第 39 卷第 4 期　　湖　南　工　业　大　学　学　报　　Vol.39 No.4
2025 年 7 月　　Journal of Hunan University of Technology　　July 2025

doi:10.3969/j.issn.1673-9833.2025.04.011

一类具有饱和发生率的随机 SVIR 传染病模型的平稳分布与灭绝性

王　津，罗超良，侯爱玉

（湖南工业大学 理学院，湖南 株洲 412007）

摘　要：研究了一类具饱和发生率的随机 SVIR 传染病模型的平稳分布与灭绝性。首先，对任意的正初始值，证明该系统存在唯一的全局正解；其次，通过构造 Lyapunov 函数，得到当 $\widetilde{R_0^s}>1$ 时系统存在唯一遍历的平稳分布；最后，证明当 $\widehat{R_0^s}<1$ 时疾病将以指数灭绝。

关键词：随机 SVIR 模型；饱和发生率；治疗函数；平稳分布；灭绝性

中图分类号：O175　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673-9833(2025)04-0082-07

引文格式：王　津，罗超良，侯爱玉. 一类具有饱和发生率的随机 SVIR 传染病模型的平稳分布与灭绝性[J]. 湖南工业大学学报，2025，39(4)：82-88.

Stationary Distribution and Extinction of a Stochastic SVIR Epidemic Model with Saturation Incidence

WANG Jin，LUO Chaoliang，HOU Aiyu

（College of Science，Hunan University of Technology，Zhuzhou Hunan 412007，China）

Abstract：The focus of the current investigation is on the stationary distribution and extinction of a class of stochastic SVIR epidemic model with saturation incidence . Firstly, for any positive initial value, it is proven there is a unique global positive solution for the system; secondly, by constructing a Lyapunov function, there always exists a stationary distribution with a unique traversal with $\widetilde{R_0^s}>1$. Finally, it is proven that the disease will become exponentially extinct with $\widehat{R_0^s}<1$.

Keywords：stochastic SVIR epidemic model；saturation incidence；treatment function；stationary distribution；extinction

1　背景知识

近年来，传染病给人类健康和社会发展带来了重大影响，故对传染病的动力学行为进行研究十分必要。目前，已有很多学者通过建立数学模型对传染病的传播进行预测和控制分析。1926 年，W. O. Kermack 等 [1] 研究了黑死病和瘟疫的传播规律时，建立了著名的 SIR 传染病模型。在此基础上，文献 [2] 通过引入治疗函数建立 SVIR 传染病模型。V. Capasso 等 [3] 在研究意大利爆发的霍乱传播规律时，

收稿日期：2024-04-19

基金项目：国家自然科学基金资助项目（11801162）；湖南省教育厅科学研究基金资助重点项目（21A0361）

作者简介：王　津，女，湖南工业大学硕士生，主要研究方向为随机微分方程定性理论，E-mail：517485282@qq.com

通信作者：罗超良，男，湖南工业大学副教授，博士，主要研究方向为随机微分方程定性理论及相关问题，E-mail：lcl197511@163.com

考虑到该疾病的有效接触率最终将趋向于饱和的状态，提出了一类具有饱和发生率的传染病模型，分析得到了与实际情况一致的研究结果。文献 [4] 研究了一类具有治疗函数和饱和发生率的 SVIR 传染病模型，对疾病防控具有一定的现实意义。

然而，环境因素对疾病的传播过程会带来不可忽视的影响。因此，在确定性模型中加入随机扰动，能更准确地刻画传染病的动力学行为，如文献 [5−14] 都得到了比较理想的结论。为进一步探究环境因素对 SVIR 传染病模型的影响，本文在文献 [4] 模型的基础上加入随机扰动项，研究如下一类具有饱和发生率和治疗函数的随机 SVIR 传染病模型：

$$\begin{cases} \mathrm{d}S(t)=\left(\Lambda-\dfrac{\beta SI}{1+\alpha I}-\vartheta S-\phi S+\varepsilon V\right)\mathrm{d}t+ \\ \qquad \sigma_1 S\mathrm{d}B_1(t); \\ \mathrm{d}V(t)=\left(\phi S-\varepsilon V-\vartheta V\right)\mathrm{d}t+\sigma_2 V\mathrm{d}B_2(t); \\ \mathrm{d}I(t)=\left(\dfrac{\beta SI}{1+\alpha I}-T(I)-\left(\vartheta+\rho+\delta\right)I\right)\mathrm{d}t+ \\ \qquad \sigma_3 I\mathrm{d}B_3(t); \\ \mathrm{d}R(t)=\left(\rho I+T(I)-\vartheta R\right)\mathrm{d}t+\sigma_4 R\mathrm{d}B_4(t)。 \end{cases} \tag{1}$$

式中：$S(t)$、$V(t)$、$I(t)$、$R(t)$（简写为 S、V、I、R）分别为 t 时刻的易感者、接种者、染病者和恢复者的数量；Λ 为易感者的输入量；β 为疾病的传染率；ϑ 为自然死亡率；ϕ 为疫苗接种率；ε 为免疫失效比例；α 为饱和系数；$\dfrac{\beta SI}{1+\alpha I}$ 为饱和发生率；ρ 为自然恢复率；δ 为因病死亡率；$B_i(t)(i=1, 2, 3, 4)$ 为相互独立的标准布朗运动，它们都是定义在完备概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, \{\mathscr{F}\}_{t\geqslant 0}, P)$ 上，其中 σ− 代数族 $\{\mathscr{F}\}_{t\geqslant 0}$ 满足非降且右连续；$\sigma_i(i=1, 2, 3, 4)$ 为白噪声的强度；$T(I)$ 为治疗函数，其表达式为

$$T(I)=\begin{cases}\kappa I, & 0\leqslant I\leqslant I_0; \\ \kappa I_0, & I>I_0。\end{cases}$$

