doi:10.3969/j.issn.1673-9833.2025.03.012

双调和方程边值问题的高阶 Richardson 外推紧差分方法

李俊涛，石　扬，杨雪花，张海湘

（湖南工业大学 理学院，湖南 株洲 412007）

摘　要：双调和方程边值问题的研究是椭圆型方程边值问题研究的热点问题之一。因此，建立了一个四阶紧差分格式，并理论证明了此差分格式解的存在唯一性、稳定性、收敛性。在此基础上，用 Richardson 外推法进行一次外推得到六阶的外推紧差分格式。最后，通过两个双调和方程的数值算例进行验证，结果表明此差分格式在双调和方程上是有效的。

关键词：计算数学；紧差分格式；双调和方程；Richardson 外推法

中图分类号：F124.5；X37　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673-9833(2025)03-0091-07

引文格式：李俊涛，石　扬，杨雪花，等．双调和方程边值问题的高阶 Richardson 外推紧差分方法 [J]. 湖南工业大学学报，2025，39(3)：91-97.

High Order Richardson Extrapolation Compact Differential Method for Boundary Value Solution of Biharmonic Equations

LI Juntao，SHI Yang，YANG Xuehua，ZHANG Haixiang

（College of Science，Hunan University of Technology，Zhuzhou Hunan 412007，China）

Abstract：Due to the fact that the boundary value solution of the biharmonic equations is one of the hot spots in the research of the boundary value solution of elliptic equations, a fourth-order compact difference scheme has therefore been established, thus theoretically verifying the uniqueness, stability and convergence of the difference solution. On this basis, a sixth-order extrapolated compact difference scheme can be obtained by a one-time extrapolation with Richardson extrapolation method adopted. Finally, numerical examples of two biharmonic equations are used to verify the effectiveness of this difference scheme on biharmonic equations.

Keywords：computational mathematics；compact difference scheme；biharmonic equation；Richardson extrapolation method

1　研究背景

双调和方程是流体力学、弹性力学、固体力学和材料科学等领域中重要的数学模型。越来越多的学者对如何高效、准确地求出此类方程的数值解产生了极大的兴趣，高精准的数值解在现实生活中的应用也非常广泛。因此，研究双调和方程边值问题的高效算法具重要的理论意义和实用价值。近年来，高阶紧差分格式在偏微分方程中的发展和应用得到学者们的广泛关注。2018 年，Wang Z. K. 等 [1] 推算出了一种新

收稿日期：2024-01-26
基金项目：国家自然科学基金资助项目 (12226340，12226337)；湖南省自然科学基金资助项目（2024JJ7146）
作者简介：李俊涛，男，湖南工业大学研究生，主要研究方向为计算数学，E-mail：hunanyongzhouli@163.com
通信作者：杨雪花，女，湖南工业大学副教授，博士，主要研究方向为大规模科学计算与应用，E-mail：hunanshidayang@163.com

的适用于声波方程的具高谱分辨率的中心紧差分格式，该格式在保障精度的同时提升了运算速率。Yu Y. Y. 等 [2] 构建并验证了分数阶次扩散模型高阶的拟紧差分格式的可行性。文献 [3] 中，对二维半线性时间分数阶移动 / 非移动模型设计了基于交替方向隐格式（ADI）的紧差分格式。还有其他学者利用紧差分格式求解方程，如 Liao H. L. 等 [4] 研究了关于线性薛定谔方程的紧差分格式，并建立一维 Burgers 方程 [5] 和求解不可压缩 Oberbeck-Boussinesq 方程 [6] 的紧差分格式并求解，同时，利用紧差分格式提高频率域声波方程的数值模拟精度 [7] 等。这些研究均表明紧差分格式在多个领域的研究和应用中蓬勃发展。

结合已有研究，本研究先对双调和方程建立紧差分格式。Richardson 外推法应用广泛，有学者研究向后欧拉－向后微分公式（BE-BDF2）在求解非定常可压缩无黏和黏性流动中的有效性 [8] 时，为了提高其精度和收敛阶，学者们也利用了 Richardson 外推法。在研究空间导数中具有分段连续变量的半线性反应扩散方程的初边值问题 [9] 时，在高阶紧差分方法的基础上也利用 Richardson 外推以提升计算精度。所以在紧差分格式的基础上利用 Richardson 外推提升精度的想法是可行的。

现讨论如下一类双调和方程边值问题：

$$\begin{cases}\Delta^2 u \equiv \dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4}+2\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2}+\dfrac{\partial^4 u}{\partial y^4},\\ \Delta^2 u=f(x,\ y),(x,\ y)\in\Omega;\\ u(x,\ y)=\varphi(x,\ y),(x,\ y)\in\Gamma;\\ \Delta u(x,\ y)=\psi(x,\ y),(x,\ y)\in\Gamma。\end{cases}\tag{1}$$

式中：Ω 为矩形区域 $\{(x,y)|0<x<L_1,\ 0<y<L_2\}$；$\Gamma$ 为 Ω 的边界；$\Delta u=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$。

令 $v=\Delta u$，则方程式（1）等价于如下微分方程：

$$\begin{cases}\Delta v=f(x,\ y),\ (x,\ y)\in\Omega;\\ v(x,\ y)=\psi(x,\ y),\ (x,\ y)\in\Gamma;\end{cases}\tag{2}$$

$$\begin{cases}\Delta u=v(x,\ y),\ (x,\ y)\in\Omega;\\ u(x,\ y)=\varphi(x,\ y),\ (x,\ y)\in\Gamma。\end{cases}\tag{3}$$

首先，通过变量替换将原本的四阶微分方程转变成两个二阶微分方程，接着对这两个微分方程先建立一个达到四阶精度的紧差分格式，然后探究此紧差分格式的解的存在性、唯一性、收敛性以及稳定性，之后利用 Richardson 外推法将原本的四阶精度提升至六阶精度，最后，通过两个算例来验证差分格式以及外推之后的有效性。

