

doi:10.3969/j.issn.1673-9833.2025.02.011

一类双调和方程边值问题的四阶和六阶 Richardson 外推法

刘 凯, 张海湘, 杨雪花, 石 扬

(湖南工业大学 理学院, 湖南 株洲 412007)

摘 要: 首先, 对双调和方程建立了具有二阶精度的差分格式, 证明了该差分格式的解存在唯一性, 并利用极值原理证明了其收敛性和稳定性; 利用双重 Richardson 外推法对该差分格式做了一次外推和二次外推, 在内结点处使得计算结果分别具有四阶精度和六阶精度。研究表明, 外推算法在一定条件下对于提高差分格式解的精度有显著的作用。

关键词: 计算数学; 双调和方程; 数值解; Richardson 外推法; 收敛性; 稳定性

中图分类号: Q241.82

文献标志码: A

文章编号: 1673-9833(2025)02-0078-09

引文格式: 刘 凯, 张海湘, 杨雪花, 等. 一类双调和方程边值问题的四阶和六阶 Richardson 外推法 [J]. 湖南工业大学学报, 2025, 39(2): 78-86.

The Fourth and Sixth-Order Richardson Extrapolation Method for a Class of Biharmonic Equation Boundary Value Problems

LIU Kai, ZHANG Haixiang, YANG Xuehua, SHI Yang

(College of Science, Hunan University of Technology, Zhuzhou Hunan 412007, China)

Abstract: Firstly, a difference scheme with the second-order accuracy is established for the biharmonic equation, thus proving the uniqueness of the solution of this difference scheme, with the convergence and stability further demonstrated by using the extremum principle. The double Richardson extrapolation method is adopted to extrapolate the difference scheme with two sequential extrapolations, resulting in the fourth and the sixth order accuracy at the inner nodes, respectively. The research results indicate that the proposed extrapolation method exerts a significant effect on the improvement of the accuracy of differential scheme solutions under certain conditions.

Keywords: computational mathematics; biharmonic equation; numerical solution; Richardson extrapolation; convergence; stability

1 研究背景

椭圆型方程边值问题和双调和方程边值问题是

偏微分方程研究领域的重要内容。双调和方程起源于弹性薄板理论, 被广泛应用于经典物理、机械工程、生物物理学以及微分几何等诸多领域。目前, 对于椭

收稿日期: 2023-11-07

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (12226340, 12226337, 12126321); 湖南省自然科学基金资助项目 (2022JJ50083); 湖南省教育厅优秀青年基金资助项目 (21B0550)

作者简介: 刘 凯, 男, 湖南工业大学硕士生, 主要研究方向为计算数学, E-mail: kailiu33@163.com

通信作者: 张海湘, 男, 湖南工业大学副教授, 博士 (后), 硕士生导师, 主要研究方向为大规模科学计算与应用, E-mail: hassenzhang@163.com

圆型方程(组)或者双调和方程边值问题,科研工作者做了许多研究,并取得了丰硕的成果。文献[1]研究了一类带小参数的双调和方程边值问题,运用上、下解方法和不动点定理^[2]证明了这类问题的解存在唯一性。文献[3]将一类双调和方程问题转化为椭圆方程组问题,研究了方程组问题弱解的存在性,进而得到双调和方程问题弱解的存在性;文献[4]研究了一类半线性椭圆型方程组边值问题的可解性。文献[5]研究了带约束的双调和方程的 Dirichlet 边值问题。文献[6]给出了双调和方程的 Green 函数解法。文献[7]研究了计算高维带弱奇异核发展型方程的交替方向隐式欧拉方法。文献[8]研究了二维带弱奇异核抛物型积分微分方程的交替方向隐式有限差分格式,文献[9]提出了新的时空平衡的 Sinc 配点方法求解四阶带奇异的积分微分方程。

作为高阶椭圆方程的例子,本文主要研究下述双调和方程的边值问题^[10]。

$$\begin{cases} \Delta^2 u = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = f(x, y), (x, y) \in \Omega; \\ u(x, y) = \varphi(x, y), \Delta u(x, y) = \psi(x, y), (x, y) \in \Gamma. \end{cases} \quad (1)$$

式中: Ω 为矩形区域 $\{(x, y) | 0 < x < L_1, 0 < y < L_2\}$; Γ 为 Ω 的边界。

令 $v = \Delta u$, 则边值问题(1)可写为如下等价的微分方程组:

$$\begin{cases} \Delta v = f(x, y), (x, y) \in \Omega; \\ v(x, y) = \psi(x, y), (x, y) \in \Gamma. \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} \Delta u = v(x, y), (x, y) \in \Omega; \\ u(x, y) = \varphi(x, y), (x, y) \in \Gamma. \end{cases} \quad (3)$$

通过对式(2)和式(3)建立一个具有2阶精度的差分格式,研究其差分格式解的存在唯一性、收敛性和稳定性,在此基础上,利用 Richardson 外推法,建立该方程的四阶和六阶外推格式,以提高差分格式的精度,最后,用两个复算例来验证该差分格式和外推格式的有效性。

2 差分格式

2.1 差分格式的建立

将区间 $(0, L_1)$ 作 m_1 等分,记 $h_1 = L_1/m_1$, $x_i = ih_1$, $0 \leq i \leq m_1$; 将区间作 m_2 等分,记 $h_2 = L_2/m_2$, $y_j = ih_2$, $0 \leq j \leq m_2$ 。称 h_1 为 x 方向的步长,称 h_2 为 y 方向的步长,用两簇平行线,

$$x = x_i, 0 \leq i \leq m_1;$$

$$y = y_j, 0 \leq j \leq m_2$$

将区域 Ω 剖分为 $m_1 \times m_2$ 个小矩形,称两簇直线的交

点 (x_i, y_j) 为网格结点。

$$\text{记 } \Omega_h = \{(x_i, y_j) | 0 \leq i \leq m_1, 0 \leq j \leq m_2\}.$$

称属于 Ω 的结点,

$$\Omega'_h = \{(x_i, y_j) | 1 \leq i \leq m_1 - 1, 1 \leq j \leq m_2 - 1\}$$

为内结点,称位于 Γ 上的结点 $\Gamma_h = \Omega_h / \Omega'_h$ 为边界结点。对于边界结点,再分成两类:称位于 Ω 的4个顶点的结点为角点,称其余的点为边界上的内结点。显然 $\Omega_h = \Omega'_h \cup \Gamma_h$, 为方便起见,记

$$\omega = \{(i, j) | (x_i, y_j) \in \Omega'_h\},$$

$$\gamma = \{(i, j) | (x_i, y_j) \in \Gamma_h\},$$

$$\bar{\omega} = \omega \cup \gamma;$$

并记

$$V_h = \{v | v = \{v_{ij} | (i, j) \in \bar{\omega}\}\},$$

$$U_h = \{u | u = \{u_{ij} | (i, j) \in \bar{\omega}\}\}$$

为 Ω_h 上的网格函数。

$$\text{设 } v = \{v_{ij} | 0 \leq i \leq m_1, 0 \leq j \leq m_2\} \in V_h,$$

$$u = \{u_{ij} | 0 \leq i \leq m_1, 0 \leq j \leq m_2\} \in U_h,$$

引进如下记号:

$$\delta_x^2 v_{ij} = \frac{1}{h_1^2} (v_{i-1,j} - 2v_{ij} + v_{i+1,j}),$$

$$\delta_y^2 v_{ij} = \frac{1}{h_2^2} (v_{i,j-1} - 2v_{ij} + v_{i,j+1}),$$

$$\delta_x^2 u_{ij} = \frac{1}{h_1^2} (u_{i-1,j} - 2u_{ij} + u_{i+1,j}),$$

$$\delta_y^2 u_{ij} = \frac{1}{h_2^2} (u_{i,j-1} - 2u_{ij} + u_{i,j+1});$$

$$\Delta_h v_{ij} = \delta_x^2 v_{ij} + \delta_y^2 v_{ij}, \Delta_h u_{ij} = \delta_x^2 u_{ij} + \delta_y^2 u_{ij}.$$