其中：κ 为治疗参数；I_0 为治疗达到饱和时的染病者数量，且上述所有的参数均为正值。

由于系统（1）中前 3 个方程与变量 $R(t)$ 无关，且 $S(t)+V(t)+I(t)+R(t)=N(t)$，$N(t)$ 为总人口数量，故只需考虑由前 3 个方程所构成的简化系统：

$$\begin{cases} \mathrm{d}S(t)=\left(\Lambda-\dfrac{\beta SI}{1+\alpha I}-\vartheta S-\phi S+\varepsilon V\right)\mathrm{d}t+ \\ \qquad \sigma_1 S\mathrm{d}B_1(t); \\ \mathrm{d}V(t)=\left(\phi S-\varepsilon V-\vartheta V\right)\mathrm{d}t+\sigma_2 V\mathrm{d}B_2(t); \\ \mathrm{d}I(t)=\left(\dfrac{\beta SI}{1+\alpha I}-T(I)-\left(\vartheta+\rho+\delta\right)I\right)\mathrm{d}t+ \\ \qquad \sigma_3 I\mathrm{d}B_3(t)。 \end{cases} \tag{2}$$

2　系统全局正解的存在唯一性

为探究该系统的随机动力学行为，应证明系统全局正解的存在唯一性。当系数满足线性增长条件和局部 Lipschitz 条件时，系统将存在唯一的全局解 [15]。然而，系统（2）的系数却没有满足线性增长条件，只满足局部的 Lipschitz 条件。于是，参考文献 [16] 给出如下定理。

定理 1　对任意的初始值 $\left(S(0),V(0),I(0)\right)\in\mathbb{R}_+^3$，系统（2）存在唯一的正解，且该解依概率 1 位于 $\mathbb{R}_+^3$ 内，即当 $t\geqslant 0$ 时，$\left(S(t),V(t),I(t)\right)\in\mathbb{R}_+^3$ a.s.。

证明　因为系统（2）满足局部 Lipschitz 条件。于是，对于任意的正初始值 $\left(S(0),V(0),I(0)\right)\in\mathbb{R}_+^3$，系统（2）在有限时间区间 $[0, \tau_e)$ 上存在唯一的局部正解 $\left(S(t),V(t),I(t)\right)\in\mathbb{R}_+^3$，其中 τ_e 为爆破时间。因此，要说明该系统正解的全局存在性，只需证明 $\tau_e=\infty$ a.s.。

令 $k_0>0$ 足够大，使得 $S(0)$、$V(0)$、$I(0)$ 都在 $[1/k_0, k_0]$ 内。对任意正数 $k\geqslant k_0$，引入停时

$$\tau_k=\inf\left\{t\in\left[0,\tau_e\right):\min\left\{S(t),V(t),I(t)\right\}\leqslant\frac{1}{k} \text{ 或}\max\left\{S(t),V(t),I(t)\right\}\geqslant k\right\}。 \tag{3}$$

记 $\inf(\varnothing)=\infty$。易见，随着 k 的增大，τ_k 单调递增。设 $\tau_\infty=\lim\limits_{k\to\infty}\tau_k$，则有 $\tau_\infty\leqslant\tau_e$ a.s.。如果能证明 $\tau_\infty=\infty$a.s.，则 $\tau_e=\infty$a.s.，且对 $\forall\, t\geqslant 0$ 时，$\left(S(t),V(t),I(t)\right)\in\mathbb{R}_+^3$ a.s.。也就是只需要证明 $\tau_\infty=\infty$a.s.。若 $\tau_\infty=\infty$a.s. 不成立，那么存在常数 $\tilde{T}>0$ 和 $\varepsilon_0\in(0,1)$ 使得 $P\left\{\tau_\infty\leqslant\tilde{T}\right\}\geqslant\varepsilon_0$ 成立，因此，对 $\forall\, k\geqslant k_1$，存在整数 $k_1\geqslant k_0$ 使得 $P\left\{\tau_\infty\leqslant\tilde{T}\right\}\geqslant\varepsilon_0$ 成立。

构造 C^2 函数 $V_1:\mathbb{R}_+^3\to\mathbb{R}_+$ 如下：

$$V_1(S,V,I)=\left(S-1-\ln S\right)+\left(V-1-\ln V\right)+\left(I-1-\ln I\right)。$$

对函数 V_1 运用 Itô 公式可得：

$$\mathrm{d}V_1\left(S,V,I\right)=LV_1\left(S,V,I\right)\mathrm{d}t+\left(S-1\right)\sigma_1\mathrm{d}B_1(t)+\left(V-1\right)\sigma_2\mathrm{d}B_2(t)+\left(I-1\right)\sigma_3\mathrm{d}B_3(t)。 \tag{4}$$