2 差分格式

2.1 差分格式的建立

将区间 $[0,\ L_1]$ 作 m_1 等分，记 $h_1=L_1/m_1$，$x_i=ih_1$，$0\leqslant i\leqslant m_1$；将区间 $[0,\ L_2]$ 作 m_2 等分，记 $h_2=L_2/m_2$，$x_j=jh_2$，$0\leqslant j\leqslant m_2$，其中，$h_1$ 为 x 方向的步长，h_2 为 y 方向的步长。用两簇平行线 $x=x_i$，$0\leqslant i\leqslant m_1$；$y=y_j$，$0\leqslant j\leqslant m_2$；将区域 Ω 剖分为 $m_1\times m_2$ 个小矩形，将两簇直线的交点（x_i, y_j）称之为网格节点。记

$$\Omega_h=\left\{\left(x_i,\ y_j\right)\mid 0\leqslant i\leqslant m_1,\ 0\leqslant j\leqslant m_2\right\},$$

称属于 Ω 的节点

$$\overset{o}{\Omega}_h=\left\{\left(x_i,\ y_j\right)\middle| 1\leqslant i\leqslant m_1-1,\ 1\leqslant j\leqslant m_2-1\right\}$$

为内节点，称位于 Γ 上的节点 $\Gamma_h=\Omega_h\big\backslash\overset{o}{\Omega}_h$ 为边界节点。

为了方便起见，记 $\omega\in\left\{(i,\ j)\middle|\left(x_i,\ y_j\right)\in\overset{o}{\Omega}_h\right\}$，$\gamma\in\left\{(i,\ j)\middle|\left(x_i,\ y_j\right)\in\Gamma_h\right\}$，$\varpi=\omega\cup\gamma$。

当 v 是 Ω_h 上的网格函数时，记

$$V_h=\left\{v\mid v=\left\{v_{i,\ j}\middle|(i,\ j)\in\varpi\right\}\right\},$$

当 $(i,j)\in\gamma$ 时 $v_{i,j}=0$，记 $\overset{o}{V}_h=\{v\mid v\in V_h\}$。

设 $v=\left\{v_{i,\ j}\middle|0\leqslant i\leqslant m_1,\ 0\leqslant j\leqslant m_2\right\}\in V_h$，引进记号：

$$\delta_x^2 v_{i,\ j}=\left[u_{i-1,\ j}-2u_{i,\ j}+u_{i+1,\ j}\right]\Big/h_1^2,$$

$$\delta_y^2 v_{i,\ j}=\left[u_{i,\ j-1}-2u_{i,\ j}+u_{i,\ j+1}\right]\Big/h_2^2。$$

$$\|v\|_\infty=\max_{0\leqslant i\leqslant m_1,\ 0\leqslant j\leqslant m_2}\left|v_{i,\ j}\right|,\ |v|_1=\sqrt{\left\|\delta_x v\right\|^2+\left\|\delta_y v\right\|^2}。$$

在节点（x_i, x_j）处考虑微分方程（2）和（3），并且对于变量 $v(x_i, x_j)=\Delta u(x_i, x_j)$，可得出微分方程（2）和（3）在节点（$x_i, x_j$）处的方程：

$$\begin{cases}\Delta v\left(x_i,\ y_j\right)=f\left(x_i,\ y_j\right),\ (i,\ j)\in\varpi;\\ v\left(x_i,\ y_j\right)=\psi\left(x_i,\ y_j\right),\ (i,\ j)\in\gamma;\end{cases}\tag{4}$$

$$\begin{cases}\Delta u\left(x_i,\ y_j\right)=v\left(x_i,\ y_j\right),\ (i,\ j)\in\varpi;\\ u\left(x_i,\ y_j\right)=\varphi\left(x_i,\ y_j\right),\ (i,\ j)\in\gamma;\end{cases}\tag{5}$$

为建立具有四阶精度的紧差分格式，需定义算子。

设 $u=\left\{u_{i,\ j}\middle|(i,\ j)\in\varpi\right\}\in V_h$。定义算子 A、B：

$$(Au)_{i,\ j}=\begin{cases}\left(u_{i+1,\ j}+10u_{i,\ j}+u_{i-1,\ j}\right)\big/12,\ 1\leqslant i\leqslant m_1-1,\ 0\leqslant j\leqslant m_2,\\ u_{i,\ j},\ i=0,\ m_1,0\leqslant j\leqslant m_2;\end{cases}$$

$$(Bu)_{i,\ j}=\begin{cases}\left(u_{i,\ j+1}+10u_{i,\ j}+u_{i,\ j-1}\right)\big/12,1\leqslant j\leqslant m_2-1,0\leqslant i\leqslant m_1,\\ u_{i,\ j},\ j=0,\ m_2,0\leqslant i\leqslant m_1。\end{cases}$$

用算子 A、B 作用于微分方程（4）（5）两式的两边，且根据算子的性质 $AB=BA$，易得到

$$\begin{cases} BA\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x_i, y_j)+AB\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x_i, y_j)=ABf(x_i, y_j), \\ 1\leqslant i\leqslant m_1-1,\ 1\leqslant j\leqslant m_2-1; \end{cases} \tag{6}$$

$$\begin{cases} BA\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j)+AB\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j)=ABv(x_i, y_j), \\ 1\leqslant i\leqslant m_1-1,\ 1\leqslant j\leqslant m_2-1。 \end{cases} \tag{7}$$

由 Taylor 公式可以得到：

$$A\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x_i, y_j)=\delta_x^2 V_{i,j}+\frac{h_1^4}{240}\frac{\partial^6 v}{\partial x^6}(\xi_{i,j}, y_j),\quad 1\leqslant i\leqslant m_1-1,\ 0\leqslant j\leqslant m_2; \tag{8}$$

$$B\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x_i, y_j)=\delta_y^2 V_{i,j}+\frac{h_2^4}{240}\frac{\partial^6 v}{\partial y^6}(x_i, \eta_{i,j}),\quad 0\leqslant i\leqslant m_1,\ 1\leqslant j\leqslant m_2-1; \tag{9}$$

