi:\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$，且右极限 $\lambda(t_k^+)$ 存在的函数 $\lambda:\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$。

2 预备知识

考虑如下具有不确定性的脉冲系统：

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})+\boldsymbol{g}(t,\boldsymbol{x}),\ t\notin T=t_k;\\ \Delta\boldsymbol{x}=\boldsymbol{I}_k(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{J}_k(\boldsymbol{x}),\ t=t_k\in T,\ k\in\mathbf{N}。\end{cases}\tag{1}$$

式中：$\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$ 为状态向量；$\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}:\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^n$ 为矩阵函数；$\Delta\boldsymbol{x}$ 为脉冲，且 $\Delta\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t_k^+)-\boldsymbol{x}(t_k^-)$，其中，$\boldsymbol{x}(t_k^+)$ 为 $\boldsymbol{x}(t)$ 在 $t=t_k$ 时的右极限，$\boldsymbol{x}(t_k^-)$ 为左极限；$\boldsymbol{I}_k, \boldsymbol{J}_k:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n$ 为脉冲矩阵，t_k, $k\in\{1, 2, \cdots\}$ 为脉冲跳跃点；$\boldsymbol{g}(t,\boldsymbol{x})$、$\boldsymbol{J}_k(\boldsymbol{x})$ 为结构不确定性或者不确定扰动，满足

$$\boldsymbol{g}\in\Omega_g=\{\boldsymbol{g}:\boldsymbol{g}(t,\boldsymbol{x})=\boldsymbol{e}_g(t,\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{\delta}_g(t,\boldsymbol{x}),\ \|\boldsymbol{\delta}_g(\boldsymbol{x})\|\leqslant\|\boldsymbol{m}_g(\boldsymbol{x})\|\};$$

$$\boldsymbol{J}_k\in\Omega_J=\{\boldsymbol{J}_k:\boldsymbol{J}_k(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{e}_k(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{\delta}_k(\boldsymbol{x}),\ \|\boldsymbol{\delta}_k(\boldsymbol{x})\|\leqslant\|\boldsymbol{m}_k(\boldsymbol{x})\|\},\ k\in\mathbf{N}。$$

其中，$\boldsymbol{e}_g:\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}^{n\times m}$、$\boldsymbol{e}_k:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^m\to\mathbf{R}^{n\times m}$ 为已知的矩阵函数且其状态平滑，$\boldsymbol{\delta}_g$、$\boldsymbol{\delta}_k$ 为未知的有界向量值函数，其范数分别由向量值函数 $\boldsymbol{m}_g(t,\boldsymbol{x}), \boldsymbol{m}_k(\boldsymbol{x})$ 的范数界定，$\boldsymbol{m}_g:\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$，$\boldsymbol{m}_k:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m\ (k\in\mathbf{N})$ 为连续函数。

设 $t_0\in\mathbf{R}^+$、$x_0\in\mathbf{R}^n$，用 $\boldsymbol{x}(t, t_0, x_0)$ 表示系统（1）在初始条件 $\boldsymbol{x}(t_0^+)=x_0$ 的解，所有解 $\boldsymbol{x}(t, t_0, x_0)$ 对于 $t\geqslant t_0$ 都存在。假设对于所有 $t\in\mathbf{R}^+$, $k\in\mathbf{N}$, 都有 $\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})$=0、$\boldsymbol{\delta}_g(t,\boldsymbol{x})$=0、$\boldsymbol{I}_k(0)$=0、$\boldsymbol{\delta}_k(t,\boldsymbol{x})$=0。因此，$\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 是系统（1）的解。

定义 1[2] 如果存在 $\boldsymbol{V}:\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^+$，且满足：

1）$\boldsymbol{V}$ 在 $(t_{k-1}, t_k)\times\mathbf{R}^n$ 连续且对于每个 $\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$，$t\in(t_{k-1}, t_k)$，$k\in\mathbf{N}$ 存在

$$\lim_{(t,y)\to(t_{k-1}^+,x)}\boldsymbol{V}(t,y)=\boldsymbol{V}(t_{k-1}^+,\boldsymbol{x});\tag{2}$$

2）$\boldsymbol{V}$ 在 $\boldsymbol{x}$ 中满足局部 Lipschitz 条件；

则称 $\boldsymbol{V}$ 属于 $\boldsymbol{v}_0$ 类函数。

定义 2[2] 对于 $\boldsymbol{v}_0$ 类函数 $\boldsymbol{V}$, 定义其沿着系统（1）的 Dini 导数为

$$D^+\boldsymbol{V}(t,\boldsymbol{x})=\lim_{s\to0^+}\sup\frac{1}{s}\Big[\boldsymbol{V}\big(t+s,\boldsymbol{x}+s(\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})+\boldsymbol{g}(t,\boldsymbol{x}))-\boldsymbol{V}(t,\boldsymbol{x})\Big]。\tag{3}$$

定义 3[18] 如果函数 $\gamma:\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$ 为连续且严格单调递增的函数，且 $\gamma(0)$=0，则称 γ 为 $\mathcal{K}$ 类函数；特

别地，如果 γ 是 $\mathcal{K}$ 类函数且无界，则称 γ 为 $\mathcal{K}_\infty$ 类函数。如果对于任意 $s\in\mathbf{R}^+$，$\beta(\cdot, s)$ 是 $\mathcal{K}$ 类函数，当 $a>0$ 时，$\beta(a, \cdot)$ 递减且满足 $\lim\limits_{t\to\infty}\beta(a, t)=0$，则称函数 $\beta:\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$ 为 $\mathcal{KL}$ 类函数。

定义 4[18]　对于给定的一个集合 $U\subseteq\mathbf{R}^n$，且有 $0\in U$，如果存在 $T\left(x_0, \{t_k\}\right)\in\mathbf{R}^+$，使得

$$\boldsymbol{x}(t)=0,\ \forall t\geqslant t_0+T\left(x_0, \{t_k\}\right), \tag{4}$$