式中：

$$LV_1(S,V,I)=\left(1-\frac{1}{S}\right)\left(\Lambda-\frac{\beta SI}{1+\alpha I}-\vartheta S-\phi S+\varepsilon V\right)+\left(1-\frac{1}{V}\right)\left(\phi S-\varepsilon V-\vartheta V\right)+\left(1-\frac{1}{I}\right)\left(\frac{\beta SI}{1+\alpha I}-T(I)-\left(\vartheta+\rho+\delta\right)I\right)+\frac{1}{2}\left(\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2\right)。$$

考虑到 $\dfrac{T(I)}{I}\leqslant\kappa$，上式可化为

$$LV_1(S,V,I) \leqslant \varLambda - \vartheta S - \frac{\varLambda}{S} + \frac{\beta I}{1+\alpha I} - \vartheta V - T(I) - (\vartheta+\rho+\delta)I + (2\vartheta+\phi+\varepsilon+\theta) + \frac{1}{2}(\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2) \leqslant \max_{S\in\mathbb{R}_+}\left\{\varLambda\left(1-\frac{1}{S}\right)\right\} + \frac{\beta}{\alpha} + (2\vartheta+\phi+\varepsilon+\theta) + \frac{1}{2}(\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2) := G, \quad (5)$$

式中 $\theta=\kappa+\vartheta+\rho+\delta$。

结合式（4）和（5）可得：

$$\mathrm{d}V_1(S,V,I) \leqslant G\mathrm{d}t + (S-1)\sigma_1\mathrm{d}B_1(t) + (V-1)\sigma_2\mathrm{d}B_2(t) + (I-1)\sigma_3\mathrm{d}B_3(t)。 \quad (6)$$

对上式两边同时从 0 到$\tau_k\wedge\tilde{T}=\min\{\tau_k,\tilde{T}\}$积分，再取期望得：

$$E\left[V_1\left(S(\tau_k\wedge\tilde{T}),V(\tau_k\wedge\tilde{T}),I(\tau_k\wedge\tilde{T})\right)\right] \leqslant V_1(S(0),V(0),I(0)) + E\left[\int_0^{\tau_k\wedge\tilde{T}} G\mathrm{d}t\right] \leqslant V_1(S(0),V(0),I(0)) + G\tilde{T}。 \quad (7)$$

令 $\varOmega_k=\{\tau_k\leqslant\tilde{T}\}$，$\varOmega_k\geqslant k_1$，根据式（3）停时的定义可知 $P(\varOmega_k)\geqslant\varepsilon_0$。实际上，对$\forall\ \omega\in\varOmega_k$，$S(\tau_k,\omega)$，$V(\tau_k,\omega)$ 和 $I(\tau_k,\omega)$ 中，至少有一个等于 k 或者 $1/k$。因此有

$$V_1\left(S(\tau_k,\omega),V(\tau_k,\omega),I(\tau_k,\omega)\right) \geqslant \min\left\{k-1-\ln k,\ \frac{1}{k}-1+\ln k\right\}。 \quad (8)$$

结合式（7）和（8）可得，

$$V_1(S(0),V(0),I(0)) + G\tilde{T} \geqslant E\left[1_{\varOmega_k(\omega)}V_1\left(S(\tau_k,\tilde{T}),V(\tau_k,\tilde{T}),I(\tau_k,\tilde{T})\right)\right] = E\left[1_{\varOmega_k(\omega)}V_1\left(S(\tau_K,\omega),V(\tau_K,\omega),I(\tau_K,\omega)\right)\right] \geqslant \varepsilon_0\min\left\{k-1-\ln k,\frac{1}{k}-1+\ln k\right\},$$

式中$1_{\varOmega_k(\omega)}$为 $\varOmega_k$ 的示性函数。

于是，当 $k\to\infty$ 时，有 $\infty>V_1(S(0),V(0),I(0))+G\tilde{T}=\infty$，产生矛盾。从而有 $\tau_\infty=\infty$ a.s.。证毕。

注 1 定理 1 说明系统的正解依概率 1 不会在有限时间内发生爆破。

3 平稳分布的存在性

本节通过构造 Lyapunov 函数，证明系统（2）存在唯一遍历的平稳分布。首先引入引理 1。

设 $X(t)$ 为 d 维欧氏空间 E^d 上的齐 Markov 过程，且满足如下随机微分方程

$$\mathrm{d}X(t) = b(X) + \sum_{r=1}^{k} h_r(X)\mathrm{d}B_r(t),$$

其对应的扩散矩阵为

$$\boldsymbol{A}(X) = (a_{ij}(x)),\ a_{ij}(x) = \sum_{r=1}^{k} h_r^i h_r^j。$$

引理 1[17] 如果有界域 $D\subset E^d$ 存在一个有规则边界 $\varGamma$，且满足以下条件：

i）对任意的 $x\in D,\ \xi\in E^d$, 存在一个正数 M_0，使得$\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqslant M_0|\boldsymbol{\xi}|^2$；

ii）对任意的 $x\in E^d\setminus D$，存在一个非负的 C^2 函数 V，使得 LV 为负，则 Markov 过程 $X(t)$ 将存在唯一遍历的平稳分布 $\pi(\cdot)$。

接下来分析系统（2）平稳分布的存在唯一性。

令 $p_1=\vartheta+\phi+\dfrac{\sigma_1^2}{2},\ p_2=\varepsilon+\vartheta+\dfrac{\sigma_2^2}{2}$ 。

