

doi:10.3969/j.issn.1673-9833.2025.02.013

# 离散时间多智能体系统间歇事件触发输出一致性

赵娟, 徐承杰, 刘琛, 张荣强

(湖南工业大学 理学院, 湖南 株洲 412007)

**摘要:** 对离散时间多智能体系统间歇事件触发输出一致性进行了研究。首先, 结合间歇控制和事件触发机制, 针对离散多智能体系统提出一个输出一致性控制协议。然后, 构造误差系统, 基于 Lyapunov 稳定性理论得到了依赖于网络的 Laplacian 矩阵和系统增益的输出一致性条件, 实现离散时间多智能体系统间歇事件触发输出一致性。最后, 利用具体的仿真例子对结果的有效性进行分析验证。

**关键词:** 离散时间多智能体系统; 间歇事件触发控制; 输出一致性

**中图分类号:** TP273; TP13 **文献标志码:** A **文章编号:** 1673-9833(2025)02-0097-06

**引文格式:** 赵娟, 徐承杰, 刘琛, 等. 离散时间多智能体系统间歇事件触发输出一致性 [J]. 湖南工业大学学报, 2025, 39(2): 97-102.

## Intermittent Event-Triggered Output Consensus of Discrete-Time Multi-Agent Systems

ZHAO Juan, XU Chengjie, LIU Chen, ZHANG Rongqiang

(College of Science, Hunan University of Technology, Zhuzhou Hunan 412007, China)

**Abstract:** A research has been conducted on the intermittent event-triggered output consensus of discrete-time multi-agent systems. Firstly, combined with intermittent control and event-triggered mechanism, an output consensus control protocol is proposed for discrete-time multi-agent systems. Then, an error system is constructed, based on Lyapunov stability theory, the output consensus conditions dependent on Laplacian Matrix and system gain are derived, which guarantees the intermittent event-triggered output consensus of discrete-time multi-agent systems can be realized. Finally, a simulation example is presented for analyzing and verifying the accuracy of results.

**Keywords:** discrete-time multi-agent systems; intermittent event-triggered control; output consensus

### 1 研究背景

多智能体系统能刻画许多实际网络, 近年来在众多领域都有其应用。多智能体系统一致性是指系统状态最终会趋于同一个值。目前, 关于多智能体系统一致性的问题倍受学者们关注, 并已经得到了较多的研究成果<sup>[1-6]</sup>。

最初, 大部分学者对多智能体系统的研究停留在同质多智能体系统。但是, 实际网络中的个体可能存在各种差异性, 导致个体的状态(维数可能不同)最终无法达到一致。这就迫切需要研究异质多智能体系统的协调控制问题。因此, 学者们开始研究多智能体系统输出一致性理论, 它是指各节点输出趋近于一个相同的值(往往可选取感兴趣的一些分量,

收稿日期: 2024-10-09

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(62373143); 湖南省教育厅科学研究基金资助重点项目(21A0366, 22A0406)

作者简介: 赵娟, 女, 湖南工业大学硕士生, 主要研究方向为多智能体系统协调控制, E-mail: 2623006357@qq.com

通信作者: 刘琛, 女, 湖南工业大学讲师, 主要研究方向为多智能体系统协调控制, E-mail: 69491910@qq.com

从而保证输出量的维数相同)。文献[7]首次使用输出调节的方法研究了具有外部干扰的协调控制问题。文献[8]针对异质多智能体系统分别提出状态反馈和输出反馈算法,在系统网络图结构平衡的情况下,实现了其二部输出一致性。在此基础上,文献[9]提出了自适应反馈算法,利用李雅普诺夫稳定性理论分析达到二部输出一致性的条件。

随着网络技术的进一步发展,网络节点间信息的频繁传递可能会导致网络通信拥堵,从而产生各种破坏系统性能的负面因素,如时滞、数据丢包等。如何设计合适的控制算法,降低网络通信负载,成为了一个十分重要的问题。因此,事件触发控制应运而生。首先,学者们针对单个体系统,研究了基于事件触发的采样控制问题,并且构建了事件触发控制理论的基本框架。然后,学者们利用事件触发控制理论研究了多智能体系统的一致性问题。如文献[10]针对非线性多智能体系统提出了具有动态补偿器的事件触发控制协议,以此来研究系统的输出一致性问题。文献[11]研究了拒绝服务干扰攻击下多智能体系统的事件触发一致性,其采样信号传输由提出的事件触发机制来决定。

此外,学者们还提出了一系列降低网络通信负载的控制方法,如量化控制、间歇控制等。其中,间歇控制因为其不需要连续控制且易被用于现实中,受到了学者们的深入研究。间歇控制是通过控制器来控制系统的通信时间和休息时间,可以将其分为周期间歇控制<sup>[12]</sup>和非周期间歇控制<sup>[13]</sup>,二者的主要区别在于控制的时间段是否固定。另外,在文献[14]中,完全间歇、领导间歇、群间间歇3个概念被提出,并深入探讨了非线性多智能体系统的领导跟随聚类一致性问题,且拓展到具有时滞的多智能体系统中。