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j)=\delta_x^2 U_{i,j}+\frac{h_1^4}{240}\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}(\alpha_{i,j}, y_j),\quad 1\leqslant i\leqslant m_1-1,\ 0\leqslant j\leqslant m_2; \tag{10}$$

$$B\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j)=\delta_y^2 U_{i,j}+\frac{h_2^4}{240}\frac{\partial^6 u}{\partial y^6}(x_i, \beta_{i,j}),\quad 0\leqslant i\leqslant m_1,\ 1\leqslant j\leqslant m_2-1。 \tag{11}$$

式（8）~（11）中：$\alpha_{i,j}$、$\xi_{i,j}\in(x_{i-1}, x_{i+1})$；$\beta_{i,j}$、$\eta_{i,j}\in(y_{i-1}, y_{i+1})$；$U_{i,j}=u(x_i, y_j)$、$V_{i,j}=v(x_i, y_j)$，$(i, j)\in\varpi$，是定义在 Ω_h 上的网格函数。

记

$$P_{i,j}=\frac{h_1^4}{240}\frac{\partial^6 v}{\partial x^6}(\xi_{i,j}, y_j),\ 1\leqslant i\leqslant m_1-1,\ 0\leqslant j\leqslant m_2; \tag{12}$$

$$Q_{i,j}=\frac{h_2^4}{240}\frac{\partial^6 v}{\partial y^6}(x_i, \eta_{i,j}),\quad 0\leqslant i\leqslant m_1,\ 1\leqslant j\leqslant m_2-1; \tag{13}$$

$$S_{i,j}=\frac{h_1^4}{240}\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}(\xi_{i,j}, y_j),\ 1\leqslant i\leqslant m_1-1,\ 0\leqslant j\leqslant m_2; \tag{14}$$

$$T_{i,j}=\frac{h_2^4}{240}\frac{\partial^6 u}{\partial y^6}(x_i, \eta_{i,j}),\ 0\leqslant i\leqslant m_1,\ 1\leqslant j\leqslant m_2-1。 \tag{15}$$

将式（8）~（15）代入式（6）和（7）中，得

$$B\delta_x^2 V_{i,j}+A\delta_y^2 V_{i,j}=ABf(x_i, y_j)-(R_v)_{i,j},\quad (i, j)\in\omega, \tag{16}$$

$$B\delta_x^2 U_{i,j}+A\delta_y^2 U_{i,j}=ABv(x_i, y_j)-(R_u)_{i,j},\quad (i, j)\in\omega。 \tag{17}$$

式（16）（17）中：

$$(R_v)_{i,j}=(BP_{i,j}+AQ_{i,j}),\quad (i, j)\in\omega; \tag{18}$$

$$(R_u)_{i,j}=(BS_{i,j}+AT_{i,j}),\quad (i, j)\in\omega。 \tag{19}$$

注意式（4）与（5）中的边值条件：

$$V_{i,j}=\psi(x_i, y_j),\quad (i, j)\in\gamma; \tag{20}$$

$$U_{i,j}=\varphi(x_i, y_j),\quad (i, j)\in\gamma。 \tag{21}$$

在式（16）（17）中，略去小量项 $(R_v)_{i,j}$ 和 $(R_u)_{i,j}$，并且注意到式（20）及式（21），令 $v_{i,j}$、$u_{i,j}$ 代替 $V_{i,j}$、$U_{i,j}$，就可以得到如下差分格式：

$$\begin{cases} B\delta_x^2 v_{i,j}+A\delta_y^2 v_{i,j}=ABf(x_i, y_j),\quad (i, j)\in\omega; \\ v_{i,j}=\psi(x_i, y_j),\quad (i, j)\in\gamma。 \end{cases} \tag{22}$$

$$\begin{cases} B\delta_x^2 u_{i,j}+A\delta_y^2 u_{i,j}=ABv(x_i, y_j),\quad (i, j)\in\omega; \\ u_{i,j}=\varphi(x_i, y_j),\quad (i, j)\in\gamma。 \end{cases} \tag{23}$$

$$\text{记 } M=\max\left\{\max_{(x,y)\in\bar\Omega}\left|\frac{\partial^6 v(x,y)}{\partial x^6}\right|,\ \max_{(x,y)\in\bar\Omega}\left|\frac{\partial^6 v(x,y)}{\partial y^6}\right|,\ \max_{(x,y)\in\bar\Omega}\left|\frac{\partial^6 u(x,y)}{\partial x^6}\right|,\ \max_{(x,y)\in\bar\Omega}\left|\frac{\partial^6 u(x,y)}{\partial y^6}\right|\right\}, \tag{24}$$

联立式（12）~（15）、（18）、（19）及（24）得

$$\left|(R_v)_{i,j}\right|\leqslant M(h_1^4+h_2^4)/240,\ (i, j)\in\omega; \tag{25}$$

$$\left|(R_u)_{i,j}\right|\leqslant M(h_1^4+h_2^4)/240,\ (i, j)\in\omega。 \tag{26}$$

2.2　差分格式解的存在性

引理 1　根据文献 [10] 可知，若 $v\in\overset{o}{V}_h$，则有

$$-(B\delta_x^2 v+A\delta_y^2 v,\ v)\geqslant\frac{2}{3}|v|_1^2。$$

定理 1　差分格式（22）和（23）存在唯一解。

证明　差分格式（22）是线性的，考虑其齐次方程组

$$\begin{cases} B\delta_x^2 v_{i,j}+A\delta_y^2 v_{i,j}=0,\quad (i, j)\in\omega; \\ v_{i,j}=\psi(x_i, y_j),\quad (i, j)\in\gamma。 \end{cases} \tag{27}$$