定理 2 如果 $R_0^s=\dfrac{\beta\varepsilon\vartheta^2\phi^2\varLambda^9(\kappa+\vartheta+\rho+\delta)}{108p_1^4p_2^2\alpha}>1$，则当 $0\leqslant I\leqslant I_0$ 时，系统（2）存在唯一遍历的平稳分布。

证明 首先验证引理 1 的条件 i）。系统（2）对应的扩散矩阵为

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2S^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2V^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3^2I^2 \end{bmatrix}。 \quad (9)$$

设 $M_0=\min\limits_{(S,V,I)\in\mathbb{R}_+^3}\{\sigma_1^2S^2,\ \sigma_2^2V^2,\ \sigma_3^2I^2\}>0$，则有

$\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}\zeta_i\zeta_j = \sigma_1^2S^2\zeta_1^2+\sigma_2^2V^2\zeta_2^2+\sigma_3^2S^2\zeta_3^2 \geqslant M_0|\boldsymbol{\zeta}|^2$，其中$\boldsymbol{\zeta}=(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3)\in\mathbb{R}_+^3$，表明引理 1 的条件 i）满足。

构造 Lyapunov 函数

$$V_2(S,V,I) = -\frac{\varLambda\ln S}{p_1} - \frac{\varLambda\ln V}{p_2} - \ln I + S + V + I。$$

利用 Itô 公式可得

$$L\left(-\frac{\varLambda\ln S}{p_1}\right) = -\frac{\varLambda^2}{p_1S} + \frac{\varLambda\beta I}{p_1(1+\alpha I)} - \frac{\varepsilon\varLambda V}{p_1S} + \varLambda,$$

其中，$L\left(-\dfrac{\varLambda\ln V}{p_2}\right) = -\dfrac{\varLambda\phi S}{p_2V} + \varLambda$;

$$L(-\ln I) = -\frac{\beta S}{1+\alpha I} + \frac{T(I)}{I} + \vartheta + \rho + \delta + \frac{\sigma_3^2}{2};$$

$$L(S+V+I) = \varLambda - \vartheta(S+V+I) - (\rho+\delta)I - T(I)。$$

于是，可得

$$LV_2(S,V,I) = \left(-\frac{\varLambda^2}{p_1S} + \frac{\varLambda\beta I}{p_1(1+\alpha I)} - \frac{\varLambda\varepsilon V}{p_1S} + \varLambda\right) + \left(-\frac{\varLambda\phi S}{p_2V} + \varLambda\right) + \left(-\frac{\beta S}{1+\alpha I} + \frac{T(I)}{I} + \vartheta + \rho + \delta + \frac{\sigma_3^2}{2}\right) +$$

$$\left[\Lambda-\vartheta(S+V+I)-(\rho+\delta)I-T(I)\right]=\left(-\frac{\Lambda^2}{p_1S}-\frac{\Lambda\varepsilon V}{p_1S}-\frac{\Lambda\phi S}{p_2V}-\vartheta S-\vartheta V-(\vartheta+\rho+\delta)I-T(I)-\frac{\beta S}{1+\alpha I}\right)+\frac{\Lambda\beta I}{p_1(1+\alpha I)}+3\Lambda+\vartheta+\rho+\delta+\frac{\sigma_3^2}{2}+\frac{T(I)}{I}。\tag{10}$$

当 $0\leqslant I\leqslant I_0$ 时，$T(I)=\kappa I$，则有

$$LV_2(S,V,I)=\left(-\frac{\Lambda^2}{p_1S}-\frac{\Lambda\varepsilon V}{p_1S}-\frac{\Lambda\phi S}{p_2V}-\vartheta S-\vartheta V-\left(\kappa+\vartheta+\rho+\delta\right)I-\frac{\beta S}{1+\alpha I}\right)+\frac{\Lambda\beta I}{p_1(1+\alpha I)}+3\Lambda+\vartheta+\rho+\delta+\kappa+\frac{\sigma_3^2}{2}=$$
$$\left(-\frac{\Lambda^2}{3p_1S}-\frac{\Lambda^2}{3p_1S}-\frac{\Lambda^2}{3p_1S}-\frac{\Lambda\varepsilon V}{p_1S}-\frac{\Lambda\phi S}{2p_2V}-\frac{\Lambda\phi S}{2p_2V}-\vartheta S-\vartheta V-\frac{\beta S}{1+\alpha I}-\frac{\kappa+\vartheta+\rho+\delta}{\alpha}(1+\alpha I)\right)+\frac{\kappa+\vartheta+\rho+\delta}{\alpha}+3\Lambda+\frac{\Lambda\beta I}{p_1(1+\alpha I)}+\vartheta+\rho+\delta+\kappa+\frac{\sigma_3^2}{2}\leqslant$$
$$-10\left(\left(R_0^s\right)^{\frac{1}{10}}-1\right)+\frac{\Lambda\beta I}{p_1(1+\alpha I)}+B,\tag{11}$$

式中，

$$B=\frac{\kappa+\vartheta+\rho+\delta}{\alpha}+3\Lambda+\vartheta+\rho+\delta+\kappa+\frac{\sigma_3^2}{2}+10。$$

记$\lambda=10\left(\left(R_0^s\right)^{\frac{1}{10}}-1\right)>0$，则存在常数 $M>0$ 满足

$$-M\lambda+\Lambda+2\vartheta+\phi+\kappa+\rho+\delta+\frac{\sigma_1^2+\sigma_3^2}{2}\leqslant-2。\tag{12}$$