目前,许多相关研究主要针对连续时间多智能体系统展开,而计算机通常是将连续时间信号转换成离散时间信号进行分析,因此,离散时间系统更加符合计算机控制的离散特性。同时,间歇控制和事件触发控制均能有效节省通信资源,降低网络通信负载。正是由于这样的研究动机,本研究拟综合运用间歇控制和事件触发机制,研究离散时间多智能体系统的输出一致性。

全文符号说明如下: $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^r$ 表示 $\mathbf{x}$ 是 $r$ 维实向量空间,矩阵 $\mathbf{U}^T$ (向量 $\mathbf{u}^T$ )表示矩阵 $\mathbf{U}$ (向量 $\mathbf{u}$ )的转置, $\lambda(\mathbf{Q})$ 表示矩阵 $\mathbf{Q}$ 的实部特征值, $\text{diag}(u_1, u_2, \dots, u_n)$ 为对角为 $u_1, u_2, \dots, u_n$ 的对角矩阵, $\otimes$ 为克罗内克积, $\mathbf{I}_N$ 为 $N$ 阶单位矩阵。

## 2 问题描述

考虑由 $N$ 个跟随者和1个领导者构成的多智能体系统,其中跟随者的动力学方程可描述为

$$\begin{cases} \mathbf{x}_i(k+1) = \mathbf{A}_i \mathbf{x}_i(k) + \mathbf{B}_i \mathbf{u}_i(k), \\ \mathbf{y}_i(k) = \mathbf{C}_i \mathbf{x}_i(k), \quad i=1, 2, \dots, N. \end{cases} \quad (1)$$

领导者的动力学方程可描述为

$$\begin{cases} \mathbf{x}_0(k+1) = \mathbf{A}_0 \mathbf{x}_0(k), \\ \mathbf{y}_0(k) = \mathbf{C}_0 \mathbf{x}_0(k). \end{cases} \quad (2)$$

式(1)~(2)中: $\mathbf{x}_i(k) \in \mathbf{R}^r$ 、 $\mathbf{u}_i(k) \in \mathbf{R}^n$ 、 $\mathbf{y}_i(k) \in \mathbf{R}^s$ 分别为第 $i$ 个智能体的状态变量、间歇事件触发控制输入以及输出; $\mathbf{x}_0(k) \in \mathbf{R}^r$ 、 $\mathbf{y}_0(k) \in \mathbf{R}^s$ 分别为领导者的状态变量和输出; $\mathbf{A}_i$ 、 $\mathbf{B}_i$ 、 $\mathbf{C}_i$ 、 $\mathbf{A}_0$ 和 $\mathbf{C}_0$ 均为维数合适的常数矩阵。

多智能体系统(1)(2)的拓扑结构可用无向图 $G=(V, E, A)$ 来表示,其中 $V=\{v_1, v_2, \dots, v_N\}$ 表示其节点集, $E \in V \times V$ 表示其边集, $A=[a_{ij}] \in \mathbf{R}^{N \times N}$ 为其邻接矩阵。若边 $(v_i, v_j) \in E$ ,则 $a_{ij}=1$ ;若边 $(v_i, v_j) \notin E$ ,则 $a_{ij}=0$ 。当智能体 $i$ 和智能体 $j$ 有信息交互时,可称智能体 $j$ 为智能体 $i$ 的邻居,邻居集合可表示为 $N_i=\{j \in V | (i, j) \in E\}$ 。定义图 $G$ 的拉普拉斯矩阵为

$$\mathbf{L} = \mathbf{D} - \mathbf{A} = [l_{ij}] \in \mathbf{R}^{N \times N}, \quad \text{其中矩阵 } \mathbf{D} = \text{diag} \left( \sum_{j=1, j \neq i}^N a_{ij} \right);$$

当 $i=j$ 时 $l_{ii} = \sum_{j=1}^N a_{ij}$ ;  $i \neq j$ 时, $l_{ij} = -a_{ij}$ 。

**定义1** 对于多智能体系统(1)(2),若存在一个控制器能满足以下条件

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{y}_i(k) - \mathbf{y}_0(k)\| = 0, \quad i=1, 2, \dots, N,$$

则称这个系统可实现输出一致性。

**假设1** 由所有智能体交流网络构成的图 $G$ 是无向连通的,且至少存在一个跟随者可以获取领导者的信息。

**假设2** 矩阵对 $(\mathbf{A}_i, \mathbf{B}_i)$ 可稳。

**假设3** 矩阵 $\mathbf{A}_0$ 具有非负实部的特征值。

**假设4** 对于以下矩阵方程

$$\begin{cases} \mathbf{Q}_i \mathbf{A}_0 = \mathbf{A}_i \mathbf{Q}_i + \mathbf{B}_i \mathbf{\Pi}_i, \\ \mathbf{C}_i \mathbf{Q}_i = \mathbf{C}_0. \end{cases} \quad (3)$$