用 $-v$ 与式（27）中齐次方程的两边做内积，得到

$$-(B\delta_x^2 v+A\delta_y^2 v,\ v)=0。$$

由引理 1 可得 $2|v|_1^2/3\leqslant 0$，注意到式（27）中的边值条件，有 $v_{i,j}=0$，$(i, j)\in\varpi$。

此时注意式（23），可以得到

$$\begin{cases} B\delta_x^2 u_{i,j}+A\delta_y^2 u_{i,j}=0,\quad (i, j)\in\omega; \\ u_{i,j}=\varphi(x_i, y_j),\quad (i, j)\in\gamma。 \end{cases} \tag{28}$$

用 $-u$ 与式（28）中齐次方程的两边做内积，得

$$-(B\delta_x^2 u+A\delta_y^2 u,\ u)=0,$$

由引理 1 可得 $2|u|_1^2/3\leqslant 0$。

注意式（28）中的边值条件，有 $u_{i,j}=0$，$(i, j)\in\varpi$。因此差分格式（22）和（23）是唯一可解的。定理证毕。

2.3　差分格式解的稳定性

引理 2　由文献 [10] 可知，若设 $v\in\overset{o}{V}_h$，则有

$$\|v\|_\infty\leqslant\left(\sqrt{L}/2\right)|v|_1,$$

式中 $|v|_1=h\sum_{i=0}^{m-1}(\delta_x v_{i+1/2})^2$。

引理 3　由文献 [10] 可知，若设 $v\in\overset{o}{V}_h$，则有

$$\|v\| \leqslant \kappa |v|_1,$$

式中：$\kappa=\left(6/L_1^2+6/L_2^2\right)^{-1/2} \leqslant \left(L_1L_2/12\right)^{1/2}$。

引理 4 由文献 [10] 可知，若设 $v\in \overset{o}{V}_h$，则有

$$\|v\|_\infty \leqslant |v|_1 \sqrt{2}/4。$$

证明 由引理 2，并注意到 $v_{0,j}=v_{m_1,j}=0$，有

$$\|v\|_\infty^2 \leqslant \frac{L_1}{4}h_1\sum_{i=0}^{m_1-1}\left(\delta_x v_{i+1/2,\,j}\right)^2,\quad 1\leqslant j\leqslant m_2-1。\tag{29}$$

注意 $v_{i,0}=v_{i,m_2}=0$，将式（29）两边都乘以 h_2，并对 j 从 1 到 m_2 求和，得 $L_2\|v\|_\infty^2 \leqslant \|\delta_x v\|^2 L_1/4$。 （30）

同理可得 $L_1\|v\|_\infty^2 \leqslant \|\delta_y v\|^2 L_2/4$。 （31）

将式（30）（31）相加，得 $4\left(L_2/L_1+L_1/L_2\right)\|v\|_\infty^2 \leqslant |v|_1^2$，移项后两边开平方得 $\|v\|_\infty \leqslant 2\left(L_1L_2/\left(L_1^2+L_2^2\right)\right)^{1/2}|v|_1$，根据基本不等式，得 $\|v\|_\infty \leqslant |v|_1\sqrt{2}/4$。定理证毕。

定理 2 差分格式（22）和（23）在下述意义下对右端项函数是稳定的，设 $\left\{v_{i,j},\ u_{i,j}\,\middle|\,(i,\ j)\in\varpi\right\}$ 为

$$\begin{cases}B\delta_x^2 v_{i,j}+A\delta_y^2 v_{i,j}=f_{i,j},\quad (i,j)\in\omega,\\ v_{i,j}=0,\quad (i,j)\in\gamma;\end{cases}\tag{32}$$

$$\begin{cases}B\delta_x^2 u_{i,j}+A\delta_y^2 u_{i,j}=ABv_{i,j},\quad (i,j)\in\omega,\\ u_{i,j}=0,\quad (i,j)\in\gamma\end{cases}\tag{33}$$

的解，则有 $\|u\|_\infty \leqslant L_1L_2\sqrt{6L_1L_2}\,\|f\|/128$。

式中 $\|f\|^2=h_1h_2\sum_{i=1}^{m_1-1}\sum_{j=1}^{m_2-1}\left(f_{i,j}\right)^2$。

证明 用 $-v$ 与式（32）做内积，得

$$-\left(B\delta_x^2 v+A\delta_y^2 v,\ v\right)=-\left(f,v\right)。$$

由引理 1 得 $\frac{2}{3}|v|_1^2 \leqslant -\left(B\delta_x^2 v+A\delta_y^2 v,\ v\right)=-\left(f,v\right)$，

由 Cauchy-Schwarz 不等式得 $\frac{2}{3}|v|_1^2 \leqslant -\left(f,\ v\right)\leqslant \|f\|\cdot\|v\|$，

由引理 3 得 $\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\kappa^2}\|v\|^2 \leqslant \frac{2}{3}|v|_1^2 \leqslant \|f\|\cdot\|v\|$，

从而有 $\|v\| \leqslant 3\kappa^2\|f\|/2$。 （34）

同理，用 $-u$ 与式（33）做内积，得 $\frac{2}{3}|u|_1^2 \leqslant \|v\|\cdot\|u\|$。

由引理 4 和引理 3 得：

$$\frac{2}{3}\cdot 2\sqrt{2}\|u\|_\infty\cdot\frac{1}{\kappa}\|u\| \leqslant \frac{2}{3}|u|_1^2 \leqslant \|v\|\cdot\|u\|,$$