设 $\widetilde{V}(S,V,I)=MV_2-\ln S-\ln I+S+I+V$，显然 $\widetilde{V}(S,V,I)$ 是连续函数，其在 $\mathbb{R}_+^3$ 内存在最小值 $\widetilde{V}\left(S(0),V(0),I(0)\right)$。

构造非负 C^2函数

$$W(S,V,I)=\widetilde{V}(S,V,I)-\widetilde{V}\left(S(0),V(0),I(0)\right),$$

则有：

$$LW(S,V,I)\leqslant M\left\{-10\left(\left(R_0^s\right)^{\frac{1}{10}}-1\right)+\frac{\Lambda\beta I}{p_1(1+\alpha I)}+B\right\}-\frac{\Lambda}{S}-\frac{\varepsilon V}{S}-\frac{\beta S}{1+\alpha I}-(S+V+I)\vartheta-(\kappa+\rho+\delta)I+\frac{\beta I}{1+\alpha I}+\Lambda+2\vartheta+\phi+\kappa+\rho+\delta+\frac{\sigma_1^2+\sigma_3^2}{2}\leqslant$$
$$-M\lambda+\frac{\beta I}{1+\alpha I}\left(\frac{M\Lambda}{p_1}+1\right)+BM-\frac{\Lambda}{S}-\frac{\varepsilon V}{S}-\left(S+V+I\right)\vartheta-\left(\kappa+\rho+\delta\right)I+\Lambda+2\vartheta+\phi+\kappa+\rho+\delta+\frac{\sigma_1^2+\sigma_3^2}{2}。\tag{13}$$

构造紧子集

$$D=\left\{\left(S(t),V(t),I(t)\right)\in\mathbb{R}_+^3\middle|\varepsilon_1\leqslant S\leqslant\frac{1}{\varepsilon_1},\varepsilon_1{}^2\leqslant V\leqslant\frac{1}{\varepsilon_1{}^2},\varepsilon_1\leqslant I\leqslant\frac{1}{\varepsilon_1}\right\},$$

其中ε_1为充分小的正常数。

现引入如下记号：

$$G_1=\sup_{(S,V,I)\in\mathbb{R}_+^3}\left\{-M\lambda-\frac{\varepsilon V}{S}-(S+V+I)\vartheta-(\kappa+\rho+\delta)I+\Lambda+2\vartheta+\phi+\kappa+\rho+\delta+\frac{\sigma_1^2+\sigma_3^2}{2}\right\};$$

$$G_2=\sup_{(S,V,I)\in\mathbb{R}_+^3}\left\{-M\lambda-\frac{\Lambda}{S}-(S+V+I)\vartheta-(\kappa+\rho+\delta)I+\Lambda+2\vartheta+\phi+\kappa+\rho+\delta+\frac{\sigma_1^2+\sigma_3^2}{2}\right\};$$

$$G_3=\sup_{(S,V,I)\in\mathbb{R}_+^3}\left\{-M\lambda-\frac{\Lambda}{S}-\frac{\varepsilon V}{S}-(V+I)\vartheta-(\kappa+\rho+\delta)I+\Lambda+2\vartheta+\phi+\kappa+\rho+\delta+\frac{\sigma_1^2+\sigma_3^2}{2}\right\};$$

$$G_4=\sup_{(S,V,I)\in\mathbb{R}_+^3}\left\{-M\lambda-\frac{\Lambda}{S}-\frac{\varepsilon V}{S}-(S+V)\vartheta-(\kappa+\rho+\delta)I+\Lambda+2\vartheta+\phi+\kappa+\rho+\delta+\frac{\sigma_1^2+\sigma_3^2}{2}\right\};$$

$$G_5=\sup_{(S,V,I)\in\mathbb{R}_+^3}\left\{-M\lambda-\frac{\Lambda}{S}-\frac{\varepsilon V}{S}-(S+I)\vartheta-(\kappa+\rho+\delta)I+\Lambda+2\vartheta+\phi+\kappa+\rho+\delta+\frac{\sigma_1^2+\sigma_3^2}{2}\right\}。$$

选择合适的ε_1，使得下列条件在集合中均成立：

$$K_1-\frac{\Lambda}{\varepsilon_1}\leqslant-1,\tag{14}$$

$$\frac{\beta I}{1+\alpha I}\left(\frac{M\Lambda}{p_1}+1\right)+MB\leqslant1,\tag{15}$$

$$K_2-\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1}\leqslant-1,\tag{16}$$

$$K_3-\frac{\vartheta}{\varepsilon_1}\leqslant-1,\tag{17}$$

$$K_4-\frac{\vartheta}{\varepsilon_1}\leqslant-1,\tag{18}$$

$$K_5-\frac{\vartheta}{\varepsilon_1^2}\leqslant-1。\tag{19}$$

式（14）~（19）中：K_i（i=1, 2, 3, 4, 5）为正常数，其中，

$$K_1=\sup_{(S,V,I)\in\mathbb{R}_+^3}\left\{\left(\frac{\beta I}{1+\alpha I}\left(\frac{M\Lambda}{p_1}+1\right)+MB\right)+G_1\right\},$$

$$K_2=\sup_{(S,V,I)\in\mathbb{R}_+^3}\left\{\left(\frac{\beta I}{1+\alpha I}\left(\frac{M\Lambda}{p_1}+1\right)+MB\right)+G_2\right\},$$