在结点 (x_i, y_j) 处考虑微分方程组(2)和(3),有

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x_i, y_j) = \frac{1}{h_1^2} (v(x_{i-1}, y_j) - 2v(x_i, y_j) +$$

$$v(x_{i+1}, y_j)) - \frac{h_1^2}{12} \frac{\partial^4 v(x, y)}{\partial x^4} =$$

$$\delta_x^2 v_{ij} - \frac{h_1^2}{12} \frac{\partial^4 v(\xi_{ij}^1, y_j)}{\partial x^4}, x_{i-1} < \xi_{ij}^1 < x_{i+1}.$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x_i, y_j) = \frac{1}{h_2^2} (v(x_i, y_{j-1}) - 2v(x_i, y_j) +$$

$$v(x_i, y_{j+1})) - \frac{h_2^2}{12} \frac{\partial^4 v(x, y)}{\partial y^4} =$$

$$\delta_y^2 v_{ij} - \frac{h_2^2}{12} \frac{\partial^4 v(x_i, \eta_{ij}^1)}{\partial y^4}, y_{j-1} < \eta_{ij}^1 < y_{j+1}.$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j) &= \frac{1}{h_1^2} (u(x_{i-1}, y_j) - 2u(x_i, y_j) + \\ &\quad u(x_{i+1}, y_j)) - \frac{h_1^2}{12} \frac{\partial^4 u(x, y)}{\partial x^4} = \\ &\quad \delta_x^2 u_{ij} - \frac{h_1^2}{12} \frac{\partial^4 u(\xi_{ij}^2, y_j)}{\partial x^4}, \quad x_{i-1} < \xi_{ij}^2 < x_{i+1} \circ \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j) &= \frac{1}{h_2^2} (u(x_i, y_{j-1}) - 2u(x_i, y_j) + \\ &\quad u(x_i, y_{j+1})) - \frac{h_2^2}{12} \frac{\partial^4 u(x, y)}{\partial y^4} = \\ &\quad \delta_y^2 u_{ij} - \frac{h_2^2}{12} \frac{\partial^4 u(x_i, \eta_{ij}^2)}{\partial y^4}, \quad y_{j-1} < \eta_{ij}^2 < y_{j+1} \circ\end{aligned}$$

将以上4式代入式(2)和式(3), 舍去小量项

$$(R_1)_{ij} = \frac{h_1^2}{12} \frac{\partial^4 v(\xi_{ij}^1, y_j)}{\partial x^4} + \frac{h_2^2}{12} \frac{\partial^4 v(x_i, \eta_{ij}^1)}{\partial y^4}, \quad (4)$$

$$(R_2)_{ij} = \frac{h_1^2}{12} \frac{\partial^4 u(\xi_{ij}^2, y_j)}{\partial x^4} + \frac{h_2^2}{12} \frac{\partial^4 u(x_i, \eta_{ij}^2)}{\partial y^4}, \quad (5)$$

得到如下差分格式:

$$\begin{cases} \Delta_h v_{ij} = f_{ij}, & (i, j) \in \omega; \\ v_{ij} = \psi_{ij}, & (i, j) \in \gamma \circ \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} \Delta_h u_{ij} = v_{ij}, & (i, j) \in \omega; \\ u_{ij} = \varphi_{ij}, & (i, j) \in \gamma \circ \end{cases} \quad (7)$$

式中 $f_{ij} = f(x_i, y_j)$; $\varphi_{ij} = \varphi(x_i, y_j)$; $\psi_{ij} = \psi(x_i, y_j)$ 。

$$\text{记 } M_1 = \max \left\{ \max_{(x, y) \in \Omega} \left| \frac{\partial^4 v(x, y)}{\partial x^4} \right|, \max_{(x, y) \in \Omega} \left| \frac{\partial^4 v(x, y)}{\partial y^4} \right| \right\}, \quad (8)$$

则有

$$|(R_1)_{ij}| \leq \frac{M_1}{12} (h_1^2 + h_2^2) \circ \quad (9)$$

2.2 差分格式解的存在唯一性

定理1 差分格式(6)(7)存在唯一解。

证明 差分格式(6)是线性的, 考虑齐次方程组

$$\begin{cases} \Delta_h v_{ij} = 0, & (i, j) \in \omega; \\ v_{ij} = 0, & (i, j) \in \gamma \circ \end{cases} \quad (10a)$$

$$(10b)$$

设 $\|v\|_\infty = M > 0$, 则由式(10b)知, 存在 $(i_0, j_0) \in \omega$ 使得 $|v_{i_0, j_0}| = M$, 且 $|v_{i_0-1, j_0}|$, $|v_{i_0+1, j_0}|$, $|v_{i_0, j_0-1}|$, $|v_{i_0, j_0+1}|$ 中至少有一个严格小于 M 。考虑式(10a)中 $(i, j) = (i_0, j_0)$ 的等式, 有

$$\left(\frac{2}{h_1^2} + \frac{2}{h_2^2} \right) v_{i_0, j_0} = \frac{1}{h_1^2} (v_{i_0-1, j_0} + v_{i_0+1, j_0}) + \frac{1}{h_2^2} (v_{i_0, j_0-1} + v_{i_0, j_0+1}) \circ$$

将上式两边取绝对值, 可得

$$\begin{aligned}\left(\frac{2}{h_1^2} + \frac{2}{h_2^2} \right) M &\leq \frac{1}{h_1^2} (v_{i_0-1, j_0} + v_{i_0+1, j_0}) + \frac{1}{h_2^2} (v_{i_0, j_0-1} + v_{i_0, j_0+1}) < \\ &\quad \left(\frac{2}{h_1^2} + \frac{2}{h_2^2} \right) M \circ\end{aligned}$$

与假设 $M > 0$ 矛盾。故 $M = 0$ 。因而式(7)是唯一可解的。即式(6)中 v_{ij} 是唯一可解的, 再将 v_{ij} 代入式(7), 考察如下齐次方程组

$$\begin{cases} \Delta_h u_{ij} = 0, & (i, j) \in \omega; \\ u_{ij} = 0, & (i, j) \in \gamma \circ \end{cases} \quad (11)$$

类似可证式(11)也是唯一可解的, 即式(7)存在唯一解 u_{ij} 。

定理证毕。

2.3 差分格式解的稳定性

引理1^[11] 记

$$(L_h v)_{ij} = \delta_x^2 v_{ij} + \delta_y^2 v_{ij}, \quad (i, j) \in \omega \circ$$