结合式（34），得 $\|u\|_\infty \leqslant 9\sqrt{2}\kappa^3\|f\|/16$。

由引理 4 得 $\|u\|_\infty \leqslant L_1L_2\sqrt{6L_1L_2}\,\|f\|/128$。定理证毕。

2.4 差分格式解的收敛性

定理 3 设 $\left\{v_{i,j},\ u_{i,j}\,\middle|\,(i,\ j)\in\varpi\right\}$ 为差分格式（22）和（23）的解，设 $\left\{v(x,y),\ u(x,y)\,\middle|\,(x,y)\in\bar{\Omega}\right\}$ 为定解问题（2）（3）的解，记

$$e_{i,j}^v=v\left(x_i,y_j\right)-v_{i,j},\quad (i,j)\in\varpi;$$

$$e_{i,j}^u=u\left(x_i,y_j\right)-u_{i,j},\quad (i,j)\in\varpi;$$

则有 $\left\|e_{i,j}\right\|_\infty \leqslant \sqrt{6}L_1^2L_2^2M\left(h_1^4+h_2^4\right)/30\ 720$。

证明 将式（20）（16）与式（22）相减，将式（21）（17）与式（23）相减，得到如下误差方程组：

$$\begin{cases}B\delta_x^2 e_{i,j}^v+A\delta_y^2 e_{i,j}^v=-\left(R_v\right)_{i,j},\quad (i,\ j)\in\omega;\\ e_{i,j}^v=0,\quad (i,\ j)\in\gamma。\end{cases}$$

$$\begin{cases}B\delta_x^2 e_{i,j}^u+A\delta_y^2 e_{i,j}^u=-\left(R_u\right)_{i,j},\quad (i,\ j)\in\omega;\\ e_{i,j}^u=0,\quad (i,\ j)\in\gamma。\end{cases}$$

应用定理 2 并注意到式（25）和（26），可得 $\left\|e_{i,j}\right\|_\infty \leqslant \sqrt{6}L_1^2L_2^2M\left(h_1^4+h_2^4\right)/30\ 720$。

定理证毕。

2.5 Richardson 外推差分格式的建立

记差分格式（22）和（23）的解为 $u_{i,j}(h_1,h_2)$。

定理 4 设定解问题

$$BA\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+AB\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}=\frac{1}{240}B\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}\left(x,\ y\right),\ (x,\ y)\in\Omega,\tag{35}$$

式中，边界条件 $p=0$，$(x,y)\in\Gamma$。

$$BA\frac{\partial^2 q}{\partial x^2}+AB\frac{\partial^2 q}{\partial y^2}=\frac{1}{240}A\frac{\partial^6 u}{\partial y^6}\left(x,y\right),\tag{36}$$

式中：$(x,y)\in\Omega$；边界条件为 $q=0$，$(x,y)\in\Gamma$。

存在光滑解，则有

$$\max_{(i,\,j)\in\omega}\left|u\left(x_i,\ y_j\right)-\left[\frac{16}{15}u_{2i,\,2j}\left(\frac{h_1}{2},\ \frac{h_2}{2}\right)-\frac{1}{15}u_{i,j}\left(h_1,\ h_2\right)\right]\right|= O\left(h_1^6,\ h_2^6\right)。$$

式中：$h_1=L_1/m_1$；$h_2=L_2/m_2$。

证明 记 $e_{i,j}=u\left(x_i,\ y_j\right)-u_{i,j}\left(h_1,h_2\right)$，由文献 [11] 得

$$\left[g''(c-h)+10g''(c)+g''(c+h)\right]/12=\left[g\left(c+h\right)-2g(c)+g\left(c-h\right)\right]/h^2+g^{(6)}\left(c\right)h^4/240-13h^6g^{(8)}\left(\alpha\right)/960。\tag{37}$$

结合式（37），差分格式（23）的误差方程为

$$\begin{cases}B\delta_x^2 e_{i,j}+A\delta_y^2 e_{i,j}=B\dfrac{h_1^4}{240}\dfrac{\partial^6 u\left(x_i,\ y_j\right)}{\partial x^6}+A\dfrac{h_2^4}{240}\dfrac{\partial^6 u\left(x_i,\ y_j\right)}{\partial y^6}-B\dfrac{13h_1^6}{960}\dfrac{\partial^8 u\left(\theta_{i,j},\ y_j\right)}{\partial x^8}-B\dfrac{13h_2^6}{960}\dfrac{\partial^8 u\left(x_i,\ \vartheta_{i,j}\right)}{\partial y^8},\quad (i,j)\in\omega,\\ e_{i,j}=0,\quad (i,j)\in\gamma。\end{cases}\tag{38}$$

式中：$\theta_{i,j}\in\left(x_{i-1},\ x_{i+1}\right)$；$\vartheta_{i,j}\in\left(y_{j-1},\ y_{j+1}\right)$。

将定解问题（35）和（36）离散，可以得到

$$\begin{cases} B\delta_x^2 p_{i,j} + A\delta_y^2 p_{i,j} = \\ \dfrac{1}{240}B\dfrac{\partial^6 u(x_i, y_j)}{\partial x^6} + B\dfrac{h_1^4}{240}\dfrac{\partial^6 p(a_{i,j}, y_j)}{\partial x^6} + \\ A\dfrac{h_2^4}{240}\dfrac{\partial^6 p(x_i, b_{i,j})}{\partial y^6}，(i, j)\in\omega; \\ p_{i,j}=0，(i, j)\in\gamma。 \end{cases} \tag{39}$$

$$\begin{cases} B\delta_x^2 q_{i,j} + A\delta_y^2 q_{i,j} = \\ \dfrac{1}{240}A\dfrac{\partial^6 u(x_i, y_j)}{\partial y^6} + B\dfrac{h_1^4}{240}\dfrac{\partial^6 q(c_{i,j}, y_j)}{\partial x^6} + \\ A\dfrac{h_2^4}{240}\dfrac{\partial^6 q(x_i, d_{i,j})}{\partial y^6}，(i, j)\in\omega; \\ p_{i,j}=0，(i, j)\in\gamma。 \end{cases} \tag{40}$$