必然存在解 $(\mathbf{Q}_i, \mathbf{\Pi}_i)$ ,  $i=1, 2, \dots, N$ 。

**引理1**<sup>[15]</sup> 若矩阵对 $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ 可镇定,则存在正定矩阵 $\mathbf{Q}$ ,满足以下代数Riccati方程

$$\mathbf{A}^T \mathbf{Q} \mathbf{A} - \mathbf{Q} - \mathbf{c} \mathbf{A}^T \mathbf{Q} \mathbf{B} (\mathbf{B}^T \mathbf{Q} \mathbf{B} + \mathbf{I})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{Q} \mathbf{A} + \omega \mathbf{I} < 0,$$

其中 $0 < c < \frac{\lambda_1(2-\lambda_1)}{\lambda_N}$ 。

### 3 主要结果

本文考虑了多智能体系统的间歇输出一致性问题,因此,针对多智能体系统(1)(2)设计以下间歇控制协议:

$$u_i(k) = \Omega_{1i} x_i(k) + \Omega_{2i} \xi_i(k), \quad i=1, 2, \dots, N; \quad (4)$$

$$\begin{cases} \xi_i(k+1) = A_0 \xi_i(k) + K \left[ \sum_{j=1}^N a_{ij} (\xi_j(k_{j,l}^m) - \xi_i(k_{i,l}^m)) + f_i(\xi_0(k_{i,l}^m) - \xi_i(k_{i,l}^m)) \right], & k \in [T_{2m}, T_{2m+1}); \\ \xi_i(k+1) = A_0 \xi_i(k), & k \in [T_{2m+1}, T_{2m+2}). \end{cases} \quad (5)$$

式(4)(5)中:  $k_{i,l}^m$ 为当  $k \in [k_{i,l}^m, k_{i,l+1}^m) \cap [T_{2m}, T_{2m+1})$  时智能体  $i$  的最新触发时刻;  $K$ 、 $\Omega_{1i}$ 、 $\Omega_{2i}$  均为待设计的增益矩阵;  $f_i$  代表领导者与跟随者之间的信息交流情况,若第  $i$  个跟随者可以获取领导者的信息则  $f_i=1$ , 否则  $f_i=0$ 。

令  $F = \text{diag}(f_1, f_2, \dots, f_N)$ ,  $\bar{l}_{ij} = l_{ij} + f_i$ , 则  $\bar{L} = L + F$ 。

当智能体与领导者之间能进行通信, 则用区间  $[T_{2m}, T_{2m+1})$  来表示, 此区间称为通信时间; 当二者无法通信时, 用区间  $[T_{2m+1}, T_{2m+2})$  来表示, 此区间称为休息时间。另外, 智能体  $i$  的事件触发时间序列可记为  $T_{2m} = k_{i,0}^m \leq k_{i,1}^m \leq \dots \leq k_{i,l}^m \leq T_{2m+1}$ ,  $m=0, 1, \dots$ 。

对于第  $i$  个智能体, 分别定义其观测误差和采样误差如下:

$$\delta_i(k) = \xi_i(k) - x_0(k), \quad (6)$$

$$e_i(k) = \xi_i(k_{i,l}^m) - \xi_i(k). \quad (7)$$

令  $q_i(k) = (\xi_0(k_{i,l}^m) - \xi_i(k_{i,l}^m)) - (x_0(k) - \xi_i(k))$ , 设计如下事件触发函数

$$\frac{\|q_i(k)\|}{\|\delta_i(k)\|} \geq \mu \sqrt{\frac{\omega - \frac{2}{h} \|A_0^T Q(Q+I)^{-1} Q A_0\|}{(2h+1) \|A_0^T Q(Q+I)^{-1} Q A_0\|}}, \quad (8)$$

式中:  $h > \frac{2}{\omega} \|A_0^T Q(Q+I)^{-1} Q A_0\|$ ;  $0 < \mu < 1$ 。

根据式(7)与  $q_i(k)$  的定义, 可得

$$\sum_{j=1}^N a_{ij} (e_j(k) - e_i(k)) = - \sum_{j=1}^N \bar{l}_{ij} q_j(k).$$

因此, 当  $k \in [T_{2m}, T_{2m+2})$  时,

$$\begin{cases} \delta_i(k+1) = A_0 \delta_i(k) - K \sum_{j=1}^N \bar{l}_{ij} q_j(k) - K \sum_{j=1}^N \bar{l}_{ij} \delta_j(k), & k \in [T_{2m}, T_{2m+1}); \\ \delta_i(k+1) = A_0 \delta_i(k), & k \in [T_{2m+1}, T_{2m+2}). \end{cases} \quad (9)$$

再令  $\delta(k) = [\delta_1^T(k), \delta_2^T(k), \dots, \delta_N^T(k)]^T$ ,  $q(k) = [q_1^T(k), q_2^T(k), \dots, q_N^T(k)]^T$ , 则式(9)可改写为

$$\begin{cases} \delta(k+1) = (I_N \otimes A_0 - \bar{L} \otimes K) \delta(k) - (\bar{L} \otimes K) \delta(k), & k \in [T_{2m}, T_{2m+1}); \\ \delta(k+1) = (I_N \otimes A_0) \delta(k), & k \in [T_{2m+1}, T_{2m+2}). \end{cases} \quad (10)$$