设 $v = \{v_{ij} | (i, j) \in \bar{\omega}\}$ 为 Ω_h 上的网格函数, 如果

$$(L_h v)_{ij} \leq 0, \quad (i, j) \in \omega \circ$$

则有

$$\max_{(i, j) \in \omega} v_{ij} \leq \max_{(i, j) \in \gamma} v_{ij},$$

定理2 设 $u = \{u_{ij} | (i, j) \in \bar{\omega}\}$ 为差分格式(7)的解, 则有

$$\begin{aligned}\max_{(i, j) \in \omega} |u_{ij}| &\leq \max_{(i, j) \in \gamma} |\varphi_{ij}| + \frac{1}{16} (L_1^2 + L_2^2) \max_{(i, j) \in \gamma} |\psi_{ij}| + \\ &\quad \frac{1}{256} (L_1^2 + L_2^2)^2 \max_{(i, j) \in \omega} |f_{ij}| \circ\end{aligned}$$

证明 设 $v = \{v_{ij} | (i, j) \in \bar{\omega}\}$ 为差分方程组(6)的解, 记

$$C = \max_{(i, j) \in \omega} |f_{ij}| P(x, y) = x(L_1 - x) + y(L_2 - y),$$

并定义 Ω_h 上的网格函数

$$\omega_{ij} = \frac{1}{4} CP(x_i, y_j), \quad (i, j) \in \bar{\omega};$$

$$(L_h \omega)_{ij} = C, \quad (i, j) \in \omega \circ$$

因而

$$L_h(\pm v - w)_{ij} = \pm (L_h v)_{ij} - (L_h w)_{ij} = \pm f_{ij} - C \leq 0, \quad (i, j) \in \omega \circ$$

由引理1, 知

$$\max_{(i, j) \in \omega} (\pm v - w)_{ij} \leq \max_{(i, j) \in \gamma} (\pm v - w)_{ij} \leq \max_{(i, j) \in \gamma} |\pm v_{ij}| +$$

$$\max_{(i, j) \in \gamma} (-w)_{ij} \leq \max_{(i, j) \in \gamma} |v_{ij}|,$$

于是

$$\max_{(i, j) \in \omega} (\pm v)_{ij} = \max_{(i, j) \in \omega} (\pm v - w + w)_{ij} \leq \max_{(i, j) \in \omega} (\pm v - w)_{ij} +$$

$$\max_{(i, j) \in \omega} w_{ij} \leq \max_{(i, j) \in \gamma} |v_{ij}| + \max_{(i, j) \in \omega} w_{ij} \leq$$

$$\max_{(i, j) \in \gamma} |\psi_{ij}| + \frac{1}{16} (L_1^2 + L_2^2) \max_{(i, j) \in \omega} |f_{ij}|,$$

故有

$$\max_{(i, j) \in \omega} |v_{ij}| \leq \max_{(i, j) \in \gamma} |\psi_{ij}| + \frac{1}{16} (L_1^2 + L_2^2) \max_{(i, j) \in \omega} |f_{ij}|,$$

同理可得

$$\max_{(i, j) \in \omega} |u_{ij}| \leq \max_{(i, j) \in \gamma} |\varphi_{ij}| + \frac{1}{16} (L_1^2 + L_2^2) \max_{(i, j) \in \omega} |v_{ij}| \circ$$

故有

$$\begin{aligned} \max_{(i,j) \in \omega} |u_{ij}| &\leq \max_{(i,j) \in \gamma} |\varphi_{ij}| + \frac{1}{16} (L_1^2 + L_2^2) \max_{(i,j) \in \omega} |v_{ij}| \leq \\ &\max_{(i,j) \in \gamma} |\varphi_{ij}| + \frac{1}{16} (L_1^2 + L_2^2) \left[\max_{(i,j) \in \gamma} |\psi_{ij}| + \frac{1}{16} (L_1^2 + L_2^2) \max_{(i,j) \in \omega} |f_{ij}| \right] \leq \\ &\max_{(i,j) \in \gamma} |\varphi_{ij}| + \frac{1}{16} (L_1^2 + L_2^2) \max_{(i,j) \in \gamma} |\psi_{ij}| + \frac{1}{256} (L_1^2 + L_2^2)^2 \max_{(i,j) \in \omega} |f_{ij}|. \end{aligned}$$

定理证毕。

定理2说明,若在应用差分格式(6)(7)时,计算右端函数 $f(x_i, y_j)$ 有误差 f_{ij} ,计算边界值有误差 φ_{ij} 和 ψ_{ij} ,当 $\max_{(i,j) \in \gamma} |\varphi_{ij}|$ 和 $\max_{(i,j) \in \gamma} |\psi_{ij}|$,还有 $\max_{(i,j) \in \omega} |f_{ij}|$ 小量时, $\max_{(i,j) \in \omega} |u_{ij}|$ 也为小量,也就是说,差分格式关于边界值和右端函数是稳定的。

2.4 差分格式解的收敛性

定理3 差分格式(6)(7)的解在无穷范数下是二阶收敛的。

记

$$\begin{aligned} e_{ij}^1 &= v(x_i, y_j) - v_{ij}, (i, j) \in \bar{\omega}, \\ e_{ij}^2 &= u(x_i, y_j) - u_{ij}, (i, j) \in \bar{\omega}. \end{aligned}$$

误差方程组为

$$\begin{cases} \Delta_h e_{ij}^1 = (R_1)_{ij}, & (i, j) \in \omega; \\ e_{ij}^1 = 0, & (i, j) \in \gamma. \end{cases} \quad (12)$$

$$\begin{cases} \Delta_h e_{ij}^2 = (R_2)_{ij}, & (i, j) \in \omega; \\ e_{ij}^2 = 0, & (i, j) \in \gamma. \end{cases} \quad (13)$$

式(12)(13)中 $(R_1)_{ij}$ 由式(4)定义; $(R_2)_{ij}$ 由式(5)定义。

由式(9)可知,有

$$|(R_1)_{ij}| \leq \frac{M_1}{12} (h_1^2 + h_2^2).$$

应用定理2,有

$$\begin{aligned} \max_{(i,j) \in \omega} |e_{ij}^2| &\leq \frac{1}{256} (L_1^2 + L_2^2)^2 \max_{(i,j) \in \omega} |(R_1)_{ij}| \leq \\ &\frac{M_1}{3072} (L_1^2 + L_2^2)^2 (h_1^2 + h_2^2). \end{aligned}$$

所以差分格式(6)(7)在无穷范数下是二阶收敛的。

2.5 差分格式的解

差分格式是以 $\{u_{ij} | 1 \leq i \leq m_1 - 1, 1 \leq j \leq m_2 - 1\}$, $\{v_{ij} | 1 \leq i \leq m_1 - 1, 1 \leq j \leq m_2 - 1\}$ 为未知量的线性方程组。可以先求解式(6)得到 v_{ij} ,再将 v_{ij} 代入式(7)求解得到 u_{ij} 。