式（39）（40）中：

$a_{i,j}$、$c_{i\,j}\in(x_{i-1}, x_{i+1})$；$b_{i,j}$、$d_{i,j}\in(y_{i-1}, y_{i+1})$。

令 $r_{i,j}=e_{i,j}-h_1^4 p_{i,j}-h_2^4 q_{i,j}$，将离散后的定解问题式（39）与式（40）分别乘以 $(-h_1^4)$ 和 $(-h_2^4)$，再与误差方程（38）相加，可得

$$\begin{cases} B\delta_x^2 r_{i,j} + A\delta_y^2 r_{i,j} = -B\dfrac{h_1^8}{240}\dfrac{\partial^6 p(a_{i,j}, y_j)}{\partial x^6} - \\ A\dfrac{h_1^4 h_2^4}{240}\dfrac{\partial^6 p(x_i, b_{i,j})}{\partial y^6} - B\dfrac{h_1^4 h_2^4}{240}\dfrac{\partial^6 q(c_{i,j}, y_j)}{\partial x^6} - \\ A\dfrac{h_2^8}{240}\dfrac{\partial^6 q(x_i, d_{i,j})}{\partial y^6} - B\dfrac{13}{960}h_1^6\dfrac{\partial^8 u}{\partial x^8}(\theta_{i,j}, y_j) - \\ A\dfrac{13}{960}h_2^6\dfrac{\partial^8 u}{\partial y^8}(x_i, \vartheta_{i,j})，(i, j)\in\omega; \\ r_{i,j}=0，(i, j)\in\gamma。 \end{cases} \tag{41}$$

设 $$g(x_i, y_j) = -B\dfrac{h_1^8}{240}\dfrac{\partial^6 p(a_{i,j}, y_j)}{\partial x^6} - A\dfrac{h_1^4 h_2^4}{240}\dfrac{\partial^6 p(x_i, b_{i,j})}{\partial y^6} - B\dfrac{h_1^4 h_2^4}{240}\dfrac{\partial^6 q(c_{i,j}, y_j)}{\partial x^6} - BA\dfrac{h_2^8}{240}\dfrac{\partial^6 q(x_i, d_{i,j})}{\partial y^6} - \dfrac{13}{960}h_1^6\dfrac{\partial^8 u}{\partial x^8}(\theta_{i,j}, y_j) - A\dfrac{13}{960}h_2^6\dfrac{\partial^8 u}{\partial y^8}(x_i, \vartheta_{i,j})，(i, j)\in\omega。$$

由式（41）知边界值为零，即 $r_{i,j}=0$，$(i, j)\in\gamma$，由定理 2 可得

$$r_{i,j}\leqslant L_1L_2\sqrt{6L_1L_2}\,\|g\|/128=O(h_1^6+h_2^6)，(i, j)\in\omega。$$

$$u_{i,j}(h_1, h_2) = u(x_i, y_j) - h_1^4 p(x_i, y_j) - h_2^4 q(x_i, y_j) - O(h_1^6+h_2^6)。 \tag{42}$$

用 $(h_1/2, h_2/2)$ 代替 (h_1, h_2)，得到

$$u_{2i,2j}(h_1/2, h_2/2) = u(x_i, y_j) - h_1^4 p(x_i, y_j)/16 - h_2^4 q(x_i, y_j)/16 - O\left((h_1/2)^6+(h_2/2)^6\right)。 \tag{43}$$

结合式（42）与式（43）可以得到

$$\max_{(i,j)\in\omega}\left|u(x_i, y_j) - \left[\frac{16}{15}u_{2i,2j}\left(\frac{h_1}{2}, \frac{h_2}{2}\right) - \frac{1}{15}u_{i,j}(h_1, h_2)\right]\right| = O(h_1^6+h_2^6)。$$

定理证毕。

3　数值算例

本节将用数值算例验证紧差分格式以及在此基础上利用 Richardson 外推建立外推格式在一类双调和方程边值问题中的有效性。

算例 1

$$\begin{cases} \Delta^2 u \equiv \dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2} + \dfrac{\partial^4 u}{\partial y^4} = \\ (\pi^4-\pi^2+1)e^x\sin\pi y，0\leqslant x\leqslant 2, 0\leqslant y\leqslant 1; \\ u(x, 0)=0,\quad u(x, 1)=0,\quad 0\leqslant x\leqslant 2; \\ u(0, y)=\sin\pi y，u(2, y)=e^2\sin\pi y，0\leqslant y\leqslant 1; \\ \Delta u(x, 0)=0，\Delta u(x,1)=0,\quad 0\leqslant x\leqslant 2; \\ \Delta u(0, y)=(1-\pi^2)\sin\pi y, \\ \Delta u(2, y)=(1-\pi^2)e^2\sin\pi y,\quad 0\leqslant x\leqslant 2 \end{cases}$$

的精确解为 $u(x, y)=e^x\sin\pi y$。

表 1 给出了在 x，y 的取值范围内取不同步长时的最大误差和误差阶。

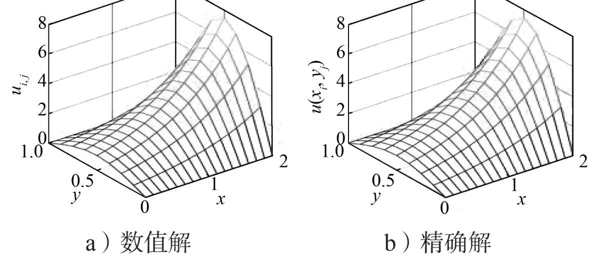
表 1　算例 1 紧差分后的数值结果

Table 1　Numerical results of the example 1

(h_1, h_2)	$E_\infty=(h_1, h_2)$	$\log_2\left[E_\infty(2h_1, 2h_2)/E_\infty(h_1, h_2)\right]$
(1/8, 1/8)	5.398 4e−04	*
(1/16, 1/16)	3.358 4e−05	4.006 7
(1/32, 1/32)	2.096 6e−06	4.001 7
(1/64, 1/64)	1.310 1e−07	4.000 3