则称系统（1）在 U 上是有限时间收敛的。特别地，如果 $U=\mathbf{R}^n$，则称系统（1）是全局有限时间收敛的。

定义 5[18]　对于给定的一个集合 $U\subseteq\mathbf{R}^n$，有 $0\in U$，如果系统（1）在稳定时间 T 内实现有限时间收敛，且对于任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得当 $t\in\left[t_0,\ t_0+T\left(x_0, \{t_k\}\right)\right)$ 时，有

$$\|x_0\|<\delta\Rightarrow\|\boldsymbol{x}(t)\|<\varepsilon, \tag{5}$$

则称系统（1）在 U 上是有限时间稳定的。特别的，如果 $U=\mathbf{R}^n$，则称系统（1）是全局有限时间稳定的。

定义 6[2]　对于不确定脉冲系统（1）中的任意不确定项 $\boldsymbol{g}(t, \boldsymbol{x})\in\Omega_g$、$\boldsymbol{J}_k\in\Omega_J(k\in\mathbf{N})$，如果系统（1）的平凡解 $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 是有限时间稳定的，则称系统（1）是鲁棒有限时间稳定的。

3　主要结果

假设 1　假设存在函数 $V\in\mathbf{C}\left[\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^n,\ \mathbf{R}^+\right]$，

1）存在 $\mathcal{K}$ 类函数 $c_1, c_2\in\mathcal{K}_\infty$ 使得对 $\forall(t, \boldsymbol{x})\in\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^n$，有

$$c_1\left(\|\boldsymbol{x}(t)\|\right)\leqslant V\left(t, \boldsymbol{x}(t)\right)\leqslant c_2\left(\|\boldsymbol{x}(t)\|\right); \tag{6}$$

2）存在连续函数 $h:\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$，对于每一个 t 在 s 上 $h(t, s)$ 都为非减函数使得

$$D^+V\leqslant h\left(t,\ V\left(t, \boldsymbol{x}\right)\right); \tag{7}$$

3）存在非递减函数 ψ_k: $\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$，使得

$$V\left(t, \boldsymbol{x}+\boldsymbol{I}_k(\boldsymbol{x})\right)\leqslant\psi_k\left(V\left(t, \boldsymbol{x}\right)\right); \tag{8}$$

为了使用比较原理，设 $\boldsymbol{y}(t)$ 为与假设 1 相关的确定性脉冲系统的解：

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{y}}=h\left(t, \boldsymbol{y}\right),\ t\notin\mathbf{S};\\ \boldsymbol{y}\left(t^+\right)=\psi_k\left(\boldsymbol{y}(t)\right),\ t=t_k\in\mathbf{S};\\ \boldsymbol{y}\left(t_0^+\right)=y_0\geqslant 0。\end{cases} \tag{9}$$

定理 1　如果假设 1 成立，且确定性脉冲系统（9）的解 $\boldsymbol{y}(t)$ 是有限时间稳定的，则不确定脉冲系统（1）的解 $\boldsymbol{x}(t)$ 也是有限时间稳定的。

证明　假设确定性脉冲系统（9）的解 $\boldsymbol{y}(t)$ 在 $[t_0, +\infty]$ 存在。由文献 [15, 20] 可知，对于 $x_0\in\mathbf{R}^n$，不确定性脉冲系统（1）的解 $\boldsymbol{x}(t)$ 在 $[t_0, +\infty]$ 也存在。当 $t\geqslant t_0$ 时，由 $V\left(t_0^+, x_0\right)\leqslant y_0$ 可得 $V\left(t, \boldsymbol{x}(t)\right)\leqslant\boldsymbol{y}(t)$。

设确定性脉冲系统（9）是有限时间稳定的，其稳定时间为 $T_y\left(y_0, \{t_k\}\right)>0$。即当 $\forall t\geqslant t_0+T_y$，其解 $\boldsymbol{y}(t)$ 满足 $\boldsymbol{y}(t)=0$；且当 $t\geqslant t_0$ 时，对于任意满足 $V\left(t_0^+, x_0\right)\leqslant y_0$ 的 x_0，使得假设 1 和 $V\left(t^+, \boldsymbol{x}(t)\right)\leqslant\boldsymbol{y}(t)$ 成立，可得对任意 $t\geqslant[t_0+T_y\left(y_0, \{t_k\}\right)$，有

$$\|\boldsymbol{x}(t)\|\leqslant c_1^{-1}V\left(t, \boldsymbol{x}(t)\right)\leqslant c_1^{-1}\left(\boldsymbol{y}(t)\right)=0。 \tag{10}$$

由式（10）可知，不确定性脉冲系统（1）对于所有满足 $V\left(t_0^+, x_0\right)\leqslant y_0$ 的 x_0 是有限时间收敛的，且稳定时间满足 $T_x\left(x_0, \{t_k\}\right)<T_y\left(y_0, \{t_k\}\right)$。

同时，系统（9）有限时间稳定意味着其有限时间有界。即对于所有的 $t\in\left[t_0,\ t_0+T_y\left(y_0, \{t_k\}\right)\right]$、$\mu>0$，存在 $\delta_1=\delta_1(\mu)$，使得 $y_0<\delta_1\Rightarrow\boldsymbol{y}(t)<c_1(\mu)$。考虑 δ 为 $0<\delta=\delta(\mu)<c_2^{-1}(\delta_1(\mu))$，由于 $c_2\in\mathcal{K}$，可得 $c_2(\delta)<\delta_1$。

对于任意满足 $\|x_0\|<\delta$ 的 x_0，考虑满足 $c_2(\delta)\leqslant y_0\leqslant\delta_1$ 的 y_0，则对于任意的 $t\in\left[t_0,\ t_0+T_y\left(y_0, \{t_k\}\right)\right]$，有 $\boldsymbol{y}(t)<c_1(\mu)$ 成立。可得：

$$V\left(t_0^+, x_0\right)\leqslant c_2\|x_0\|\leqslant c_2(\delta)\leqslant y_0。 \tag{11}$$

由式（6）可知，对于 $\forall t\in\left[t_0,\ t_0+T_y\left(y_0, \{t_k\}\right)\right]$，有

$$\|\boldsymbol{x}(t)\|\leqslant c_1^{-1}V\left(t, \boldsymbol{x}(t)\right)\leqslant c_1^{-1}\left(\boldsymbol{y}(t)\right)<\mu。 \tag{12}$$

