doi:10.3969/j.issn.1673-9833.2025.01.011

一类变系数椭圆型 Dirichlet 边值问题的差分外推格式

沈 欣，石 扬，杨雪花，张海湘

（湖南工业大学 理学院，湖南 株洲 412007）

摘 要：对于变系数椭圆型偏微分方程的 Dirichlet 边值问题，首先，应用泰勒展开建立五点差分格式，并证明差分格式解的存在唯一性；其次，应用极值原理得到差分格式解的先验估计式，进一步证明其收敛性和稳定性；再次，应用 Richardson 外推法，建立具有四阶精度的外推格式；最后，应用 Gauss-Seidel 迭代方法对算例进行求解，数值结果表明 Richardson 外推法极大地提高了数值解的精度。

关键词：计算数学；变系数；椭圆型偏微分方程；差分格式；Richardson 外推法

中图分类号：O242.2 **文献标志码**：A **文章编号**：1673-9833(2025)01-0079-09

引文格式：沈 欣，石 扬，杨雪花，等 . 一类变系数椭圆型 Dirichlet 边值问题的差分外推格式 [J]. 湖南工业大学学报，2025，39(1)：79-87.

Differential Extrapolation Scheme for a Class of Elliptic Dirichlet Boundary Value Problems with Variable Coefficients

SHEN Xin，SHI Yang，YANG Xuehua，ZHANG Haixiang

（College of Science，Hunan University of Technology，Zhuzhou Hunan 412007，China）

Abstract：In view of the Dirichlet boundary value problem of elliptic partial differential equations with variable coefficients, Taylor expansion is firstly applied for an establishment of a five point difference scheme, thus proving the existence and uniqueness of the difference scheme solution. Secondly, a prior estimation formula for the difference scheme solution can be obtained by applying the extremum principle, with its convergence and stability further proved. Thirdly, Richardson extrapolation method is applied to establish an extrapolation format with fourth-order accuracy. Finally, the Gauss-Seidel iterative method is applied to solve the numerical example, with the numerical results showing that the Richardson extrapolation method greatly improves the accuracy of the numerical solution.

Keywords：computational mathematics；variable coefficient；elliptic partial differential equation；difference scheme；Richardson extrapolation

1 研究背景

各种物理性质的稳定过程都归结为椭圆型偏微分方程，椭圆型方程中比较具有代表性的是拉普拉斯方程，文献 [1] 对常系数椭圆型方程的 Dirichlet 边值问题建立了差分格式，并且用极值原理证明了其

收稿日期：2023-12-10

基金项目：湖南省自然科学基金资助项目（2024JJ7146，2022JJ50083）

作者简介：沈 欣，女，湖南工业大学硕士生，主要研究方向为计算数学，E-mail：xinshen02@163.com

通信作者：张海湘，男，湖南工业大学副教授，博士（后），主要研究方向为大规模科学计算与应用，E-mail：hassenzhang@163.com

差分格式解的收敛性和稳定性。文献 [2] 提出了用谱方法研究圆域上的二阶变系数椭圆方程，并且建立了极坐标系下二阶变系数椭圆方程的一种弱形式及其离散格式。文献 [3] 应用恒等逼近算子正则化方法研究了一类变系数椭圆型方程，得到了该问题的稳定数值解。文献 [4] 介绍了变系数椭圆型方程的一些传统有限差分格式。文献 [5] 运用能量分析法，研究了一类二阶椭圆型方程的初边值问题的差分格式解的存在性、唯一性、收敛性、稳定性。文献 [6] 利用混合有限元法求解变系数的椭圆型偏微分方程问题。文献 [7] 给出了椭圆型偏微分方程基于紧致差分格式的Richardson外推法，该团队还对离散奇异卷积方法、紧致差分方法等进行了系列研究 [8–10]。文献 [11] 研究了关于拟线性椭圆型方程 Dirichlet 边值问题解的积分范数估计。文献 [12] 研究了带不连续系数的二阶椭圆型方程二维边值问题的紧格式。文献 [13] 给出了分数阶中子扩散方程有限差分方法的稳定性和收敛性。文献 [14] 应用基于 Padé 逼近的算子分裂技术，给出了二维变扩散系数方程的紧致交替方向隐格式。文献 [15] 应用谱分析法，得到了具有 3 个奇异系数和负参数的椭圆型方程第一边值问题的正则解。文献 [16] 提出了用一阶分数阶卷积求积格式和向后 Euler 交替方向隐式方法，研究具有弱奇异核的三维非局部发展方程的数值解。文献 [17] 应用迎风差分方法和向前、向后的欧拉方法，研究了二维一阶变系数线性双曲型方程的初边值问题。