由表 1 可知，随着步长减小，数值解的最大误差也减小，通过误差阶可知紧差分格式有四阶精度。

当步长为 (1/8, 1/8) 的精确解和数值解曲面见图 1。

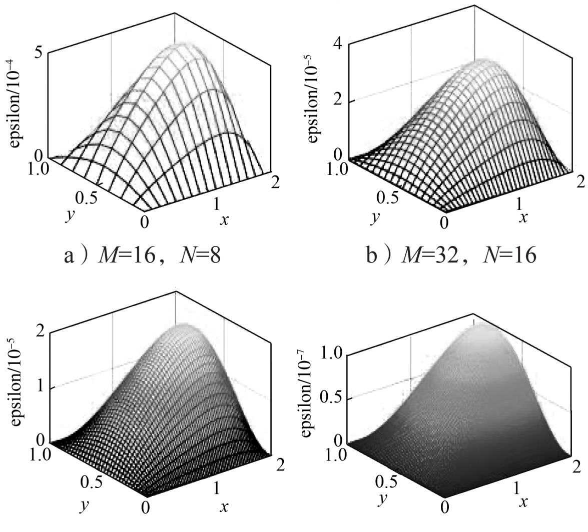


a）数值解　　b）精确解

图 1　算例 1 步长 (1/8,1/8) 数值解和精确解对比图

Fig. 1　Comparison diagram of the numerical solution and the exact solution of the step size (1/8, 1/8) in example 1

因为 x、y 的范围不一样，要使得步长相同，那么就要取不同的剖分，算例 1 取不同步长时的误差曲面见图 2。图 1、图 2 中的 M 表示 x 方向的剖分，N 表示 y 方向的剖分。



a）M=16，N=8　b）M=32，N=16

c）M=64，N=32　d）M=128，N=64

图 2　算例 1 取不同步长的误差曲面

Fig. 2　Error surfaces of non-synchronous lengths taken in example 1

图 1 中的数值解和精确解的图像基本一样，为了详细分析两者间的误差，画出如图 2 所示的误差图，从图 2 中可以看出，不同步长的误差，其剖分越多误差越小。

表 2 所示为在建立紧差分格式的基础上，再次利用 Richardson 外推法，得到的数值解的最大误差和误差阶。

表 2　算例 1Richardson 外推后的数值结果

Table 2　Numerical results extrapolated by Richardson in example 1

(h_1, h_2)	$E_\infty=(h_1, h_2)$	$\log_2\left[E_\infty(2h_1, 2h_2)/E_\infty(h_1, h_2)\right]$
(1/8, 1/8)	1.661 2e−07	*
(1/16,1/16)	2.577 8e−10	6.010 0
(1/32, 1/32)	4.607 4e−11	5.806 0

对比表 1 和表 2 中的数据可以得知，在步长相同的情况下，表 2 中的最大误差比表 1 中的精度要高很多，表 2 给出的误差阶也比表 1 的高。因此可以得出如下结论：其他变量相同的情况下，对于一类双调和方程的 Dirichlet 边值问题，首先建立紧差分格式，可以得到四阶精度的数值解，之后在紧差分格式的基础上，再利用 Richardson 外推法进行外推，可以得到六阶精度的数值解。

为了避免偶然性，使结果更具有真实性，以算例 2 再次验证此格式的有效性。

算例 2

$$\begin{cases}\Delta^2 u \equiv \dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4}+2\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2}+\dfrac{\partial^4 u}{\partial y^4}= \\ \quad 4\pi^4\sin(\pi y)\cos(\pi x)，\ 0\leqslant x\leqslant 1，\ 0\leqslant y\leqslant 1; \\ u(x,0)=0，\ u(x,1)=0，\quad 0\leqslant x\leqslant 1; \\ u(0,y)=\sin\pi y，\ u(1,y)=-\sin\pi y，\quad 0\leqslant y\leqslant 1; \\ \Delta u(x,0)=0，\ \Delta u(x,1)=0，\quad 0\leqslant x\leqslant 1; \\ \Delta u(0,y)=-2\pi^2\sin\pi y, \\ \quad \Delta u(1,y)=2\pi^2\sin\pi y，\quad 0\leqslant x\leqslant 1。\end{cases}$$

此数值算例的精确解为 $u(x, y)=\sin(\pi y)\cos(\pi x)$。

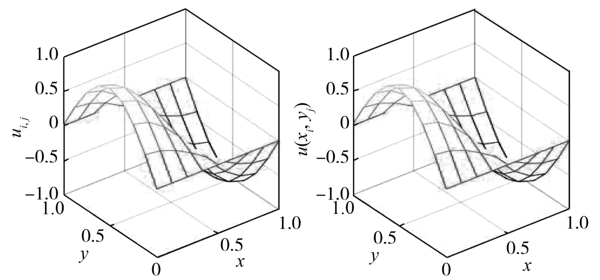
表 3 中的数值为算例 2 在 x、y 的取值范围内取不同步长时的最大误差和误差阶。

表 3　算例 2 紧差分后的数值结果

Table 3　Numerical results of the example 2

(h_1, h_2)	$E_\infty=(h_1, h_2)$	$\log_2\left[E_\infty(2h_1, 2h_2)/E_\infty(h_1, h_2)\right]$
(1/8, 1/8)	4.634 3e−05	*
(1/16, 1/16)	2.883 3e−06	4.006 6
(1/32, 1/32)	1.825 8e−07	3.981 1
(1/64, 1/64)	1.140 8e−08	4.000 4