由此可知，系统（1）是有限时间有界的。系统（9）是有限时间稳定的，则意味着系统（1）是有限时间稳定的。

引理 1[21]　对于任意 $\boldsymbol{\xi}\in\mathbf{R}^n$、$\boldsymbol{\eta}\in\mathbf{R}^n$，以及函数 $\lambda(t)>0$，有以下不等式成立：

$$2\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\eta}<\lambda(t)^{-1}\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}+\lambda(t)\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\eta}。 \tag{13}$$

定理 2　对于不确定脉冲系统（1），假设存在一个函数 $V\in\boldsymbol{v}_0$，对于任意的 $k\in\mathbf{N}$，使得 $V(t, \boldsymbol{x})$ 在 $(t_{k-1}, t_k)\times\mathbf{R}^n$，且假设 1 的条件成立，进一步作如下假设：

1）存在函数 $\boldsymbol{P}_1$: $\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^m\to\mathbf{R}^{1\times m}$，$\boldsymbol{P}_2$: $\mathbf{R}^m\times\mathbf{R}^m\to\mathbf{R}^{m\times m}$ 且 $\boldsymbol{P}_2(t,\ \boldsymbol{x})\geqslant 0$，对于 $t\in\mathbf{R}^+$、$\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$、$\boldsymbol{y}\in\mathbf{R}^n$、$k\in\mathbf{N}$ 有

$$\begin{aligned}&V\left(t,\ \boldsymbol{x}+\boldsymbol{I}_k(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{e}_k(\boldsymbol{x})\boldsymbol{y}\right)\leqslant V\left(t,\ \boldsymbol{x}+\boldsymbol{I}_k(\boldsymbol{x})\right)+\\&\quad\boldsymbol{P}_1(t, \boldsymbol{x})\boldsymbol{y}+\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_2(t, \boldsymbol{x})\boldsymbol{y};\end{aligned} \tag{14}$$

2）存在一个正常数 ε_k（$k\in\mathbf{N}$），使得

$$\begin{aligned}&V\left(t_k^+,\ \boldsymbol{x}_k+\boldsymbol{I}_k(\boldsymbol{x})\right)+\varepsilon_k^{-1}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_1^{\mathrm{T}}+\\&\quad\left(\varepsilon_k+\lambda_{\max}(\boldsymbol{P}_2)\right)\boldsymbol{m}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{m}_k\leqslant\mathrm{e}^d\left(V\left(t_x, \boldsymbol{x}_k\right)\right),\end{aligned} \tag{15}$$

式中：$\boldsymbol{P}_1=\boldsymbol{P}_1(t_x, \boldsymbol{x}_k)$，$\boldsymbol{P}_2=\boldsymbol{P}_2(t_x, \boldsymbol{x}_k)$，$\boldsymbol{m}_k=\boldsymbol{m}_k(\boldsymbol{x}_k)$，$k\in\mathbf{N}$；

3）存在 $c\in\sigma$、$p\in\zeta$，且存在标量函数 $\lambda_k\in\mathbf{C}\left[\mathbf{R}^n,\ \mathbf{R}^+\right]$，使得

$$\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t}+\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{f}+\frac{\lambda_k^2}{2}\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{e}_g\boldsymbol{e}_g^{\mathrm{T}}\frac{\partial \boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{x}}+\frac{1}{2\lambda_k^2}\boldsymbol{m}_g^{\mathrm{T}}\boldsymbol{m}_g\leqslant\alpha\boldsymbol{V}-\lambda\,\mathrm{sgn}(\boldsymbol{V}),\tag{16}$$

式中$(t,\boldsymbol{x})\in(t_k,t_{k+1}]\times S_\rho$，$k\in\mathbf{N}$。

系统（1）是鲁棒有限时间稳定的，其稳定时间分为以下几种情况：

1）当 $\alpha<0$、$d\leqslant 0$，则系统（1）的稳定时间为 $T\left(x_0,\{t_k\}\right)\leqslant\frac{1}{\alpha}\ln\frac{\tilde\lambda}{-\alpha\boldsymbol{V}\left(t_0^+,x_0\right)+\tilde\lambda}$，其中 $\tilde\lambda=\min\left\{\lambda,-\alpha\boldsymbol{V}\left(t_0^+,x_0\right)\right\}$；

2）当 $\alpha<0$、$d>0$，平均驻留时间条件成立，

$$N(t_0,t]\leqslant-N_0+(t-t_0)/\tau_a,\ \forall t\geqslant t_0\geqslant 0;\tag{17}$$

式中 $N_0\geqslant 0$，$\tau_a>d/(-a)>0$。

则系统（1）的稳定时间为 $T\left(x_0,\{t_k\}\right)\leqslant\tau_a/(\alpha\tau_a+d)\cdot\ln\left\{\tilde\lambda\mathrm{e}^{N_0d}\Big/\left[-\alpha\mathrm{e}^d\boldsymbol{V}\left(t_0^+,x_0\right)+\tilde\lambda\right]\right\}$，其中 $\tilde\lambda=\min\left\{\lambda,-\alpha\boldsymbol{V}\cdot\left(t_0^+,x_0\right)\right.$。

3）当 $\alpha>0$、$d<0$ 时，存在逆平均驻留时间条件

$$N(t_0,t]\geqslant N_0+(t-t_0)/\tau_a,\ \forall t>t_0\geqslant 0,\tag{18}$$

式中：$0\leqslant N_0<1$，$0<\tau_a<-d/\alpha$。

则系统（1）的稳定时间为 $T\left(x_0,\{t_k\}\right)\leqslant\frac{\tau_a}{a\tau_a+d}\cdot\ln\frac{\tilde\lambda\mathrm{e}^{(1-N_0)}d}{\alpha\boldsymbol{V}\left(t_0^+,x_0\right)}$，其中，$\tilde\lambda=\min\left\{\lambda,\alpha\boldsymbol{V}\left(t_0^+,x_0\right)\right\}$。