可将式(6)和式(7)改写为

$$\begin{aligned} -\frac{1}{h_2^2} v_{i,j-1} - \frac{1}{h_1^2} v_{i-1,j} + 2 \left(\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2} \right) v_{i,j} - \frac{1}{h_1^2} v_{i+1,j} - \frac{1}{h_2^2} v_{i,j+1} = \\ f_{i,j} - \frac{1}{h_2^2} u_{i,j-1} - \frac{1}{h_1^2} u_{i-1,j} + 2 \left(\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2} \right) u_{i,j} - \\ \frac{1}{h_1^2} u_{i+1,j} - \frac{1}{h_2^2} u_{i,j+1} = v_{i,j}. \end{aligned}$$

对其使用 Gauss-Seidel 迭代,得到如下迭代式:

$$\begin{aligned} v_{i,j}^{k+1} &= \left[f(x_i, y_j) + \frac{1}{h_2^2} v_{i,j-1}^{k+1} + \frac{1}{h_1^2} v_{i-1,j}^{k+1} + \frac{1}{h_1^2} v_{i+1,j}^k + \frac{1}{h_2^2} v_{i,j+1}^k \right] / \\ &2 \left(\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2} \right), \\ u_{i,j}^{k+1} &= \left[v(x_i, y_j) + \frac{1}{h_2^2} u_{i,j-1}^{k+1} + \frac{1}{h_1^2} u_{i-1,j}^{k+1} + \frac{1}{h_1^2} u_{i+1,j}^k + \frac{1}{h_2^2} u_{i,j+1}^k \right] / \\ &2 \left(\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2} \right). \end{aligned}$$

通过 Gauss-Seidel 迭代可以得到该差分格式的解。

2.6 Richardson 一次外推四阶格式

记差分格式(7)的解为 $u_{ij}(h_1, h_2)$ 。

定理4 设定解问题

$$\begin{cases} \Delta \mu = -\frac{1}{12} \frac{\partial^4 u(x, y)}{\partial x^4}, & (x, y) \in \Omega; \\ \mu = 0, & (x, y) \in \Gamma \end{cases} \quad (14)$$

和

$$\begin{cases} \Delta \omega = -\frac{1}{12} \frac{\partial^4 u(x, y)}{\partial y^4}, & (x, y) \in \Omega; \\ \omega = 0, & (x, y) \in \Gamma \end{cases} \quad (15)$$

存在光滑解,则有

$$\max \left| u(x_i, y_j) - \left[\frac{4}{3} u_{2i, 2j} \left(\frac{h_1}{2}, \frac{h_2}{2} \right) - \frac{1}{3} u_{i,j}(h_1, h_2) \right] \right| = O(h_1^4 + h_2^4).$$

证明 式(7)可以写为

$$\begin{cases} \Delta_h u_{ij} = v_{ij} + \frac{h_1^2}{12} \frac{\partial^4 u(x_i, y_j)}{\partial x^4} + \frac{h_2^2}{12} \frac{\partial^4 u(x_i, y_j)}{\partial y^4} + \frac{h_1^4}{360} \cdot \\ \frac{\partial^6 u(\bar{\xi}_{ij}, y_j)}{\partial x^6} + \frac{h_2^4}{360} \frac{\partial^6 u(x_i, \bar{\eta}_{ij})}{\partial y^6}, & (i, j) \in \omega; \\ u(x_i, y_j) = \varphi(x_i, y_j), & (i, j) \in \gamma. \end{cases}$$

式中: $\bar{\xi}_{ij} \in (x_{i-1}, x_{i+1})$; $\bar{\eta}_{ij} \in (y_{i-1}, y_{i+1})$ 。

误差方程组可写为

$$\begin{cases} \Delta_h e_{ij} = v_{ij} + \frac{h_1^2}{12} \frac{\partial^4 u(x_i, y_j)}{\partial x^4} + \frac{h_2^2}{12} \frac{\partial^4 u(x_i, y_j)}{\partial y^4} + \\ \frac{h_1^4}{360} \frac{\partial^6 u(\bar{\xi}_{ij}, y_j)}{\partial x^6} + \frac{h_2^4}{360} \frac{\partial^6 u(x_i, \bar{\eta}_{ij})}{\partial y^6}, & (i, j) \in \omega; \\ e_{ij} = 0, & (i, j) \in \gamma. \end{cases} \quad (16)$$

将式 (14) 和 (15) 分别离散化, 可得

$$\begin{cases} \Delta\mu_{ij} = -\frac{1}{12} \frac{\partial^4 \mu(x, y)}{\partial x^4} + \frac{h_1^2}{12} \frac{\partial^4 \mu(x_{ij}^{(1)}, y_j)}{\partial x^4} + \\ \frac{h_2^2}{12} \frac{\partial^4 \mu(x_i, y_{ij}^{(1)})}{\partial y^4}, \quad (i, j) \in \omega; \\ \mu_{ij} = 0, \quad (i, j) \in \gamma. \end{cases} \quad (17)$$

$$\begin{cases} \Delta\omega_{ij} = -\frac{1}{12} \frac{\partial^4 \omega(x, y)}{\partial x^4} + \frac{h_1^2}{12} \frac{\partial^4 \omega(x_{ij}^{(2)}, y_j)}{\partial x^4} + \\ \frac{h_2^2}{12} \frac{\partial^4 \omega(x_i, y_{ij}^{(2)})}{\partial y^4}, \quad (i, j) \in \omega, \\ \omega_{ij} = 0, \quad (i, j) \in \gamma. \end{cases} \quad (18)$$

式中: $x_{ij}^{(1)}, x_{ij}^{(2)} \in (x_{i-1}, x_{i+1})$; $y_{ij}^{(1)}, y_{ij}^{(2)} \in (y_{i-1}, y_{i+1})$.

记

$$r_{ij} = e_{ij} + h_1^2 \mu_{ij} + h_2^2 \omega_{ij},$$

将式 (17) 两边同乘 h_1^2 , 将式 (18) 两边同乘 h_2^2 , 并将所得结果和式 (16) 相加, 得到

$$\begin{cases} \Delta_h r_{ij} = \frac{h_1^4}{360} \frac{\partial^6 u(\bar{\xi}_{ij}, y_j)}{\partial x^6} + \frac{h_2^4}{360} \frac{\partial^6 u(x_i, \bar{\eta}_{ij})}{\partial y^6} + \\ h_1^2 \left[\frac{h_1^2}{12} \frac{\partial^4 \mu(x_{ij}^{(1)}, y_j)}{\partial x^4} + \frac{h_2^2}{12} \frac{\partial^4 \mu(x_i, y_{ij}^{(1)})}{\partial y^4} \right] + \\ h_2^2 \left[\frac{h_1^2}{12} \frac{\partial^4 \omega(x_{ij}^{(2)}, y_j)}{\partial x^4} + \frac{h_2^2}{12} \frac{\partial^4 \omega(x_i, y_{ij}^{(2)})}{\partial y^4} \right], \quad (i, j) \in \omega; \\ r_{ij} = 0, \quad (i, j) \in \gamma. \end{cases}$$