**定理1** 在假设1~4成立的情况下, 选取  $\Omega_{1i}$  使得  $A_i + B_i \Omega_{1i}$  可以 Schur 稳定,  $\Omega_{2i} = \Pi_i - \Omega_{1i} \Theta_i$ , 增益矩阵  $K = \frac{1}{\lambda_N} (Q + I)^{-1} Q A_0$ 。如果存在  $\tau_1, \tau_2 > 0$  满足不等式

$$\begin{cases} \Delta_{2m} \geq \tau_1, & \tau_1 > -\frac{\beta}{\alpha}, \\ \Delta_{2m+1} \leq \tau_2, & \tau_2 > -\frac{\beta}{\alpha}, \end{cases}$$

式中:  $\Delta_m = T_{m+1} - T_m$ ;  $\beta = \ln \left( 1 + \frac{\lambda_{\max}(A_0^T Q A_0 - Q)}{\lambda_{\min}(Q)} \right) > 0$ ;

$$\alpha = \ln \left( 1 + \frac{\omega(\mu^2 - 1)}{\lambda_{\max}(Q)} \right) < 0.$$

则多智能体系统(1)~(2)在间歇事件触发控制协议(4)(5)下可达到输出一致性。

**证明** 选择如下 Lyapunov 候选函数

$$V(k) = \delta^T(k) (I_N \otimes Q) \delta(k), \quad (11)$$

当  $k \in [T_{2m}, T_{2m+1})$  时,

$$\begin{aligned} V(k+1) - V(k) &= \delta^T(k) (I_N \otimes (A_0^T Q A_0 - Q) - 2\bar{L} \otimes A_0^T Q K + \bar{L}^2 \otimes K^T Q K) \delta(k) - \\ & 2\delta^T(k) (\bar{L} \otimes A_0^T Q K - \bar{L}^2 \otimes K^T Q K) q(k) + \\ & q^T(k) (\bar{L}^2 \otimes K^T Q K) q(k). \end{aligned} \quad (12)$$

因为  $\bar{L}$  是对称矩阵, 所以存在一个正交矩阵  $P$  满足  $P^T \bar{L} P = A = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N)$ , 其中  $\lambda_i (i=1, 2, \dots, N)$  是  $\bar{L}$  的第  $i$  个特征值,  $\lambda_1$  和  $\lambda_N$  分别为其最小和最大特征值。

定义  $\tilde{\delta}(k) = (P^T \otimes I_n) \delta(k)$ , 又因为  $Q < Q + I$ , 所以  $(Q + I)^{-1} Q (Q + I)^{-1} < (Q + I)^{-1}$ , 则

$$\begin{aligned} \delta^T(k) (I_N \otimes (A_0^T Q A_0 - Q) - 2\bar{L} \otimes A_0^T Q K + \bar{L}^2 \otimes K^T Q K) \delta(k) \leq \\ \tilde{\delta}^T(k) \left( I_N \otimes \left( A_0^T Q A_0 - Q - \left( 2 \frac{\lambda_1}{\lambda_N} - \frac{\lambda_1^2}{\lambda_N^2} \right) \Gamma \right) \right) \tilde{\delta}^T(k), \end{aligned}$$

式中  $\Gamma = A_0^T Q (Q + I)^{-1} Q A_0$ 。

因为  $\tilde{\delta}^T(k) \tilde{\delta}(k) = \delta^T(k) \delta(k)$ , 结合引理1可得

$$\delta^T(k) (I_N \otimes (A_0^T Q A_0 - Q) - 2\bar{L} \otimes A_0^T Q K + \bar{L}^2 \otimes K^T Q K) \delta(k) \leq -\omega \sum_{i=1}^N \|\delta_i(k)\|^2. \quad (13)$$

再通过 Young 不等式  $\mathbf{x}^T \mathbf{y} \leq \frac{1}{2h} \mathbf{x}^T \mathbf{x} + \frac{h}{2} \mathbf{y}^T \mathbf{y}$  可将式 (12) 改写为

$$\begin{aligned}
 & -2\delta^T(k)(\bar{\mathbf{L}} \otimes \mathbf{A}_0^T \mathbf{Q} \mathbf{K}) \mathbf{q}(k) \leq \\
 & \frac{1}{h} \delta^T(k)(\bar{\mathbf{L}} \otimes \mathbf{A}_0^T \mathbf{Q} \mathbf{K}) \delta(k) + h \mathbf{q}^T(k)(\bar{\mathbf{L}} \otimes \mathbf{A}_0^T \mathbf{Q} \mathbf{K}) \mathbf{q}(k) \leq \\
 & \frac{1}{h} \delta^T(k)(\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{\Gamma}) \delta(k) + h \mathbf{q}^T(k)(\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{\Gamma}) \mathbf{q}(k).
 \end{aligned} \tag{14}$$