图 3 为算例 2 步长为 (1/8, 1/8) 的精确解和数值解曲面。图 4 为 x、y 取不同步长时的误差曲面。

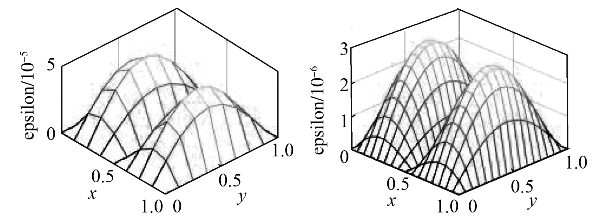


a）数值解　b）精确解

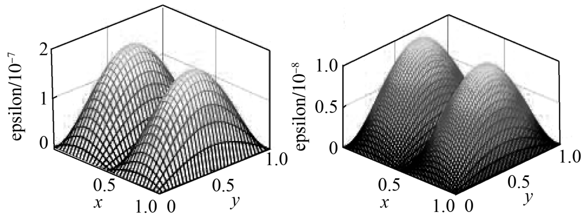
图 3　算例 2 步长 (1/8,1/8) 数值解和精确解对比图

Fig. 3　Comparison diagram of the numerical solution and the exact solution of the step size (1/8, 1/8) in example 2

图 3 所示数值解和精确解的图像差别不明显，为详细分析两者误差，画出其误差曲面（图 4），结果与算例 1 结论近似，避免了实验结果的偶然性。



a）M=N=8　b）M=N=16



c）M=N=32　　d）M=N=64

图 4　算例 2 取不同步长的误差曲面

Fig. 4　Error surfaces with non-synchronous length in example 2

在紧差分格式基础上，再次利用 Richardson 外推法得到的数值解的最大误差和误差阶见表 4。

表 4　算例 2 Richardson 外推后的数值结果

Table 4　Numerical results extrapolated by Richardson in example 2

(h_1, h_2)	E_∞=(h_1, h_2)	$\log_2\left[E_\infty(2h_1, 2h_2)/E_\infty(h_1, h_2)\right]$
(1/8, 1/8)	1.403 5e−08	*
(1/16, 1/16)	2.199 9e−10	5.985 5
(1/32, 1/32)	3.503 4e−12	5.972 5

对比表 2 和 4 可知，双调和方程的 Dirichlet 边值问题首先建立紧差分格式，再利用 Richardson 外推法可以得到六阶精度的数值解，且比较稳定。

4　结语

本文研究了一类双调和方程 Dirichlet 边值问题的紧差分格式，并在此基础上利用外推法进行一次外推。首先，建立紧差分格式可以得到一个四阶精度的差分格式，并证明紧差分格式解的存在唯一性、收敛性和稳定性。在紧差分格式的基础上利用 Richardson 外推法进行一次外推。理论证明，一次外推之后，数值解由之前的四阶精度提升到了六阶精度。之后，用两个不同的算例去验证此差分格式的稳定性与有效性，经数值算例验证，此差分格式是有效的，并且最后的数值计算结果都是六阶精度的；这些结果都可以证明理论分析的正确性。总的来说，一类双调和方程边值问题是可以利用紧差分和外推法去提升其数值解的精度的，并且得到的结果是有效且稳定的。

参考文献：

[1] WANG Z K，LI J Y，WANG B F，et al. A New Central Compact Finite Difference Scheme with High Spectral Resolution for Acoustic Wave Equation[J]. Journal of Computational Physics，2018，366：191–206.

[2] YU Y Y，DENG W H，WU Y J. High-Order Quasi-Compact Difference Schemes for Fractional Diffusion Equations[J]. Communications in Mathematical Sciences，2017，15(5)：1183–1209.

[3] JIANG H F，XU D，QIU W L，et al. An ADI Compact Difference Scheme for the Two-Dimensional Semilinear Time-Fractional Mobile-Immobile Equation[J]. Computational and Applied Mathematics，2020，39(4)：287.

[4] LIAO H L，SUN Z Z，SHI H S. Error Estimate of Fourth-Order Compact Scheme for Linear Schrödinger Equations[J]. SIAM Journal on Numerical Analysis，2010，47(6)：4381–4401.

[5] YANG X J，GE Y B，ZHANG L. A Class of High-Order Compact Difference Schemes for Solving the Burgers' Equations[J]. Applied Mathematics and Computation，2019，358：394–417.

[6] RASHIDI M M，SADRI M，SHEREMET M A. Numerical Simulation of Hybrid Nanofluid Mixed Convection in a Lid-Driven Square Cavity with Magnetic Field Using High-Order Compact Scheme[J]. Nanomaterials，2021，11(9)：2250.

[7] LI A M，LIU H. Optimized Compact Finite Difference Scheme for Frequency-Domain Acoustic Wave Equation[J]. Acta Geophysica，2019，67(5)：1391–1402.

[8] NIGRO A. BE-BDF2 Time Integration Scheme Equipped with Richardson Extrapolation for Unsteady Compressible Flows[J]. Fluids，2023，8(11)：304.

[9] HOU B，ZHANG C J. A High-Order Compact Difference Method and Its Richardson Extrapolation for Semi-Linear Reaction-Diffusion Equations with Piecewise Continuous Argument in Diffusion Term[J]. Mathematics and Computers in Simulation，2023，210：169–183.

[10] 孙志忠 . 偏微分方程数值解法 [M]. 3 版 . 北京：科学出版社，2022：1–81.
SUN Zhizhong. Numerical Solution of Partial Differential Equation[M]. 3rd ed. Beijing：Science Press，2022：1–81.

[11] 李曹杰，张海湘，杨雪花 . 一类椭圆型 Dirichlet 边值问题的高精度 Richardson 外推法 [J]. 湖南工业大学学报，2024，38(1)：91–97，104.
LI Caojie，ZHANG Haixiang，YANG Xuehua. A High-Precision Richardson Extrapolation Method for a Class of Elliptic Dirichlet Boundary Value Calculation[J]. Journal of Hunan University of Technology，2024，38(1)：91–97，104.

（责任编辑：廖友媛）