由定理 2, 有

$$r_{ij} = O(h_1^4 + h_2^4), \quad (i, j) \in \omega.$$

即

$$u_{ij}(h_1, h_2) = u(x_i, y_j) + h_1^2 \mu(x_i, y_j) + h_2^2 \omega(x_i, y_j) + O(h_1^4 + h_2^4), \quad (i, j) \in \omega. \quad (19)$$

同理, 可得

$$u_{2i, 2j}\left(\frac{h_1}{2}, \frac{h_2}{2}\right) = u(x_i, y_j) + \left(\frac{h_1}{2}\right)^2 \mu(x_i, y_j) + \left(\frac{h_2}{2}\right)^2 \omega(x_i, y_j) + O\left(\left(\frac{h_1}{2}\right)^4 + \left(\frac{h_2}{2}\right)^4\right), \quad (i, j) \in \omega. \quad (20)$$

将式 (20) 两边同乘 4/3, 将式 (19) 两边同乘 1/3, 并将所得结果相减, 得

$$\frac{4}{3} u_{2i, 2j}\left(\frac{h_1}{2}, \frac{h_2}{2}\right) - \frac{1}{3} u_{i, j}(h_1, h_2) = u(x_i, y_j) + O(h_1^4 + h_2^4), \quad (i, j) \in \omega.$$

定理证毕。

2.7 Richardson 二次外推六阶格式

根据 Richardson 外推算法, 可以得到二次外推公式为

$$\frac{64}{45} u_{4i, 4j}\left(\frac{h_1}{4}, \frac{h_2}{4}\right) - \frac{4}{9} u_{2i, 2j}\left(\frac{h_1}{2}, \frac{h_2}{2}\right) + \frac{1}{45} u_{i, j}(h_1, h_2) = u(x_i, y_j) + O(h_1^6 + h_2^6).$$

定理 2.5 设定解问题

$$\begin{cases} \Delta\rho = -\frac{1}{12} \frac{\partial^4 u(x, y)}{\partial x^4} - \frac{h_1^2}{360} \frac{\partial^6 u(x, y)}{\partial x^6}, \quad (x, y) \in \Omega; \\ \rho = 0, \quad (x, y) \in \Gamma; \end{cases} \quad (21)$$

$$\begin{cases} \Delta\sigma = -\frac{1}{12} \frac{\partial^4 u(x, y)}{\partial y^4} - \frac{h_2^2}{360} \frac{\partial^6 u(x, y)}{\partial y^6}, \quad (x, y) \in \Omega; \\ \sigma = 0, \quad (x, y) \in \Gamma; \end{cases} \quad (22)$$

存在光滑解, 则有

$$\max \left| u(x_i, y_j) - \left[\frac{64}{45} u_{4i, 4j}\left(\frac{h_1}{4}, \frac{h_2}{4}\right) - \frac{4}{9} u_{2i, 2j}\left(\frac{h_1}{2}, \frac{h_2}{2}\right) + \frac{1}{45} u_{i, j}(h_1, h_2) \right] \right| = O(h_1^6 + h_2^6).$$

证明 式 (7) 可以写为

$$\begin{cases} \Delta_h u_{ij} = v_{ij} + \frac{h_1^2}{12} \frac{\partial^4 u(x_i, y_j)}{\partial x^4} + \frac{h_2^2}{12} \frac{\partial^4 u(x_i, y_j)}{\partial y^4} + \\ \frac{h_1^4}{360} \frac{\partial^6 u(x_i, y_j)}{\partial x^6} + \frac{h_2^4}{360} \frac{\partial^6 u(x_i, y_j)}{\partial y^6} + \\ \frac{h_1^6}{20 \cdot 160} \frac{\partial^8 u(\bar{\xi}_{ij}, y_j)}{\partial x^8} + \frac{h_2^6}{20 \cdot 160} \frac{\partial^8 u(x_i, \bar{\eta}_{ij})}{\partial y^8}, \quad (i, j) \in \omega; \\ u(x_i, y_j) = \varphi(x_i, y_j), \quad (i, j) \in \gamma. \end{cases}$$

式中 $\bar{\xi}_{ij} \in (x_{i-1}, x_{i+1})$, $\bar{\eta}_{ij} \in (y_{i-1}, y_{i+1})$, 误差方程组可写为

$$\begin{cases} \Delta_h e_{ij} = v_{ij} + \frac{h_1^2}{12} \frac{\partial^4 u(x_i, y_j)}{\partial x^4} + \frac{h_2^2}{12} \frac{\partial^4 u(x_i, y_j)}{\partial y^4} + \\ \frac{h_1^4}{360} \frac{\partial^6 u(x_i, y_j)}{\partial x^6} + \frac{h_2^4}{360} \frac{\partial^6 u(x_i, y_j)}{\partial y^6} + \\ \frac{h_1^6}{20 \cdot 160} \frac{\partial^8 u(\bar{\xi}_{ij}, y_j)}{\partial x^8} + \frac{h_2^6}{20 \cdot 160} \frac{\partial^8 u(x_i, \bar{\eta}_{ij})}{\partial y^8}, \quad (i, j) \in \omega; \\ e_{ij} = 0, \quad (i, j) \in \gamma. \end{cases} \quad (23)$$

将式 (21) 和式 (22) 分别离散化, 可得

$$\begin{cases} \Delta\rho_{ij} = -\frac{1}{12} \frac{\partial^4 u(x, y)}{\partial x^4} - \frac{h_1^2}{360} \frac{\partial^6 u(x, y)}{\partial x^6} + \\ \frac{h_1^2}{12} \frac{\partial^4 \rho(x_{ij}^{(1)}, y_j)}{\partial x^4} + \frac{h_1^4}{360} \frac{\partial^6 \rho(x_{ij}^{(1)}, y_j)}{\partial x^6} + \\ \frac{h_2^2}{12} \frac{\partial^4 \rho(x_i, y_{ij}^{(1)})}{\partial y^4} + \frac{h_2^4}{360} \frac{\partial^6 \rho(x_i, y_{ij}^{(1)})}{\partial y^6}, \quad (i, j) \in \omega; \\ \rho_{ij} = 0, \quad (i, j) \in \gamma. \end{cases} \quad (24)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \Delta \sigma_{ij} &= -\frac{1}{12} \frac{\partial^4 u(x, y)}{\partial y^4} - \frac{h_1^2}{360} \frac{\partial^6 u(x, y)}{\partial y^6} + \\ &\quad \frac{h_1^2}{12} \frac{\partial^4 \sigma(x_{ij}^{(2)}, y_j)}{\partial x^4} + \frac{h_1^4}{360} \frac{\partial^6 \sigma(x_{ij}^{(2)}, y_j)}{\partial x^6} + \\ &\quad \frac{h_2^2}{12} \frac{\partial^4 \sigma(x_i, y_{ij}^{(2)})}{\partial y^4} + \frac{h_2^4}{360} \frac{\partial^6 \sigma(x_i, y_{ij}^{(2)})}{\partial y^6}, (i, j) \in \omega; \\ \rho_{ij} &= 0, (i, j) \in \gamma. \end{aligned} \right. \quad (25)$$

式(24)(25)中: $x_{ij}^{(1)}, x_{ij}^{(2)} \in (x_{i-1}, x_{i+1}); y_{ij}^{(1)}, y_{ij}^{(2)} \in (y_{j-1}, y_{j+1})$ 。