$$K_3=\sup_{(S,V,I)\in\mathbb{R}_+^3}\left\{\left(\frac{\beta I}{1+\alpha I}\left(\frac{M\Lambda}{p_1}+1\right)+MB\right)+G_3\right\},$$

$$K_4=\sup_{(S,V,I)\in\mathbb{R}_+^3}\left\{\left(\frac{\beta I}{1+\alpha I}\left(\frac{M\Lambda}{p_1}+1\right)+MB\right)+G_4\right\},$$

$$K_5=\sup_{(S,V,I)\in\mathbb{R}_+^3}\left\{\left(\frac{\beta I}{1+\alpha I}\left(\frac{M\Lambda}{p_1}+1\right)+MB\right)+G_5\right\}。$$

为了方便起见，将$\mathbb{R}_+^3\setminus D$分为如下 6 个区域。

$$D_1=\left\{(S,V,I)\in\mathbb{R}_+^3,0<S<\varepsilon_1\right\},$$

$$D_2=\left\{(S,V,I)\in\mathbb{R}_+^3,0<I<\varepsilon_1\right\},$$

$$D_3=\left\{(S,V,I)\in\mathbb{R}_+^3,S>\varepsilon_1,I>\varepsilon_1,0<V<\varepsilon_1^2\right\},$$

$$D_4=\left\{(S,V,I)\in\mathbb{R}_+^3,S>\frac{1}{\varepsilon_1}\right\},$$

$$D_5=\left\{(S,V,I)\in\mathbb{R}_+^3,I>\frac{1}{\varepsilon_1}\right\},$$

$$D_6=\left\{(S,V,I)\in\mathbb{R}_+^3,V>\frac{1}{\varepsilon_1^2}\right\}。$$

情形 1 若 $(S,V,I)\in D_1$，则由式（13）和式（14）可得

$$LW(S,V,I)\leqslant\left(\frac{\beta I}{1+\alpha I}\left(\frac{M\Lambda}{p_1}+1\right)+MB+G_1\right)-\frac{\Lambda}{S}\leqslant K_1-\frac{\Lambda}{\varepsilon_1}\leqslant-1。$$

情形 2 若 $(S,V,I)\in D_2$，则由式（12）、（13）和（15）可得

$$LW(S,V,I)\leqslant\left(-M\lambda+\Lambda+2\vartheta+\phi+\kappa+\rho+\delta+\frac{\sigma_1^2+\sigma_3^2}{2}\right)+\left(\frac{\beta I}{1+\alpha I}\left(\frac{M\Lambda}{p_1}+1\right)+MB\right)\leqslant-2+1=-1。$$

情形 3 若 $(S,V,I)\in D_3$，则由式（13）和式（16）可得

$$LW(S,V,I)\leqslant\left(\frac{\beta I}{1+\alpha I}\left(\frac{M\Lambda}{p_1}+1\right)+MB+G_2\right)-\frac{\varepsilon V}{S}\leqslant K_2-\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1}\leqslant-1。$$

情形 4 若 $(S,V,I)\in D_4$，则由式（13）和式（17）可得

$$LW(S,V,I)\leqslant\left(\frac{\beta I}{1+\alpha I}\left(\frac{M\Lambda}{p_1}+1\right)+MB+G_3\right)-\frac{\varepsilon V}{S}\leqslant K_3-\frac{\vartheta}{\varepsilon_1}\leqslant-1。$$

情形 5 若 $(S,V,I)\in D_5$，则由式（13）和式（18）可得

$$LW(S,V,I)\leqslant\left(\frac{\beta I}{1+\alpha I}\left(\frac{M\Lambda}{p_1}+1\right)+MB+G_4\right)-\frac{\varepsilon V}{S}\leqslant K_4-\frac{\vartheta}{\varepsilon_1}\leqslant-1。$$

情形 6 若 $(S,V,I)\in D_6$，则由式（13）和式（19）可得

$$LW(S,V,I)\leqslant\left(\frac{\beta I}{1+\alpha I}\left(\frac{M\Lambda}{p_1}+1\right)+MB+G_5\right)-\vartheta(S+V+I)\leqslant K_5-\frac{\vartheta}{\varepsilon_1^2}\leqslant-1。$$

由情形 1~6 的分析可知，当$(S,V,I)\in\mathbb{R}_+^3\setminus D$时，均有 $LW\leqslant-1$ 成立，可见引理 1 的条件 ii) 得到满足，因此系统（2）存在遍历平稳分布。证毕。

注 2 定理 2 说明，当感染者数量没有达到治疗饱和状态时，若$R_0^s>1$，系统存在唯一遍历的平稳分布。

定理 3 如果 $\widetilde{R_0^s}=\dfrac{\beta\varepsilon\vartheta^2\phi^2\Lambda^9(\vartheta+\rho+\delta)}{108p_1^4p_2^2\alpha}>1$，则系统（2）存在唯一遍历的平稳分布。