可以看出，已经有许多研究变系数椭圆型方程的方法，并且关于谱方法、有限元方法、有限差分法求解变系数椭圆方程的相关理论分析已经较为成熟，但是目前并没有关于变系数椭圆型方程的外推格式的理论分析，所以本文拟采用极值原理研究变系数椭圆型方程的差分格式解的收敛性、稳定性，并进一步给出Richardson外推法的理论分析，以实现精度的提高。

本文研究一类如下变系数椭圆型 Dirichlet 边值问题：

$$-\left[a(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+b(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right]+c(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+d(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}+e(x,y)u=f(x,y),\ (x,y)\in\Omega。\tag{1}$$

$$u=\varphi(x,y),\ (x,y)\in\Gamma。\tag{2}$$

式中：$a(x,y)$、$b(x,y)$、$c(x,y)$、$d(x,y)$、$e(x,y)$、$f(x,y)$ 均为 x 和 y 的光滑函数，且 $a(x,y)\geqslant 0$，$b(x,y)\geqslant 0$，$c(x,y)\geqslant 0$，$d(x,y)\geqslant 0$，$e(x,y)\geqslant 0$；

Ω 为矩形区域，且 $\Omega=(0,L_1)\times(0,L_2)$；

Γ 为 Ω 的边界。

2 差分格式

引理 1[1] 设 c、h 为给定常数，且 $h>0$。

I）如果函数 $g\in C^3[c-h,\ c+h]$，则有

$$g'(c)=\left[g(c+h)-g(c-h)\right]/(2h)-g'''(\xi_1)h^2/6,\ c-h<\xi_1<c+h。$$

II）如果函数 $g\in C^4[c-h,\ c+h]$，则有

$$g''(c)=\left[g(c+h)-2g(c)+g(c-h)\right]/h^2-g^{(4)}(\xi_2)h^2/12,\ c-h<\xi_2<c+h。$$

将区间 $[0,L_1]$ 作 m_1 等分，记

$$h_1=L_1/m_1,\ x_i=ih_1,\ 0\leqslant i\leqslant m_1;$$

将区间 $[0,L_2]$ 作 m_2 等分，记

$$h_2=L_2/m_2,\ x_j=jh_2,\ 0\leqslant j\leqslant m_2。$$

记结点如下：

$$\Omega_h=\left\{(x_i,\ y_j)\middle|0\leqslant i\leqslant m_1,\ 0\leqslant j\leqslant m_2\right\},$$

$$\mathring{\Omega}_h=\left\{(x_i,\ y_j)\,|\,1\leqslant i\leqslant m_1-1,\ 1\leqslant j\leqslant m_2-1\right\},$$

$$\Gamma_h=\Omega_h\backslash\mathring{\Omega}_h,\ \omega=\left\{(i,\ j)\middle|(x_i,\ y_j)\in\mathring{\Omega}_h\right\},$$

$$\gamma=\left\{(i,\ j)\middle|(x_i,\ y_j)\in\Gamma_h\right\},\ \bar{\omega}=\omega\cup\gamma。$$

并记：$\delta_x^2 v_{i,j}=\left[v_{i+1,j}-2v_{i,j}+v_{i-1,j}\right]/h_1^2$，

$$\delta_y^2 v_{i,j}=\left[v_{i,j+1}-2v_{i,j}+v_{i,j-1}\right]/h_2^2,$$

$$\Delta_x v_{i,j}=\left(v_{i+1,j}-v_{i-1,j}\right)/(2h_1),$$

$$\Delta_y v_{i,j}=\left(v_{i,j+1}-v_{i,j-1}\right)/(2h_2)。$$

在结点（x_i,y_i）处考虑边值问题（1），有

$$-\left[a(x_i,y_j)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i,y_j)+b(x_i,y_j)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i,y_j)\right]+c(x_i,y_j)\frac{\partial u}{\partial x}(x_i,y_j)+d(x_i,y_j)\frac{\partial u}{\partial y}(x_i,y_j)+e(x_i,y_j)u(x_i,y_j)=f(x_i,y_j),\ (i,j)\in\omega。\tag{3}$$