记 $r_{ij} = e_{ij} + h_1^2 \rho_{ij} + h_2^2 \sigma_{ij}$,

将式(24)两边同乘 h_1^2 , 将式(25)两边同乘 h_2^2 , 并将所得结果和式(23)相加, 得到

$$\left\{ \begin{aligned} \Delta_h r_{ij} &= \frac{h_1^6}{20 \cdot 160} \frac{\partial^8 u(\bar{x}_{ij}, y_j)}{\partial x^8} + \frac{h_2^6}{20 \cdot 160} \frac{\partial^8 u(x_i, \bar{y}_{ij})}{\partial y^8} + \\ &\quad h_1^2 \left[\frac{h_1^2}{12} \frac{\partial^4 \rho(x_{ij}^{(1)}, y_j)}{\partial x^4} + \frac{h_1^4}{360} \frac{\partial^6 \rho(x_{ij}^{(1)}, y_j)}{\partial x^6} + \right. \\ &\quad \left. \frac{h_2^2}{12} \frac{\partial^4 \rho(x_i, y_{ij}^{(1)})}{\partial y^4} + \frac{h_2^4}{360} \frac{\partial^6 \rho(x_i, y_{ij}^{(1)})}{\partial y^6} \right] + \\ &\quad h_2^2 \left[\frac{h_1^2}{12} \frac{\partial^4 \sigma(x_{ij}^{(2)}, y_j)}{\partial x^4} + \frac{h_1^4}{360} \frac{\partial^6 \sigma(x_{ij}^{(2)}, y_j)}{\partial x^6} + \right. \\ &\quad \left. \frac{h_2^2}{12} \frac{\partial^4 \sigma(x_i, y_{ij}^{(2)})}{\partial y^4} + \frac{h_2^4}{360} \frac{\partial^6 \sigma(x_i, y_{ij}^{(2)})}{\partial y^6} \right], \\ &\quad (i, j) \in \omega, \\ r_{ij} &= 0, (i, j) \in \gamma. \end{aligned} \right.$$

由定理2, 有 $r_{ij} = O(h_1^6 + h_2^6)$, $(i, j) \in \omega$ 。

即

$$u_{ij}(h_1, h_2) = u(x_i, y_j) + h_1^2 \rho(x_i, y_j) + h_2^2 \sigma(x_i, y_j) + O(h_1^6 + h_2^6), (i, j) \in \omega. \quad (26)$$

同理, 可得

$$u_{2i, 2j}\left(\frac{h_1}{2}, \frac{h_2}{2}\right) = u(x_i, y_j) + \left(\frac{h_1}{2}\right)^2 \rho(x_i, y_j) + \left(\frac{h_2}{2}\right)^2 \sigma(x_i, y_j) + O\left(\left(\frac{h_1}{2}\right)^6 + \left(\frac{h_2}{2}\right)^6\right), (i, j) \in \omega. \quad (27)$$

$$u_{4i, 4j}\left(\frac{h_1}{4}, \frac{h_2}{4}\right) = u(x_i, y_j) + \left(\frac{h_1}{4}\right)^2 \rho(x_i, y_j) + \left(\frac{h_2}{4}\right)^2 \sigma(x_i, y_j) + O\left(\left(\frac{h_1}{4}\right)^6 + \left(\frac{h_2}{4}\right)^6\right), (i, j) \in \omega. \quad (28)$$

将式(28)两边同乘 $64/45$, 将式(26)两边同乘 $1/45$, 并将所得结果相加, 减去式(27)两边同乘 $4/9$, 得

$$\frac{64}{45} u_{4i, 4j}\left(\frac{h_1}{4}, \frac{h_2}{4}\right) - \frac{4}{9} u_{2i, 2j}\left(\frac{h_1}{2}, \frac{h_2}{2}\right) + \frac{1}{45} u_{ij}(h_1, h_2) = u(x_i, y_j) + O(h_1^6 + h_2^6), (i, j) \in \omega.$$

定理证毕。

3 数值算例

本节将给出数值算例, 用以验证本文建立的求解双调和和边值问题的差分格式的有效性, 并给出在该差分格式下做一次外推和二次外推的结果。

3.1 算例1

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} &= (\pi^4 - \pi^2 + 1) e^x \sin(\pi y), \\ 0 &< x < 2, 0 < y < 1; \\ u(0, y) &= \sin(\pi y), u(2, y) = e^2 \sin(\pi y), 0 \leq y \leq 1; \\ u(x, 0) &= 0, u(x, 1) = 0, 0 \leq x \leq 2; \\ \Delta u(0, y) &= (-\pi^2 + 1) \sin(\pi y), \Delta u(2, y) = \\ &\quad (-\pi^2 + 1) e^2 \sin(\pi y), 0 \leq y \leq 1; \\ \Delta u(x, 0) &= 0, \Delta u(x, 1) = 0, 0 \leq x \leq 2. \end{aligned} \right.$$

该问题的精确解为 $u(x, y) = e^x \sin(\pi y)$ 。

表1给出了取不同步长时所得数值解的最大误差和误差阶。

表1 算例1取不同步长时的最大误差和误差阶

Table 1 Maximum errors and error order of example 1 with different step sizes taken

(h_1, h_2)	$E(h_1, h_2)$	$\log_2 \left(\frac{E(2h_1, 2h_2)}{E(h_1, h_2)} \right)$
(1/8, 1/8)	7.069e-02	*
(1/16, 1/16)	1.761e-02	2.004 9
(1/32, 1/32)	4.399e-03	2.001 2
(1/64, 1/64)	1.100e-04	2.000 2

由表1可以看出, 随着剖分加密, 数值解的最大误差越来越小, 通过误差比可以看出, 该差分格式具有2阶精度。

图1给出了当 $M=16$ 、 $N=8$ 时的数值解和精确解曲面, 图2给出了不同步长时数值解的误差曲面。

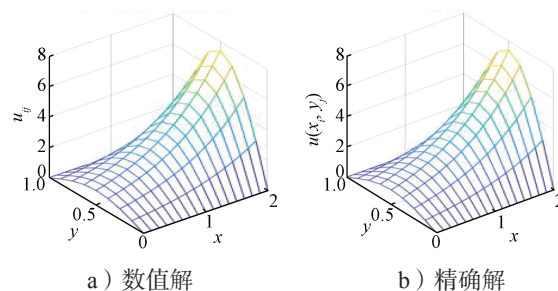


图1 算例1在 $M=16$ 、 $N=8$ 时的数值解和精确解对比图
Fig. 1 Comparison of numerical and exact solutions for Example 1 at $M=16$ and $N=8$