类似地, 有

$$\begin{aligned}
 & 2\delta^T(k)(\bar{\mathbf{L}}^2 \otimes \mathbf{K}^T \mathbf{Q} \mathbf{K}) \mathbf{q}(k) \leq \\
 & \frac{1}{h} \delta^T(k)(\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{\Gamma}) \delta(k) + h \mathbf{q}^T(k)(\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{\Gamma}) \mathbf{q}(k), \tag{15}
 \end{aligned}$$

$$\mathbf{q}^T(k)(\bar{\mathbf{L}}^2 \otimes \mathbf{K}^T \mathbf{Q} \mathbf{K}) \mathbf{q}(k) \leq \mathbf{q}^T(k)(\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{\Gamma}) \mathbf{q}(k). \tag{16}$$

结合式 (13) ~ (16), 式 (12) 可以转化为

$$\begin{aligned}
 & V(k+1) - V(k) \leq \\
 & -\omega \sum_{i=1}^N \|\delta_i(k)\|^2 + \frac{2}{h} \delta^T(k)(\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{\Gamma}) \delta(k) + \\
 & (2h+1) \mathbf{q}^T(k)(\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{\Gamma}) \mathbf{q}(k) = \\
 & \left( -\omega + \frac{2}{h} \|\mathbf{\Gamma}\| \right) \sum_{i=1}^N \|\delta_i(k)\|^2 + (2h+1) \sum_{i=1}^N \|\mathbf{q}_i(k)\|^2.
 \end{aligned}$$

由事件触发函数 (8) 可得

$$V(k+1) - V(k) \leq \omega(\mu^2 - 1) \|\delta_i(k)\|^2 \leq \frac{\omega(\mu^2 - 1)}{\lambda_{\max}(\mathbf{Q})} V(k),$$

即有

$$V(k+1) \leq \left( 1 + \frac{\omega(\mu^2 - 1)}{\lambda_{\max}(\mathbf{Q})} \right) V(k). \tag{17}$$

当  $k \in [T_{2m+1}, T_{2m+2})$  时,

$$\begin{aligned}
 & V(k+1) - V(k) = \delta^T(k)(\mathbf{I}_N \otimes (\mathbf{A}_0^T \mathbf{Q} \mathbf{A}_0 - \mathbf{Q})) \delta(k) \leq \\
 & \frac{\lambda_{\max}(\mathbf{A}_0^T \mathbf{Q} \mathbf{A}_0 - \mathbf{Q})}{\lambda_{\min}(\mathbf{Q})} V(k),
 \end{aligned}$$

$$\text{即 } V(k+1) \leq \left( 1 + \frac{\lambda_{\max}(\mathbf{A}_0^T \mathbf{Q} \mathbf{A}_0 - \mathbf{Q})}{\lambda_{\min}(\mathbf{Q})} \right) V(k). \tag{18}$$

综合式 (17) ~ (18), 当  $k = T_{2m+2}$  时, 迭代可知

$$\begin{aligned}
 & V(T_{2m+2}) \leq \left( 1 + \frac{\omega(\mu^2 - 1)}{\lambda_{\max}(\mathbf{Q})} \right) V(T_{2m+2} - 1) \leq \\
 & \left( 1 + \frac{\omega(\mu^2 - 1)}{\lambda_{\max}(\mathbf{Q})} \right) \left( 1 + \frac{\lambda_{\max}(\mathbf{A}_0^T \mathbf{Q} \mathbf{A}_0 - \mathbf{Q})}{\lambda_{\min}(\mathbf{Q})} \right) V(T_{2m+2} - 2) \leq \\
 & \left( 1 + \frac{\omega(\mu^2 - 1)}{\lambda_{\max}(\mathbf{Q})} \right) \left( 1 + \frac{\lambda_{\max}(\mathbf{A}_0^T \mathbf{Q} \mathbf{A}_0 - \mathbf{Q})}{\lambda_{\min}(\mathbf{Q})} \right)^2 V(T_{2m+2} - 3) \leq \dots \leq
 \end{aligned}$$

$$\left( 1 + \frac{\omega(\mu^2 - 1)}{\lambda_{\max}(\mathbf{Q})} \right) \left( 1 + \frac{\lambda_{\max}(\mathbf{A}_0^T \mathbf{Q} \mathbf{A}_0 - \mathbf{Q})}{\lambda_{\min}(\mathbf{Q})} \right)^{T_{2m+2} - T_{2m+1}} V(T_{2m+1} - 1). \tag{19}$$

又因为

$$\begin{aligned}
 & V(T_{2m+1} - 1) \leq \left( 1 + \frac{\omega(\mu^2 - 1)}{\lambda_{\max}(\mathbf{Q})} \right) V(T_{2m+1} - 2) \leq \\
 & \left( 1 + \frac{\omega(\mu^2 - 1)}{\lambda_{\max}(\mathbf{Q})} \right)^2 V(T_{2m+1} - 3) \leq \dots \leq \\
 & \left( 1 + \frac{\omega(\mu^2 - 1)}{\lambda_{\max}(\mathbf{Q})} \right)^{T_{2m+1} - T_{2m} - 1} V(T_{2m}). \tag{20}
 \end{aligned}$$