证明 由于此定理的证明与定理 2 类似，这里只给出部分不同之处。由式（10）可知，当 $I>I_0$ 时，

$$\begin{aligned}&LV_2(S,V,I)\leqslant\\&\left(-\frac{\Lambda^2}{p_1S}-\frac{\Lambda\varepsilon V}{p_1S}-\frac{\Lambda\phi S}{p_2V}-\vartheta S-\vartheta V-(\vartheta+\rho+\delta)I-\frac{\beta S}{1+\alpha I}\right)+\\&\frac{\Lambda\beta I}{p_1(1+\alpha I)}-\kappa I_0+3\Lambda+\vartheta+\rho+\delta+\kappa+\frac{\sigma_3^2}{2}=\\&\left(-\frac{\Lambda^2}{3p_1S}-\frac{\Lambda^2}{3p_1S}-\frac{\Lambda^2}{3p_1S}-\frac{\Lambda\varepsilon V}{p_1S}-\frac{\Lambda\phi S}{2p_2V}-\frac{\Lambda\phi S}{2p_2V}-\right.\\&\left.\vartheta S-\vartheta V-\frac{\beta S}{1+\alpha I}-\frac{\vartheta+\rho+\delta}{\alpha}(1+\alpha I)\right)+\frac{\Lambda\beta I}{p_1(1+\alpha I)}+\\&\frac{\vartheta+\rho+\delta}{\alpha}+3\Lambda+\vartheta+\rho+\delta+\kappa+\frac{\sigma_3^2}{2}\leqslant\\&-10\left(\left(\widetilde{R_0^s}\right)^{\frac{1}{10}}-1\right)+\frac{\Lambda\beta I}{p_1(1+\alpha I)}+\widetilde{B}。\end{aligned}$$

式中，$\widetilde{B}=\dfrac{\vartheta+\rho+\delta}{\alpha}+3\Lambda+\vartheta+\rho+\delta+\kappa+\dfrac{\sigma_3^2}{2}+10$。

因此，当 $I>I_0$ 时，如果$\widetilde{R_0^s}>1$，可以利用与定理 2 相同的方法证明系统（2）存在唯一遍历的平稳分布。同时，不难发现$R_0^s>\widetilde{R_0^s}$成立，所以当$\widetilde{R_0^s}>1$时，不论 I、I_0 的大小关系如何，系统（2）总存在唯一遍历的平稳分布。证毕。

注 3　定理 3 说明，若 $\widetilde{R_0^s}>1$，无论感染者数量有没有达到治疗饱和状态，系统总存在唯一遍历的平稳分布。

4　疾病的灭绝性

本节将给出系统（2）疾病灭绝的一个充分条件，首先引入如下引理。

引理 2[15]　系统（2）的解 $(S(t), V(t), I(t))$ 具有以下性质：

i）$\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{S(t)}{t}=0,\ \lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{V(t)}{t}=0,\ \lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{I(t)}{t}=0$ a.s.。

若 $\max\left\{\sigma_1^2,\sigma_2^2,\sigma_3^2\right\}<2\vartheta$，则有

ii）$\limsup\limits_{t\to\infty}\dfrac{1}{t}\int_0^t S(r)\mathrm{d}B_1(r)=0$，

$\limsup\limits_{t\to\infty}\dfrac{1}{t}\int_0^t V(r)\mathrm{d}B_2(r)=0,\ \limsup\limits_{t\to\infty}\dfrac{1}{t}\int_0^t I(r)\mathrm{d}B_3(r)=0$ a.s.。

接下来分析系统（2）疾病的灭绝性。

定理 4　如果 $\widehat{R_0^s}=\dfrac{\beta\Lambda}{\vartheta\left(\vartheta+\rho+\delta+\dfrac{\sigma_3^2}{2}\right)}<1$，则疾病将以指数灭绝。

证明　将系统（2）的前两个方程相加，同时积分再除以 t 可得

$$\frac{S(t)-S(0)}{t}+\frac{V(t)-V(0)}{t}\leqslant\Lambda-\frac{\vartheta}{t}\int_0^t S(r)\mathrm{d}r+\frac{\sigma_1}{t}\int_0^t S(r)\mathrm{d}B_1(r)+\frac{\sigma_2}{t}\int_0^t V(r)\mathrm{d}B_2(r)。\quad(20)$$

对式（20）两边同时取上确界极限，结合引理 2 可得

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t S(r)\mathrm{d}r\leqslant\frac{\Lambda}{\vartheta}。\quad(21)$$

此时，对函数 $\ln I(t)$ 运用 Itô 公式可得

$$\mathrm{d}\ln I(t)=\left[\frac{\beta S(t)}{1+\alpha I}-\frac{T(I)}{I}-\left(\vartheta+\rho+\delta+\frac{\sigma_3^2}{2}\right)\right]\mathrm{d}t+\sigma_3\,\mathrm{d}B_3(t)。\quad(22)$$

对式（22）两边从 0 到 t 积分之后再除以 t，并进行适当地放缩，可得

$$\frac{1}{t}\left[\ln I(t)-\ln I(0)\right]\leqslant\frac{\beta}{t}\int_0^t S(r)\mathrm{d}r-\left(\vartheta+\rho+\delta+\frac{\sigma_3^2}{2}\right)+\frac{\sigma_3 B_3(t)}{t},\quad(23)$$

由强大数定律得

$$\lim_{t\to\infty}\frac{B_3(t)}{t}=0\ \text{a.s.}。$$

对式（23）两边同时取上确界极限，并结合式（21）可得：

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\ln I(r)<\frac{\beta\Lambda}{\vartheta}-\left(\vartheta+\rho+\delta+\frac{\sigma_3^2}{2}\right)=\left(\vartheta+\rho+\delta+\frac{\sigma_3^2}{2}\right)\left(\widehat{R_0^s}-1\right)<0。$$