证明 当 $t=t_k$, $k\in\mathbf{N}$, 通过条件（1）（2）和引理 1，可得：

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{V}\left(t_k^+,\boldsymbol{x}_k+\boldsymbol{I}_k(\boldsymbol{x}_k)+\boldsymbol{J}_k(\boldsymbol{x}_k)\right)\leqslant\boldsymbol{V}\left(t_k^+,\boldsymbol{x}_k+\boldsymbol{I}_k(\boldsymbol{x}_k)\right)+\\&\boldsymbol{P}_1\delta_k(\boldsymbol{x}_k)+\boldsymbol{\delta}_k(\boldsymbol{x}_k)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{\delta}_k(\boldsymbol{x}_k)\leqslant\boldsymbol{V}\left(t_k^+,\boldsymbol{x}_k+\boldsymbol{I}_k(\boldsymbol{x}_k)\right)+\\&\varepsilon_k^{-1}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_1^{\mathrm{T}}+\varepsilon_k\boldsymbol{m}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{m}_k+\lambda_{\max}(\boldsymbol{P}_2)\boldsymbol{m}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{m}_k=\\&\boldsymbol{V}\left(t_k^+,\boldsymbol{x}_k+\boldsymbol{I}_k(\boldsymbol{x}_k)\right)+\varepsilon_k^{-1}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_1^{\mathrm{T}}+\\&\left(\varepsilon_k+\lambda_{\max}(\boldsymbol{P}_2)\right)\boldsymbol{m}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{m}_k\leqslant\mathrm{e}^d\cdot\boldsymbol{V}(t,\boldsymbol{x})。\end{aligned}\tag{19}$$

令 $\boldsymbol{V}=\boldsymbol{V}(t,\boldsymbol{x})$、$\boldsymbol{f}=\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})$、$\boldsymbol{g}=\boldsymbol{g}(t,\boldsymbol{x})$、$\boldsymbol{m}_g=\boldsymbol{m}_g(t,\boldsymbol{x})$、$\boldsymbol{\delta}_g=\boldsymbol{\delta}_g(t,\boldsymbol{x})$、$\lambda_k=\lambda(t)$，则对于 $t\neq t_k$，$k\in\mathbf{N}$，根据不等式（16），有

$$\begin{aligned}&D^+\boldsymbol{V}\left(t,\boldsymbol{x}(t)\right)=\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t}+\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{f}+\boldsymbol{g})=\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t}+\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{f}+\\&\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{e}_g\boldsymbol{\delta}_g=\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t}+\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{f}+\frac{\lambda_k^2}{2}\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{e}_g\boldsymbol{e}_g^{\mathrm{T}}\frac{\partial \boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{x}}+\\&\frac{1}{2\lambda_k^2}\boldsymbol{m}_g^{\mathrm{T}}\boldsymbol{m}_g-\frac{1}{2}\lambda_k\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{e}_g-\frac{1}{\lambda_k}\boldsymbol{\delta}_g^{\mathrm{T}}\cdot\lambda_k\boldsymbol{e}_g^{\mathrm{T}}\frac{\partial \boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{x}}-\\&\frac{1}{\lambda_k}\boldsymbol{\delta}_g-\frac{1}{2\lambda_k^2}\boldsymbol{m}_g^{\mathrm{T}}\boldsymbol{m}_g-\boldsymbol{\delta}_g^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\delta}_g\leqslant\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t}+\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{f}+\\&\frac{\lambda_k^2}{2}\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{e}_g\boldsymbol{e}_g^{\mathrm{T}}\frac{\partial \boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{x}}+\frac{1}{2\lambda_k^2}\boldsymbol{m}_g^{\mathrm{T}}\boldsymbol{m}_g\leqslant\alpha\boldsymbol{V}-\tilde\lambda\,\mathrm{sgn}(\boldsymbol{V})。\end{aligned}\tag{20}$$

因此，由文献 [18] 中的定理 4.1，通过式（19）和式（20），可以得知系统（1）是鲁棒有限时间稳定的，并且其稳定时间可以分为定理 2 中描述的 3 种情况。证毕。

定理 3 假设存在一个函数 $V\in\boldsymbol{v}_0$ 对于任意 $k\in\mathbf{N}$，使得 $\boldsymbol{V}(t,\boldsymbol{x})$ 在 $(t_{k-1},t_k)\times\mathbf{R}^n$，且假设 1 的条件成立，进一步假设：

1）有式（14）和式（15）成立。

2）存在 $c\in\sigma$、$p\in\xi$，且存在标量函数 $\lambda_k\in\mathbf{C}\left[\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^+\right]$，使得

$$\begin{aligned}&\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t}+\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{f}+\frac{\lambda_k^2}{2}\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{e}_g\boldsymbol{e}_g^{\mathrm{T}}\frac{\partial \boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{x}}+\\&\frac{1}{2\lambda_k^2}\boldsymbol{m}_g^{\mathrm{T}}\boldsymbol{m}_g\leqslant-\alpha\cdot\left(\boldsymbol{V}(t,\boldsymbol{x})\right)^\eta,\end{aligned}\tag{21}$$

式中$(t,\boldsymbol{x})\in t_k,t_{k+1}\times S_\rho$，$k\in\mathbf{N}$。

则系统（1）是鲁棒有限时间稳定的，其稳定时间分为以下几种情况：

1）如果 $d<0$，则系统（1）的稳定时间为 $T\left(x_0,\{t_k\}\right)\leqslant\left[\boldsymbol{V}\left(t_0^+,x_0\right)^{1-\eta}\Big/(1-\eta)\alpha\right]\mathrm{e}^{-d(1-\eta)\mathrm{e}^{-\theta N(t_0,t_0+T]}}$，其中 θ 满足 $0\leqslant\theta\leqslant-d(1-\eta)$；

2）如果 $d=0$，则系统（1）的稳定时间为 $T\left(x_0,\{t_k\}\right)\leqslant\boldsymbol{V}\left(t_0^+,x_0\right)^{1-\eta}\Big/\left[(1-\eta)\alpha\right]$；