将式 (20) 代入式 (19), 可得

$$\begin{aligned}
 & V(T_{2m+2}) \leq \\
 & \left( 1 + \frac{\lambda_{\max}(\mathbf{A}_0^T \mathbf{Q} \mathbf{A}_0 - \mathbf{Q})}{\lambda_{\min}(\mathbf{Q})} \right)^{T_{2m+2} - T_{2m+1}} \left( 1 + \frac{\omega(\mu^2 - 1)}{\lambda_{\max}(\mathbf{Q})} \right)^{T_{2m+1} - T_{2m}} V(T_{2m}). \tag{21}
 \end{aligned}$$

当  $k \in [k_{i,1}^m, k_{i,1+1}^m) \cap [T_{2m}, T_{2m+1})$  时, 式 (21) 可化为

$$\begin{aligned}
 & V(T_{2m+2}) \leq \left( 1 + \frac{\lambda_{\max}(\mathbf{A}_0^T \mathbf{Q} \mathbf{A}_0 - \mathbf{Q})}{\lambda_{\min}(\mathbf{Q})} \right)^{\Delta_1 + \Delta_3 + \dots + \Delta_{2m+1}} \times \\
 & \left( 1 + \frac{\omega(\mu^2 - 1)}{\lambda_{\max}(\mathbf{Q})} \right)^{\Delta_0 + \Delta_2 + \dots + \Delta_{2m}} V(0) = \\
 & e^{\alpha(\Delta_0 + \Delta_2 + \dots + \Delta_{2m}) + \beta(\Delta_1 + \Delta_3 + \dots + \Delta_{2m+1})} V(0) \leq \\
 & e^{\left[ \frac{m}{2} \right] \alpha \tau_1 + \left[ \frac{m+1}{2} \right] \beta \tau_2} V(0),
 \end{aligned}$$

式中:  $\Delta_m = T_{m+1} - T_m$ ;  $\left[ \frac{m}{2} \right]$  表示不大于  $\frac{m}{2}$  的整数;

$$\alpha = \ln \left( 1 + \frac{\omega(\mu^2 - 1)}{\lambda_{\max}(\mathbf{Q})} \right) < 0;$$

$$\beta = \ln \left( 1 + \frac{\lambda_{\max}(\mathbf{A}_0^T \mathbf{Q} \mathbf{A}_0 - \mathbf{Q})}{\lambda_{\min}(\mathbf{Q})} \right) > 0.$$

综上所述, 当系统满足定理 1 中条件  $\frac{\tau_1}{\tau_2} > \frac{\beta}{\alpha}$  时,

有  $V(T_{2m+2}) \rightarrow 0 (m \rightarrow \infty)$ , 即  $V(k) \rightarrow 0 (k \rightarrow \infty)$ 。那么

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\delta_i(k)\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|\xi_i(k) - \mathbf{x}_0(k)\| = 0.$$

令  $\boldsymbol{\eta}_i(k) = \mathbf{x}_i(k) - \boldsymbol{\Theta}_i \mathbf{x}_0(k)$ , 结合假设 4 的第一个方程, 有

$$\boldsymbol{\eta}_i(k+1) = \mathbf{x}_i(k+1) - \boldsymbol{\Theta}_i \mathbf{x}_0(k+1).$$

应用定理 1 中  $\boldsymbol{\Omega}_{2i} = \boldsymbol{\Pi}_i - \boldsymbol{\Omega}_i \boldsymbol{\Theta}_i$  可以推出

$$\eta_i(k+1) = A_i \eta_i(k) - B_i \Pi_i x_0(k) + B_i \Omega_{1i} x_i(k) + B_i \Omega_{2i} \xi_i(k) = (A_i + B_i \Omega_{1i}) \eta_i(k) + B_i \Omega_{2i} \delta_i(k)$$

因为  $A_i + B_i \Omega_{1i}$  是 Schur 稳定的, 并且当  $k \rightarrow \infty$  时  $\delta_i(k) \rightarrow 0$ , 所以  $\lim_{k \rightarrow \infty} \eta_i(k) = 0$ 。根据假设 4 的第二个方程得到

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (y_i(k) - y_0(k)) = \lim_{k \rightarrow \infty} (C_i x_i(k) - C_0 x_0(k)) = \lim_{k \rightarrow \infty} (C_i x_i(k) - C_i \Theta_i x_0(k)) = \lim_{k \rightarrow \infty} C_i \eta_i(k) = 0$$

由此, 系统 (1) (2) 在间歇事件触发控制下可以实现输出一致性。定理 1 证毕。

### 4 数值仿真

为了验证所得结论的有效性, 给出以下数值仿真。在假设 3 成立的条件下, 选择一个包含 6 个跟随者 (节点 1, 2, 3, 4, 5, 6) 和 1 个领导者 (节点 0) 的多智能体系统, 其无向连通拓扑结构如图 1 所示。