这说明 $\lim\limits_{t\to\infty}I(t)=0$ a.s.，证毕。

注 4　定理 4 说明，当文献 [4] 中的基本再生数大于 1 时，确定性情形下的疾病仍在流行；保持其他条件不变，加入随机扰动，只要噪声强度 σ_3 足够大，疾病就会灭绝。

5　结语

本文主要研究了一类具饱和发生率的随机 SVIR 传染病模型的平稳分布及灭绝性。首先，对于任意给定的正初始值，证明得到该系统总存在唯一的全局正解，且该解将以概率 1 存在于内。其次，在随机扰动下，无论染病者数量是否达到治疗饱和状态，只要 $\widetilde{R_0^s}>1$，系统总存在唯一遍历的平稳分布。最后，如果 $\widehat{R_0^s}<1$，疾病将以指数灭绝，这说明随机扰动在一定条件下将加速疾病的灭绝。

参考文献：

[1]　KERMACK W O，MCKENDRICK À. A Contribution to the Mathematical Theory of Epidemics[J]. Proceedings of the Royal Society A：Mathematical，Physical and Engineering Sciences，2021，115：700-721.

[2]　WANG W D. Backward Bifurcation of an Epidemic Model with Treatment[J]. Mathematical Biosciences，2006，201(1/2)：58-71.

[3]　CAPASSO V，SERIO G. A Generalization of the Kermack-McKendrick Deterministic Epidemic Model[J]. Mathematical Biosciences，1978，42(1/2)：43-61.

[4]　李文俊，丁亚君 . 一类带有饱和发生率的时滞 SVIR 模型的稳定性及分支分析 [J]. 兰州文理学院学报 (自然科学版)，2018，32(4)：1-6.
LI Wenjun，DING Yajun. Stability Analysis of a Class of Delayed SVIR Model with Saturation Incidence[J]. Journal of Lanzhou University of Arts and Science (Natural Science Edition)，2018，32(4)：1-6.

[5]　HAN B T，JIANG D Q，ZHOU B Q，et al. Stationary Distribution and Probability Density Function of a Stochastic SIRSI Epidemic Model with Saturation Incidence Rate and Logistic Growth[J]. Chaos，Solitons & Fractals，2021，142：110519.

[6]　RAJASEKAR S P，PITCHAIMANI M，ZHU Q X.

Dynamic Threshold Probe of Stochastic SIR Model with Saturated Incidence Rate and Saturated Treatment Function[J]. Physica A：Statistical Mechanics and Its Applications，2019(535)：122300.

[7] ZHANG Y，FAN K G，GAO S J，et al. Ergodic Stationary Distribution of a Stochastic SIRS Epidemic Model Incorporating Media Coverage and Saturated Incidence Rate[J]. Physica A：Statistical Mechanics and Its Applications，2019(514)：671–685.

[8] CAO Z W，FENG W，WEN X D，et al. Dynamical Behavior of a Stochastic SEI Epidemic Model with Saturation Incidence and Logistic Growth[J]. Physica A：Statistical Mechanics and Its Applications，2019(523)：894–907.

[9] WEI F Y，XUE R. Stability and Extinction of SEIR Epidemic Models with Generalized Nonlinear Incidence[J]. Mathematics and Computers in Simulation，2020，170(C)：1–15.

[10] LIU Q，JIANG D Q，HAYAT T，et al. Dynamical Behavior of a Higher Order Stochastically Perturbed SIRI Epidemic Model with Relapse and Media Coverage[J]. Chaos，Solitons & Fractals，2020，139：110013.

[11] LU R X，WEI F Y. Persistence and Extinction for an Age-Structured Stochastic SVIR Epidemic Model with Generalized Nonlinear Incidence Rate[J]. Physica A：Statistical Mechanics and Its Applications，2019(513)：572–587.

[12] NGUYEN D H，YIN G，ZHU C. Long-Term Analysis of a Stochastic SIRS Model with General Incidence Rates[J]. SIAM Journal on Applied Mathematics，2020，80(2)：814–838.

[13] RAJASEKAR S P，PITCHAIMANI M. Ergodic Stationary Distribution and Extinction of a Stochastic SIRS Epidemic Model with Logistic Growth and Nonlinear Incidence[J]. Applied Mathematics and Computation，2020，377：125143.

[14] 李　丹，魏凤英，毛学荣 . 具有媒体报道的 SVIR 传染病模型的生存性分析 [J]. 数学物理学报，2023，43(5)：1595–1606.

LI Dan，WEI Fengying，MAO Xuerong. Survival Analysis of an SVIR Epidemic Model with Media Coverage[J]. Acta Mathematica Scientia，2023，43(5)：1595–1606.

[15] MAO X R. Stochastic Differential Equations and Their Applications[M]. Chichester：Horwood Publishing，1997：51–55.

[16] MAO X R，MARION G，RENSHAW E. Environmental Brownian Noise Suppresses Explosions in Population Dynamics[J]. Stochastic Processes and Their Applications，2002，97(1)：95–110.

[17] KHASMINSKI R Z. Stochastic Stability of Differential Equations[M]. 2nd ed. Heidelberg：Spinger-Verlag，2012，51–52.

（责任编辑：申　剑）