3）如果 $d>0$，则系统（1）的稳定时间为 $T\left(x_0,\{t_k\}\right)\leqslant t_N-t_0$，其中 $N\in\mathbf{Z}^+$，其值由 $\Delta_{\inf}\triangleq\inf\limits_{k\in\mathbf{Z}^+}\{\Delta_k\}\geqslant\frac{\left(1-\mathrm{e}^{-d(1-\eta)N}\right)\left(\boldsymbol{V}\left(t_0^+,x_0\right)\right)^{1-\eta}}{\left(1-\mathrm{e}^{-d(1-\eta)}\right)(1-\eta)\alpha}$ 决定。

证明 当 $t=t_k$, $k\in\mathbf{N}$, 通过条件（1）（2）和引理 1，可得

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{V}\left(t_k^+,\boldsymbol{x}_k+\boldsymbol{I}_k(\boldsymbol{x}_k)+\boldsymbol{J}_k(\boldsymbol{x}_k)\right)\leqslant\boldsymbol{V}\left(t_k^+,\boldsymbol{x}_k+\boldsymbol{I}_k(\boldsymbol{x}_k)\right)+\\&\boldsymbol{P}_1\delta_k(\boldsymbol{x}_k)+\boldsymbol{\delta}_k(\boldsymbol{x}_k)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{\delta}_k(\boldsymbol{x}_k)\leqslant\\&\boldsymbol{V}\left(t_k^+,\boldsymbol{x}_k+\boldsymbol{I}_k(\boldsymbol{x}_k)\right)+\varepsilon_k^{-1}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_1^{\mathrm{T}}+\varepsilon_k\boldsymbol{m}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{m}_k+\\&\lambda_{\max}(\boldsymbol{P}_2)\boldsymbol{m}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{m}_k=\boldsymbol{V}\left(t_k^+,\boldsymbol{x}_k+\boldsymbol{I}_k(\boldsymbol{x}_k)\right)+\\&\varepsilon_k^{-1}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_1^{\mathrm{T}}+\left(\varepsilon_k+\lambda_{\max}(\boldsymbol{P}_2)\right)\boldsymbol{m}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{m}_k\leqslant\mathrm{e}^d\cdot\boldsymbol{V}(t,\boldsymbol{x})。\end{aligned}\tag{22}$$

令 $\boldsymbol{V}=\boldsymbol{V}(t,\boldsymbol{x})$、$\boldsymbol{f}=\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})$、$\boldsymbol{g}=\boldsymbol{g}(t,\boldsymbol{x})$、$\boldsymbol{m}_g=\boldsymbol{m}_g(t,\boldsymbol{x})$、$\boldsymbol{\delta}_g=\boldsymbol{\delta}_g(t,\boldsymbol{x})$、$\lambda_k=\lambda(t)$，则对于 $t\neq t_k$，$k\in\mathbf{N}$，根据不等式（21），有

$$\begin{aligned}&D^+\boldsymbol{V}\left(t,\boldsymbol{x}(t)\right)=\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t}+\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{f}+\boldsymbol{g})=\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t}+\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{f}+\\&\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{e}_g\boldsymbol{\delta}_g=\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t}+\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{f}+\frac{\lambda_k^2}{2}\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{e}_g\boldsymbol{e}_g^{\mathrm{T}}\frac{\partial \boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{x}}+\\&\frac{1}{2\lambda_k^2}\boldsymbol{m}_g^{\mathrm{T}}\boldsymbol{m}_g-\frac{1}{2}\lambda_k\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{e}_g-\frac{1}{\lambda_k}\boldsymbol{\delta}_g^{\mathrm{T}}\cdot\lambda_k\boldsymbol{e}_g^{\mathrm{T}}\frac{\partial \boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{x}}-\end{aligned}$$

$$\frac{1}{\lambda_k}\boldsymbol{\delta}_g-\frac{1}{2\lambda_k^2}\boldsymbol{m}_g^{\mathrm{T}}\boldsymbol{m}_g-\boldsymbol{\delta}_g^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\delta}_g\leqslant\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t}+\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{f}+$$
$$\frac{\lambda_k^2}{2}\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{e}_g\boldsymbol{e}_g^{\mathrm{T}}\frac{\partial \boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{x}}+\frac{1}{2\lambda_k^2}\boldsymbol{m}_g^{\mathrm{T}}\boldsymbol{m}_g\leqslant-\alpha\cdot\left(\boldsymbol{V}(t,\ \boldsymbol{x})\right)^{\eta}。\tag{23}$$

因此，由文献 [18] 中定理 4.2，通过式（22）和（23），可得系统（1）是鲁棒有限时间稳定的，其稳定时间可分为定理 3 中描述的 3 种情况。证毕。

4　数值例子

例 1　考虑如下不确定性脉冲系统：

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}(t,\ \boldsymbol{x})+\boldsymbol{g}(t,\ \boldsymbol{x}),\ t\in(k,k+1];\tag{24}$$
$$\boldsymbol{I}_k(\boldsymbol{x})=b\boldsymbol{x},\ b\in\mathbf{R};\tag{25}$$

式中：$\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})=a\boldsymbol{x}-0.5\mathrm{sign}(\boldsymbol{x})$，

$$\boldsymbol{g}(t,\boldsymbol{x})\in\Omega_g=$$
$$\left\{\boldsymbol{g}:\boldsymbol{g}=\boldsymbol{e}_g\cdot\boldsymbol{\delta}_g,\ \boldsymbol{e}_g=1,\ \|\boldsymbol{\delta}_g\|\leqslant\|\boldsymbol{m}_g\|,\ \|\boldsymbol{m}_g\|=\boldsymbol{x}^{1/2}\right\},$$

取 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x})=|\boldsymbol{x}|$，易知 $\boldsymbol{V}\in\boldsymbol{v}_0$，且 $\boldsymbol{V}$ 在 $t\in\mathbf{R}^+$ 时处处可微。对于任意 $t\in(k,k+1]$，令 $\lambda_k=1$，有

$$\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t}+\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{f}+\frac{\lambda_k^2}{2}\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{e}_g\boldsymbol{e}_g^{\mathrm{T}}\frac{\partial \boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{x}}+\frac{1}{2\lambda_k^2}\boldsymbol{m}_g^{\mathrm{T}}\boldsymbol{m}_g=$$
$$\mathrm{sign}(\boldsymbol{x})\cdot\left(a\boldsymbol{x}-0.5\mathrm{sign}(\boldsymbol{x})\right)+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\boldsymbol{x}\leqslant$$
$$\alpha\boldsymbol{V}-\lambda\mathrm{sign}(\boldsymbol{x})。$$