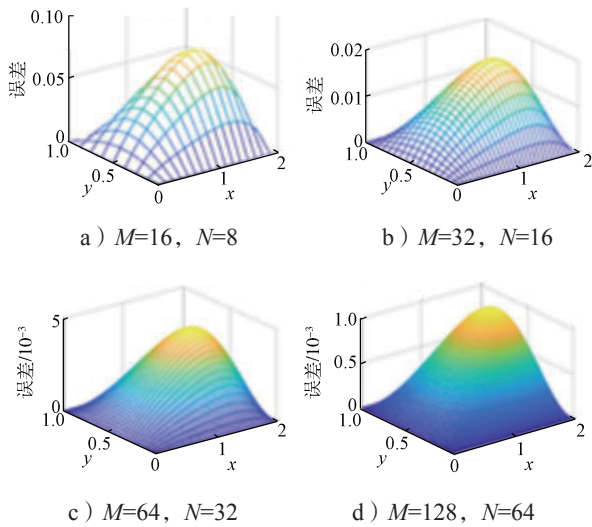


图2 算例1取不同步长时误差曲面

Fig. 2 Error surface of example 1 with different step sizes taken

表2给出了利用Richardson外推算法得出的数值解最大误差和误差阶。

表2 算例1取不同步长时一次外推的最大误差和误差阶
Table 2 Maximum error and error order of an extrapolation of example 1 with different step sizes taken

(h_1, h_2)	$E(h_1, h_2)$	$\log_2 \left(\frac{E(2h_1, 2h_2)}{E(h_1, h_2)} \right)$
(1/8, 1/8)	1.112e-04	*
(1/16, 1/16)	6.906e-06	4.009 7
(1/32, 1/32)	4.312e-07	4.001 3
(1/64, 1/64)	2.696e-08	3.999 5

对比表1和表2,可以看出利用Richardson外推算法可以有效提高精度,由原差分格式的2阶精度提高到4阶精度。

表3给出了利用Richardson外推算法做二次外推得到的数值解与精确解的最大误差和误差阶。

表3 算例1取不同步长时二次外推的最大误差和误差阶
Table 3 Maximum error and error order of quadratic extrapolation of example 1 with different step sizes taken

(h_1, h_2)	$E(h_1, h_2)$	$\log_2 \left(\frac{E(2h_1, 2h_2)}{E(h_1, h_2)} \right)$
(1/8, 1/8)	6.738 9e-08	*
(1/16, 1/16)	1.052 1e-09	6.001 2
(1/64, 1/64)	9.696 7e-12	6.000 5

由表3可知,做了二次外推后,精度再次提高两阶,由一次外推后的4阶精度提高到6阶精度。

3.2 算例2

$$\begin{cases} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 4e^{-(x+y)}, & 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1; \\ u(0, y) = e^{-y}, \quad u(2, y) = e^{-(1+y)}, & 0 \leq y \leq 1; \\ u(x, 0) = e^{-x}, \quad u(x, 1) = e^{-(1+x)}, & 0 \leq x \leq 1; \\ \Delta u(0, y) = 2e^{-y}, \quad \Delta u(2, y) = 2e^{-(1+y)}, & 0 \leq y \leq 1; \\ \Delta u(x, 0) = 2e^{-x}, \quad \Delta u(x, 1) = 2e^{-(1+x)}, & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

该问题的精确解为 $u(x, y) = e^{-(x+y)}$ 。

表4给出了取不同步长时所得数值解的最大误差和误差阶,表5给出了利用Richardson外推算法得出的数值解最大误差和误差阶。

表4 算例2取不同步长时的最大误差和误差阶

Table 4 Maximum errors and error order of example 2 with different step sizes taken

(h_1, h_2)	$E(h_1, h_2)$	$\log_2 \left(\frac{E(2h_1, 2h_2)}{E(h_1, h_2)} \right)$
(1/8, 1/8)	6.619e-05	*
(1/16, 1/16)	1.692e-05	1.967 8
(1/32, 1/32)	4.251e-06	1.933 0
(1/64, 1/64)	1.064e-06	1.997 9

表5 算例2取不同步长时一次外推的最大误差和误差阶

Table 5 Maximum error and error order of an extrapolation of example 2 with different step sizes taken

(h_1, h_2)	$E(h_1, h_2)$	$\log_2 \left(\frac{E(2h_1, 2h_2)}{E(h_1, h_2)} \right)$
(1/8, 1/8)	2.748e-07	*
(1/16, 1/16)	1.771e-08	3.956 0
(1/32, 1/32)	1.111e-09	3.994 7

对比表4和表5,可以看出一次外推之后精度得到有效提高。

表6给出了利用Richardson外推算法做二次外推得到的最大误差和误差阶。

表6 算例2取不同步长时二次外推的最大误差和误差阶

Table 6 Maximum error and error order of quadratic extrapolation of example 2 with different step sizes taken

(h_1, h_2)	$E(h_1, h_2)$	$\log_2 \left(\frac{E(2h_1, 2h_2)}{E(h_1, h_2)} \right)$
(1/8, 1/8)	1.891 4e-09	*
(1/16, 1/16)	1.172 8e-10	4.014 3
(1/32, 1/32)	7.311 7e-12	4.003 6

由表6发现,二次外推后得到的最大误差阶并没有如预期所想提高2阶。因此,做出二次外推后误差曲面,观察其各个结点处的误差情况。

图3为算例2取不同步长时二次外推的误差曲面,由图3可以看出,误差在4个角处明显增大,即最大误差在不同角点处取得。因此,分析内结点处的二次外推的误差和收敛阶,如表7和8所示。

由表7和8可以看出,当步长为1/16时,在内结点处,收敛阶都是接近6阶的,基本符合预期,所以,若用对应相同结点处误差来计算收敛阶,那么结果是符合理论精度的。当步长为1/32时,可以看出,随着外推算法用到的不同步长的数值解的个数越来越多,精度要求越来越高,其本身计算结果产生的舍入误差在经过线性叠加后越来越大,其收敛率很难达到理论精度。

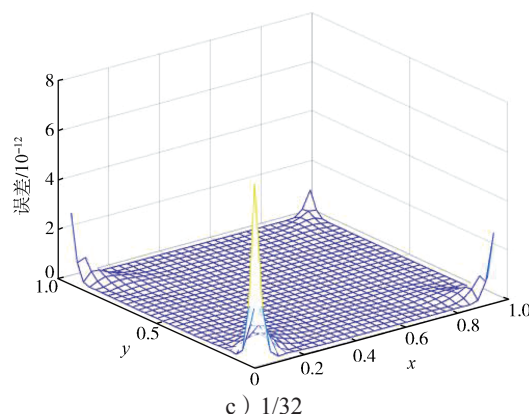
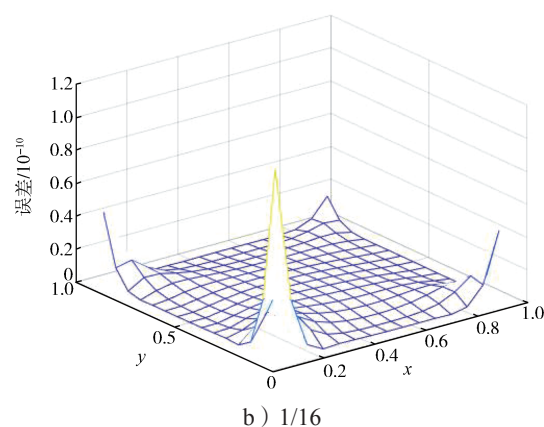
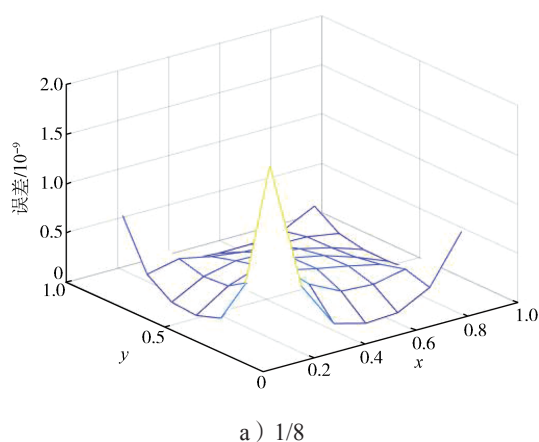