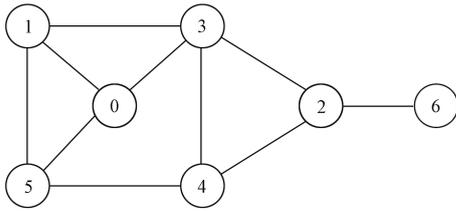


图 1 系统拓扑结构图

Fig. 1 System topology diagram

选择如下系统矩阵  $A_i, B_i, C_i, A_0, C_0$ :

$$A_1 = A_2 = A_3 = \begin{bmatrix} -0.4 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix},$$

$$A_4 = A_5 = A_6 = \begin{bmatrix} 0.3 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$B_1 = B_2 = B_3 = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0 \end{bmatrix}, B_4 = B_5 = B_6 = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.4 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$C_1 = C_2 = C_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, C_4 = C_5 = C_6 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix};$$

$$A_0 = \begin{bmatrix} -0.3 & -1 \\ 0.1 & -0.4 \end{bmatrix}; C_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

初始状态  $x_i(0), x_0(0), \xi_i(0)$  均设为随机值, 选择参数  $\mu=0.9, h=10, \omega=3$ 。根据以上数据和代数 Riccati 方程解得

$$Q = \begin{bmatrix} 3.0752 & 0.1946 \\ 0.1946 & 3.8892 \end{bmatrix}$$

对特征值进行求解则有  $\lambda_{\max}(A_0^T Q A_0 - Q) = 0.0805$ ,  $\lambda_{\max}(Q) = 3.9333, \lambda_{\min}(Q) = 3.0311$ , 可得  $\alpha = -0.1566$ ,  $\beta = 0.0262$ , 即  $\frac{\tau_1}{\tau_2} > 0.1674$ 。运行预设的仿真程序, 可得到图 2 和图 3。观察图 2 可知, 跟随者估计的状态与领导者状态之间的误差逐渐趋于稳定, 使智能体观测状态达到一致。