其中 $\alpha=a+0.5$，$\lambda=0.5$，$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}^+)=\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{I}_k(\boldsymbol{x}))=|1+b|\boldsymbol{V}=\mathrm{e}^d\boldsymbol{V}$，其中 $d=\ln|1+b|$。

考虑以下 3 种情况：

1）$a=\alpha+0.5<0$，$d\leqslant0$。通过定理 2 情况 1）可得，不确定脉冲系统是鲁棒有限时间稳定的，稳定时间为 $T(x_0,\{t_k\})\leqslant\dfrac{1}{\alpha}\ln\dfrac{\min\{\lambda,-\alpha|x_0|\}}{-\alpha|x_0|+\min\{\lambda,-\alpha|x_0|\}}$。在仿真中，令 $a=-1.5$、$\alpha=a+0.5=-1$、$b=-0.5$、$x_0=1.5$，通过计算，得 $d=-0.693\ 1$、$T(x_0,\{t_k\})=-\ln(0.5/1)=0.693\ 1$。与仿真相符，图 1 表明该情况下系统（24）（25）在有限时间内达到稳定。

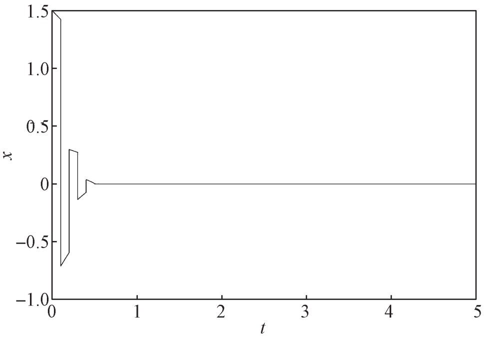

图 1　$\alpha=-1$，$b=-0.5$，$x_0=1.5$，$g=x^{1/2}$ **时的仿真结果**

Fig. 1　Simulation results with $\alpha=-1$，$b=-0.5$，$x_0=1.5$，$g=x^{1/2}$

2）$a=\alpha+0.5$，$d>0$。这使得 $\{t_k\}$ 和 $t_0=0$ 时满足 $\tau_a=0.1$, $N_0=0$ 时的平均驻留时间（16），则对于所有 $k\geqslant0$ 满足 $\Delta_k=t_{k+1}-t_k\geqslant\tau_a=0.1$，由定理 2 中情况（2），可得不确定脉冲系统是鲁棒有限时间稳定的，稳定时间为 $T(x_0,\{t_k\})\leqslant\dfrac{\tau_a}{\alpha\tau_a+d}\ln\dfrac{\min\{\lambda,-\alpha|x_0|\}\mathrm{e}^{N_0d}}{-\alpha\mathrm{e}^d|x_0|+\min\{\lambda,-\alpha|x_0|\}}$。在仿真中，令 $a=-1.5$、$\alpha=a+0.5=-1$、$b=0.4$、$x_0=1.5$、$\tau_a=0.2$。通过计算，可以得到 $d=0.095\ 3$、$T(x_0,\{t_k\})=0.2/(-0.2+0.095\ 3)\cdot\ln[0.5/(1.4\times1.4+0.5)=0.593\ 8$。图 2 所示仿真结果表明，在该情况下系统（24）（25）可在有限时间内达到稳定状态。

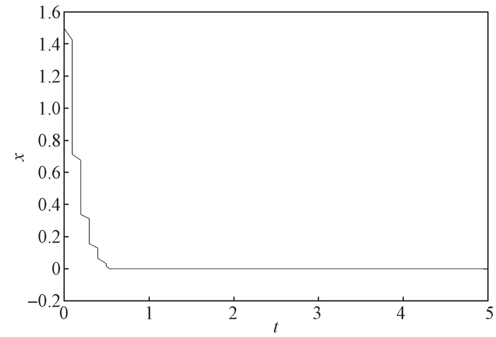

图 2　$\alpha=-1$，$b=0.5$，$x_0=1.5$，$g=x^{1/2}$ **时的仿真结果**

Fig. 2　Simulation results with $\alpha=-1$，$b=0.5$，$x_0=1.5$，$g=x^{1/2}$

3）$a=\alpha>0$，$d<0$。这使得 $\{t_k\}$ 和 $t_0=0$ 满足 $\Delta_k=t_{k+1}-t_k\geqslant\Delta_{\inf}=0.1$ 和 $\tau_a=0.2$、$N_0=0$ 时的逆平均驻留时间，则对所有 $k\geqslant0$，有 $\Delta_k<\tau_a=0.2$，由定理 2 的情况 3）可得不确定脉冲系统是鲁棒有限时间稳定的，稳定时间为 $T(x_0,\{t_k\})\leqslant\dfrac{\tau_a}{\alpha\tau_a+d}\ln\dfrac{\mathrm{e}^d\min\{\lambda,-\alpha|x_0|\}}{\alpha|x_0|}$。在仿真中，令 $a=0.5$、$\alpha=a+0.5=1$、$b=-0.5$、$x_0=1.5$、$\tau_a=0.3$。通过计算，可得 $d=-0.693\ 1$、$T(x_0,\{t_k\})=0.3/(0.3-0.693\ 1)\cdot\ln[(-0.5\times(-1.5))/1.5]=0.528\ 98$。图 3 所示仿真结果表明，该情况下系统（24）（25）在有限时间内达到稳定。