图3 算例2取不同步长时二次外推的误差曲面

Fig. 3 Quadratic extrapolation error surface with different step sizes taken

表7 算例2取不同步长部分结点处的误差与收敛阶

Table 7 Error at the partial nodes and the convergence order of example 2 with different step sizes taken

(h_1, h_2)	(1/4, 1/8)		(1/4, 1/4)		(1/4, 3/8)		(1/4, 1/2)	
	误差	收敛率	误差	收敛率	误差	收敛率	误差	收敛率
(1/8, 1/8)	5.784e-10	*	6.842e-10	*	4.013e-10	*	2.421e-10	*
(1/16, 1/16)	8.405e-12	5.558 4	1.191e-11	6.104 8	6.344e-12	5.983 2	3.610e-12	6.067 3
(1/32, 1/32)	7.827e-14	6.746 6	1.237e-13	6.576 9	2.410e-14	7.988 5	1.488e-14	7.922 7

表8 算例2步长为1/16时部分结点处的收敛阶

Table 8 Convergence order at some nodes of example 2 with step size 1/16 taken

x	y			
	1/8	1/4	3/8	1/2
1/8	5.558 3	6.104 8	6.609 6	6.722 0
1/4	6.104 8	5.856 6	5.983 2	6.067 3
3/8	6.608 9	5.983 2	5.946 1	5.969 8
1/2	6.720 3	6.067 3	5.969 8	5.956 6

4 结语

本文研究了一类双调和方程边值问题的四阶和六阶 Richardson 外推格式,首先给出了一个具有2阶精度的差分格式,并证明了其差分格式解的存在唯一性、收敛性和稳定性。接着在此差分格式基础上,

对其建立了一次外推和二次外推格式,理论证明了做二次外推后,数值解具有6阶精度。最后,用该差分格式和其四阶和六阶外推格式计算了两个具体算例,结果表明,做一次外推后的结果是比较理想的,可以有效提高差分格式的精度,但是,在做二次外推的过程中,发现利用最大误差计算得到的误差阶并不能达到理论精度,画出误差曲面图后,发现最大误差在各个角点处取得,这导致采用最大误差计算出的收敛阶并不能达到理论精度,但若考虑内结点处的误差与收敛阶,其误差阶还是可以达到理论精度的。总的来说,外推算法对于提高差分格式解的精度有显著的作用,但不宜多次使用,在精度越来越高、用到的不同步长的数值解越来越多的情况下,计算产生的舍入误差往

往会影响收敛率。

参考文献:

- [1] 陈浩然, 钟金标. 一类带小参数的双调和方程边值问题的可解性 [J]. 安庆师范大学学报 (自然科学版), 2021, 27(3): 14-17.
CHEN Haoran, ZHONG Jinbiao. Solvability of Boundary Value Problems for a Class of Biharmonic Equations with Small Parameters[J]. Journal of Anqing Normal University (Natural Science Edition), 2021, 27(3): 14-17.
- [2] 杨 柳. 不动点定理及其应用 [D]. 武汉: 华中师范大学, 2011.
YANG Liu. Fixed Point Theorem and Its Application[D]. Wuhan: Central China Normal University, 2011.
- [3] 钟金标, 戴习民. 一类双调和方程的可解性 [J]. 合肥工业大学学报 (自然科学版), 2004, 27(5): 548-551.
ZHONG Jinbiao, DAI Ximin. Solvability of a Class of Biharmonic Equation[J]. Journal of Hefei University of Technology (Natural Science), 2004, 27(5): 548-551.
- [4] 徐晶晶, 钟金标, 李小帅, 等. 椭圆型方程 (组) 可解性研究 [J]. 池州学院学报, 2023, 37(3): 8-10.
XU Jingjing, ZHONG Jinbiao, LI Xiaoshuai, et al. Solvability of Boundary Problems of a Class of Polyharmonic Equations[J]. Journal of Chizhou University, 2023, 37(3): 8-10.
- [5] 张术慧. 带约束的双调和方程的 Dirichlet 边值问题 [D]. 福州: 福建师范大学, 2020.
ZHANG Shuhui. Dirichlet Boundary Value Problems for Biharmonic Equations with Constraints[D]. Fuzhou: Fujian Normal University, 2020.
- [6] 王 玲, 刘 强. 双调和方程的 Green 函数解法及基于 Matlab 编程的数值解 [J]. 广东技术师范学院学报, 2006, 27(4): 44-46.
WANG Ling, LIU Qiang. The Solution of Green Functional Method and Numerical Solution on Matlab Programming to Biharmonic Equation[J]. Journal of Guangdong Polytechnic Normal University, 2006, 27(4): 44-46.
- [7] 杨雪花, 刘艳玲, 张海湘. 计算高维带弱奇异核发展型方程的交替方向隐式欧拉方法 [J]. 计算数学, 2023, 45(1): 39-56.
YANG Xuehua, LIU Yanling, ZHANG Haixiang. Alternating Direction Implicit Euler Method for the High-Dimensional Evolution Equations with Weakly Singular Kernel[J]. Mathematica Numerica Sinica, 2023, 45(1): 39-56.
- [8] 杨雪花, 蒋小玄, 刘艳玲, 等. 二维带弱奇异核抛物型积分微分方程的交替方向隐式有限差分格式 [J]. 高等学校计算数学学报, 2022, 44(3): 267-284.
YANG Xuehua, JIANG Xiaoxuan, LIU Yanling, et al. Alternating Direction Implicit Finite Difference Method for Two-Dimensional Parabolic-Type Integro-Differential Equations with a Weakly Singular Kernel[J]. Numerical Mathematics A Journal of Chinese Universities, 2022, 44(3): 267-284.
- [9] YANG X H, WU L J, ZHANG H X. A Space-Time Spectral Order Sinc-Collocation Method for the Fourth-Order Nonlocal Heat Model Arising in Viscoelasticity[J]. Applied Mathematics and Computation, 2023, 457: 128192.
- [10] 田振夫. 一类双调和方程的高精度差分方法 [J]. 齐齐哈尔师范学院学报 (自然科学版), 1996, 16(3): 11-13, 15.
TIAN Zhenfu. High-Order Accuracy Difference Method for a Class of Biharmonic Equation[J]. Journal of Science of Teachers' College and University, 1996, 16(3): 11-13, 15.
- [11] 孙志忠. 偏微分方程数值解法 [M]. 3 版. 北京: 科学出版社, 2022: 48-81.
SUN Zhizhong. Numerical Solution of Partial Differential Equation[M]. 3rd ed. Beijing: Science Press, 2022: 48-81.

(责任编辑: 姜利民)