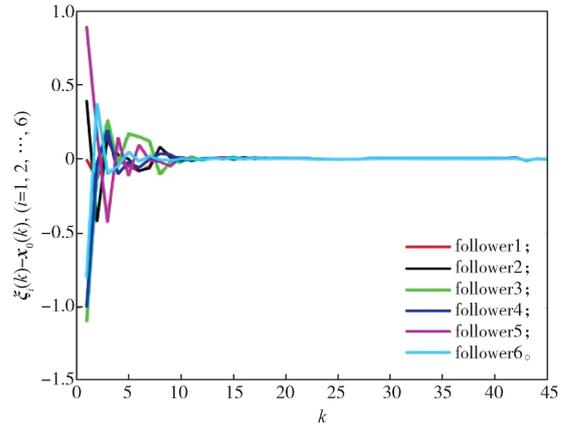


图 2 数值仿真观测误差

Fig. 2 Observer errors of numerical simulation

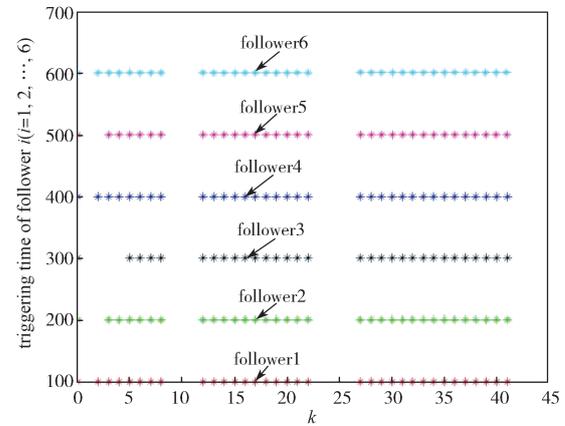


图 3 智能体触发时刻

Fig. 3 Triggered instants of agents

为了系统实现输出一致, 设计以下增益矩阵使  $A_i + B_i \Omega_{1i}$  是 Schur 稳定的。

$$\Omega_{11} = [-0.4 \ 0], \Omega_{12} = [-0.5 \ 0.1],$$

$$\Omega_{13} = [0.5 \ 0.3], \Omega_{14} = [-0.8 \ -1 \ 0],$$

$$\Omega_{15} = [-0.7 \ -1 \ 0.5], \Omega_{16} = [-1 \ -1 \ 0].$$

再通过调节方程  $\Omega_{2i} = \Pi_i - \Omega_{1i} \Theta_i$  可得

$$\Omega_{21} = [2 \ -10], \Omega_{22} = [1.5 \ -10],$$

$$\Omega_{23} = [0.5 \ -10], \Omega_{24} = [-0.0195 \ 0.0595],$$

$$\Omega_{25} = [0.0736 \ 0.0595], \Omega_{26} = [-0.0333 \ 0.0595].$$

将设计的参数输入程序, 可得系统输出误差, 如图 4 所示。

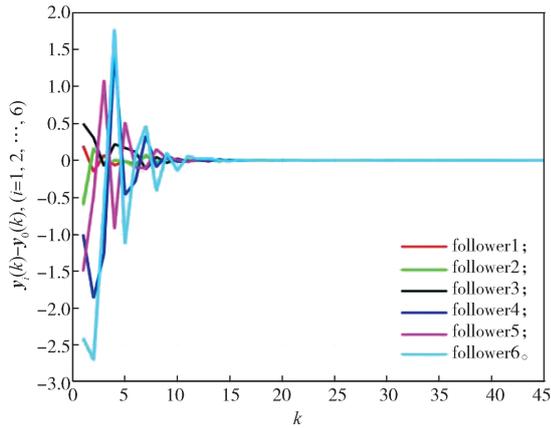


图4 数值仿真输出误差

Fig. 4 Output errors of numerical simulation

由图4可知,在间歇事件触发控制协议(4)~(5)下,智能体的输出误差随着 $k \rightarrow \infty$ 会渐近趋于0,从而实现智能体系统的输出一致。

## 5 结语

本文采用间歇事件触发控制,研究了离散时间多智能体系统的输出一致性问题。通过估计跟随者的状态信息,设计了合适的控制协议,再利用图论知识、Lyapunov稳定性理论等进行证明,得出系统实现间歇事件触发输出一致的充分条件。最后通过仿真实例对所得结果进行分析验证。因此,在一定程度上减少了智能体通信过程中造成的网络拥堵和资源浪费,降低了智能体对通信的依赖性。

### 参考文献:

- [1] OLFATI-SABER R, MURRAY R M. Consensus Problems in Networks of Agents with Switching Topology and Time-Delays[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2004, 49(9): 1520-1533.
- [2] REN W, BEARD R W. Consensus Seeking in Multiagent Systems Under Dynamically Changing Interaction Topologies[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2005, 50(5): 655-661.
- [3] LI Z K, CHEN J. Robust Consensus of Linear Feedback Protocols over Uncertain Network Graphs[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2017, 62(8): 4251-4258.
- [4] WANG Z S, LIU Y Y, ZHANG H G. Two-Layer Reinforcement Learning for Output Consensus of Multiagent Systems Under Switching Topology[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2024, 54(9): 5463-5472.
- [5] CAO X Y, ZHANG C H, ZHAO D D, et al. Event-Triggered Consensus Control of Continuous-Time Stochastic Multi-Agent Systems[J]. Automatica, 2022, 137: 110022.
- [6] 周阳平,甘晓亮,刘雪雪,等.二阶多智能体系统在自适应间歇牵制控制下的部分分量一致性[J].控制与决策,2023,38(10):2996-3002.  
ZHOU Yangping, GAN Xiaoliang, LIU Xuexue, et al. Partial Component Consensus of Second-Order Multi-Agent Systems via Adaptive Intermittent Pinning Control[J]. Control and Decision, 2023, 38(10): 2996-3002.
- [7] WANG X L, HONG Y G, HUANG J, et al. A Distributed Control Approach to a Robust Output Regulation Problem for Multi-Agent Linear Systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2010, 55(12): 2891-2895.
- [8] HAN T, ZHENG W X. Bipartite Output Consensus for Heterogeneous Multi-Agent Systems via Output Regulation Approach[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs, 2021, 68(1): 281-285.
- [9] LU M Y, HAN T, WU J, et al. Adaptive Bipartite Output Consensus for Heterogeneous Multi-Agent Systems via State/Output Feedback Control[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs, 2022, 69(8): 3455-3459.
- [10] YANG Q Q, LI X B, LI J. Output Consensus for Networked Heterogeneous Nonlinear Multi-Agent Systems by Distributed Event-Triggered Control[J]. International Journal of Control, 2022, 95(7), 1850-1863.
- [11] XIONG M Y, WANG X, CHENG J, et al. Event-Triggered Consensus Control of Multi-Agent Systems Under Denial-of-Service Jamming Attacks[J]. International Journal of Control, 2024, 97(2): 249-258.
- [12] LIU Y F, SU H S. Some Necessary and Sufficient Conditions for Containment of Second-Order Multi-Agent Systems with Intermittent Sampled Data[J]. ISA Transactions, 2021, 108: 154-163.
- [13] XU C, YANG X S, LU J Q, et al. Finite-Time Synchronization of Networks via Quantized Intermittent Pinning Control[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2018, 48(10): 3021-3027.
- [14] HUANG D, JIANG H J, YU Z Y, et al. Leader-Following Cluster Consensus in Multi-Agent Systems with Intermittence[J]. International Journal of Control, Automation and Systems, 2018, 16(2): 437-451.
- [15] CHEN M Z Q, ZHANG L Y, SU H S, et al. Stabilizing Solution and Parameter Dependence of Modified Algebraic Riccati Equation with Application to Discrete-Time Network Synchronization[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2016, 61(1): 228-233.

(责任编辑:邓光辉)