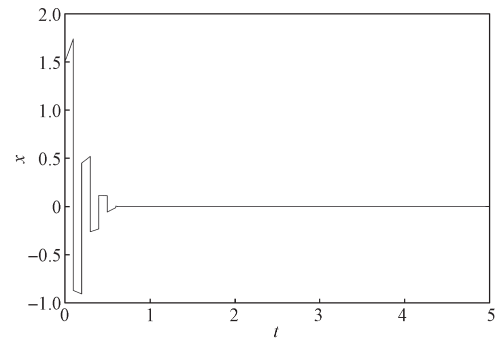

图 3　$\alpha=1$，$b=-0.5$，$x_0=1.5$，$g=x^{1/2}$ **时的仿真结果**

Fig. 3　Simulation results with $\alpha=1$，$b=-0.5$，$x_0=1.5$，$g=x^{1/2}$

例 2　考虑如下具有不确定性的脉冲系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}(t,\ \boldsymbol{x})+\boldsymbol{g}(t,\ \boldsymbol{x}),\ t\in(k,\ k+1];\tag{26}$$

$$\boldsymbol{I}_k(\boldsymbol{x})=\begin{pmatrix}-1+(1/2)^{\theta+1/[2(k+1)]} & 0\\ 0 & -1+(1/2)^{\theta+1/[2(k+1)]}\end{pmatrix}\boldsymbol{x},$$

$$\theta\in\mathbf{R},\ t=k,\ k\in\mathbf{Z}^+, \tag{27}$$

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix},\ \boldsymbol{f}(t,\ \boldsymbol{x})=\begin{pmatrix}-x_1^{1/3}-3x_1+2x_2\\ -2x_2^{-1/3}-x_2-2x_1\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{g}(t,\ \boldsymbol{x})\in\Omega_g=\left\{\boldsymbol{g}:\boldsymbol{g}=\boldsymbol{e}_g\cdot\boldsymbol{\delta}_g,\ \boldsymbol{e}_g=\begin{pmatrix}x_1 & 0\\ 0 & x_2\end{pmatrix},\right.$$

$$\left.\|\boldsymbol{\delta}_g\|\leqslant\|\boldsymbol{m}_g\|,\ \boldsymbol{m}_g=\begin{pmatrix}x_1+x_2\\ \sqrt{2x_1x_2}\end{pmatrix}\right\},$$

取 $\boldsymbol{V}(t,\ \boldsymbol{x})=\dfrac{1}{2}\left(x_1^2+x_2^2\right)$，易知 $\boldsymbol{V}\in\boldsymbol{v}_0$，且 $\boldsymbol{V}$ 在任意 $t\in\mathbf{R}^+$ 处处可微，对任意 $t\in(k,k+1]$，且 $\lambda_k=1$ 时，有

$$\frac{\partial\boldsymbol{V}}{\partial t}+\frac{\partial\boldsymbol{V}}{\partial\boldsymbol{x}}\boldsymbol{f}+\frac{\lambda_k^2}{2}\frac{\partial\boldsymbol{V}}{\partial\boldsymbol{x}}\boldsymbol{e}_g\boldsymbol{e}_g^{\mathrm{T}}\frac{\partial\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}}{\partial\boldsymbol{x}}+\frac{1}{2\lambda_k^2}\boldsymbol{m}_g^{\mathrm{T}}\boldsymbol{m}_g=$$

$$-x_1^{\frac{4}{3}}-3x_1^2-2x_2^{\frac{4}{3}}-2x_2^2+\frac{1}{2}\left(x_1^4+x_2^4\right)+$$

$$\frac{1}{2}\left[\left(x_1+x_2\right)^2+2x_1^2x_2^2\right]\leqslant-x_1^{\frac{4}{3}}-x_2^{\frac{4}{3}}\leqslant-2^{\frac{2}{3}}\left(\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x})\right)^{\frac{2}{3}}。$$

考虑以下两种情况：

1）θ=3/2，令 $\alpha=2^{2/3}$、η=2/3、d=−3ln 2。满足定理 3 中的情况 1），通过定理 3 的情况 1），得知系统（26）（27）是鲁棒有限时间稳定的，稳定时间为

$$T\left(x_0,\{t_k\}\right)\leqslant\left[\boldsymbol{V}\left(t_0^+,x_0\right)^{1-\eta}\big/\left((1-\eta)\alpha\right)\right]\mathrm{e}^{-d(1-\eta)\mathrm{e}^{-\theta N(t_0,\,t_0+T)}},$$

在仿真中令 x_0=0.2，通过计算得

$$T=\left\{0.2^{1/3}\big/\left[(1/3)\times2^{2/3}\right]\right\}\times\mathrm{e}^{\ln 2}=0.735\ 8。$$

图 4 所示仿真结果表明，该情况下系统在有限时间内达到稳定。

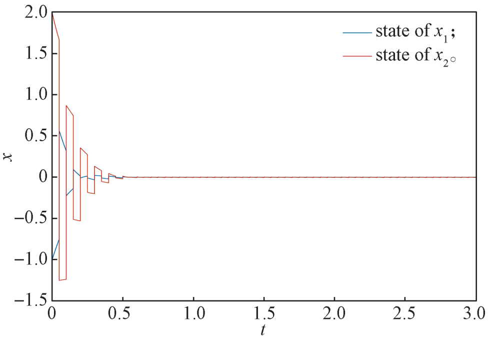

图 4　x_0=0.2，η=2/3 时的仿真结果

Fig. 4　Simulation results with x_0=0.2，η=2/3

2）θ=−1/4，令 $\alpha=2^{2/3}$、η=2/3、d=ln 2/2。满足定理 3，通过定理 3，系统（26）（27）是鲁棒有限时间稳定的，稳定时间为

$$T\left(x_0,\{t_k\}\right)\leqslant t_N-t_0=\frac{\left(1-\mathrm{e}^{-1/2\times\ln 2\times(1/3)\times3}\right)\times0.2^{1/3}}{\left(1-\mathrm{e}^{1/2\times\ln 2\times(1/3)}\right)\times(1/3)\times2^{2/3}}=3.199\ 4。$$

图 5 所示仿真结果表明，该情况下系统在有限时间内达到稳定。

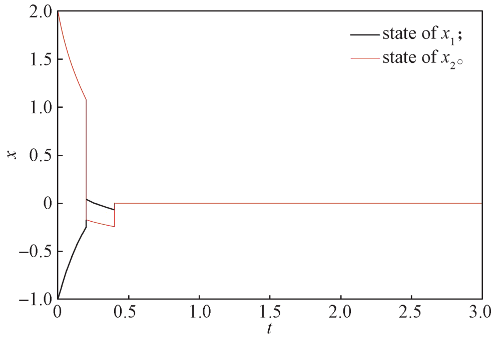

图 5　x_0=0.2，η=−1/4 时的仿真结果

Fig. 5　Simulation results with x_0=0.2，η=−1/4

5　结语

本文研究了具不确定性脉冲系统的有限时间稳定性和鲁棒有限时间稳定性。基于比较原理和 Hamilton-Jacobi/Riccati 不等式，分别得到了不确定性脉冲系统有限时间稳定性和有限时间鲁棒稳定性的判据，最后，通过两个数值例子仿真验证了判据的有效性。

参考文献：

[1] 孙继涛，张　瑜，赵寿为 . 脉冲系统的分析与控制 [M]. 北京：科学出版社，2013：4–5.
SUN Jitao，ZHANG Yu，ZHAO Shouwei. Analysis and Control of Impulse Systems[M]. Beijing：Science Press，2013：4–5.

[2] LIU B，LIU X Z，LIAO X X. Robust Stability of Uncertain Impulsive Dynamical Systems[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications，2004，290(2)：519–533.

[3] CHEN W H，ZHENG W X. Robust Stability and H_∞-Control of Uncertain Impulsive Systems with Time-Delay[J]. Automatica，2009，45(1)：109–117.

[4] AMATO F，AMBROSINO R，ARIOLA M，et al. Finite-Time Stability of Impulsive Dynamical Linear Systems Subject to Norm-Bounded Uncertainties[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control，2021，21(10)：1080–1092.

[5] CHEN G，YANG Y. New Necessary and Sufficient Conditions for Finite-Time Stability of Impulsive Switched Linear Time-Varying Systems[J]. IET Control Theory & Applications，2018，12(1)：140–148.

[6] 柳　静，牛玉俊，王国欣 . 脉冲切换系统有限时间稳定性分析与控制 [J]. 兵器装备工程学报，2022，43(1)：233–237.
LIU Jing，NIU Yujun，WANG Guoxin. Finite-Time

Stability Analysis and Control of Pulse Switching System[J]. Journal of Ordnance Equipment Engineering，2022，43(1)：233−237.

[7] 吴　迪 . 脉冲切换系统有限时间输入到状态稳定性研究 [J]. 理论数学，2023，13(4)：11.
WU Di. A Study of Finite-Time Input-to-State Stability of Pulse-Switching Systems[J]. Theoretical Math，2023，13(4)：11.

[8] LI X D，HO D W C，CAO J D. Finite-Time Stability and Settling-Time Estimation of Nonlinear Impulsive Systems[J]. Automatica，2019，99：361−368.

[9] WU J，LI X D，XIE X. Finite-Time Stability for Time-Varying Nonlinear Impulsive Systems[J/OL]. Mathematical Methods in the Applied Sciences，2021：1−16. (2021−05−12)[2024−02−26]. https://sci-hub.se/10.1002/mma.7573.

[10] XING Y，HE X Y，LI X D. Lyapunov Conditions for Finite-Time Stability of Disturbed Nonlinear Impulsive Systems[J]. Applied Mathematics and Computation，2023，440：127668.

[11] 吴　桐，张志信，蒋　威 . 具有 Caputo 导数的分数阶退化脉冲微分系统的有限时间稳定性 [J]. 应用数学，2020，33(1)：202−208.
WU Tong，ZHANG Zhixin，JIANG Wei. Finite-Time Stability of Fractional-Order Singular Impulsive Systems with Caputo Derivative[J]. Mathematica Applicata，2020，33(1)：202−208.

[12] 吴　迪，胡洪晓 . 非线性脉冲系统有限时间输入到状态稳定性研究 [J]. 应用数学进展，2023，12(2)：12.
WU Di，HU Hongxiao. A Finite-Time Input-to-State Stability Study of Nonlinear Impulsive Systems[J]. Advances in Applied Mathematics，2023，12(2)：12.

[13] 仝云旭，李桂花，刘婷婷，等 . 离散时间不确定脉冲系统的有限时间稳定性与滤波 [J]. 应用数学，2018，31(2)：429−435.
TONG Yunxu，LI Guihua，LIU Tingting，et al. Finite-Time Stability and Filtering for Discrete-Time Uncertain Impulsive Systems[J]. Mathematica Applicata，2018，31(2)：429−435.

[14] HU H，GAO B，XU L. Finite-Time and Fixed-Time Attractiveness for Nonlinear Impulsive Systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control，2022，67(10)：5586−5593.

[15] LIU B. Stability of Solutions for Stochastic Impulsive Systems via Comparison Approach[J]. IEEE Transactions on Automatic Control，2008，53(9)：2128−2133.

[16] LIU B，XIE Z T，LI P，et al. Finite-Time Stability via GKL-Functions for Impulsive Dynamical Systems[J]. Nonlinear Analysis：Hybrid Systems，2024，52：101470.

[17] GAO Q，ZHOU X Q，LIU B，et al. Global Finite-Time Stability for Stochastic Impulsive Systems via Comparison Approach[C]//2021 40th Chinese Control Conference (CCC). S.l.：IEEE，2021：1419−1424.

[18] XIAO P，LIU B，TANG Q，et al. GKL-Finite-Time Stability via Comparison Principles for Stochastic Impulsive Systems[J]. Asian Journal of Control，2024，26(1)：126−136.

[19] 李羽辰，姚凤麒 . 一类时滞脉冲随机系统的有限时间稳定性 [J]. 洛阳理工学院学报 (自然科学版)，2021，31(3)：89−93.
LI Yuchen，YAO Fengqi. Finite-Time Stability Analysis for a Class of Impulsive Stochastic Delay Systems[J]. Journal of Luoyang Institute of Science and Technology (Natural Science Edition)，2021，31(3)：89−93.

[20] LAKSHMIKANTHAM V，LIU X. Impulsive Hybrid Systems and Stability Theory[J]. Dynamic Systems & Applications，1998，7(1)：1−9.

[21] GASMI N，BOUTAYEB M，THABET A，et al. Enhanced LMI Conditions for Observer-Based H_∞ Stabilization of Lipschitz Discrete-Time Systems[J]. European Journal of Control，2018，44：80−89.

（责任编辑：廖友媛）