$$u(x_i,\ y_j)=\varphi(x_i,\ y_j),\ (i,\ j)\in\gamma。\tag{4}$$

定义 Ω_h 上的网格函数 $U=\left\{U_{i,j}\middle|(i,\ j)\in\bar{\omega}\right\}$，其中

$$U_{i,j}=u(x_i,\ y_j),\ (i,\ j)\in\bar{\omega}。$$

由引理 1 得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i,y_j)=\frac{1}{h_1^2}\left[u(x_{i+1},y_j)-2u(x_i,y_j)+u(x_{i-1},y_j)\right]-\frac{h_1^2}{12}\frac{\partial^4 u(\xi_{i,j},y_j)}{\partial x^4}=\delta_x^2 U_{i,j}-\frac{h_1^2}{12}\frac{\partial^4 u(\xi_{i,j},\ y_j)}{\partial x^4},$$

$x_{i-1}<\xi_{i,j}<x_{i+1}$。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j)=\frac{1}{h_2^2}\left[u(x_{i+1}, y_j)-2u(x_i, y_j)+u(x_{i-1}, y_j)\right]-\frac{h_2^2}{12}\frac{\partial^4 u(x_i, \eta_{i,j})}{\partial y^4}=\delta_y^2 U_{i,j}-\frac{h_2^2}{12}\frac{\partial^4 u(x_i, \eta_{i,j})}{\partial y^4},$$

$y_{i-1}<\eta_{i,j}<y_{i+1}$。

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_j)=\frac{1}{2h_1}\left[u(x_{i+1}, y_j)-u(x_{i-1}, y_j)\right]-\frac{h_1^2}{6}\frac{\partial^3 u(\bar{\xi}_{i,j}, y_j)}{\partial x^3}=\Delta_x U_{i,j}-\frac{h_1^2}{6}\frac{\partial^3 u(\bar{\xi}_{i,j}, y_j)}{\partial x^3},$$

$x_{i-1}<\bar{\xi}_{i,j}<x_{i+1}$。

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x_i, y_j)=\frac{1}{2h_2}\left[u(x_i, y_{j+1})-u(x_i, y_{j-1})\right]-\frac{h_2^2}{6}\frac{\partial^3 u(x_i, \bar{\eta}_{ij})}{\partial y^3}=\Delta_y U_{i,j}-\frac{h_2^2}{6}\frac{\partial^3 u(x_i, \bar{\eta}_{i,j})}{\partial y^3},$$

$y_{i-1}<\bar{\eta}_{i,j}<y_{i+1}$。

将上式整理后代入式（3）中，并注意到式（4），可得

$$-\left[a(x_i, y_j)\delta_x^2 U_{i,j}+b(x_i, y_j)\delta_y^2 U_{i,j}\right]+c(x_i, y_j)\Delta_x U_{i,j}+d(x_i, y_j)\Delta_y U_{i,j}+e(x_i, y_j)U_{i,j}=f(x_i, y_j)+R(x_i, y_j),\ (i,j)\in\omega。\quad(5)$$

$$U_{i,j}=\varphi(x_i, y_j),\ (i, j)\in\gamma。\quad(6)$$

略去小量项 $R(x_i, y_i)$，用 $u_{i,j}$ 代替 $U_{i,j}$，得到如下差分格式：

$$-\left[a(x_i, y_j)\delta_x^2 u_{i,j}+b(x_i, y_j)\delta_y^2 u_{i,j}\right]+c(x_i, y_j)\Delta_x u_{i,j}+d(x_i, y_j)\Delta_y u_{i,j}+e(x_i, y_j)u_{i,j}=f(x_i, y_j),\ (i,j)\in\omega。\quad(7)$$

$$u_{i,j}=\varphi(x_i, y_j),\ (i, j)\in\gamma。\quad(8)$$

局部截断误差 $R_{i,j}$ 为

$$R_{i,j}=-a(x_i, y_j)\frac{h_1^2}{12}\frac{\partial^4 u(\xi_{i,j}, y_j)}{\partial x^4}-b(x_i, y_j)\frac{h_2^2}{12}\frac{\partial^4 u(x_i, \eta_{i,j})}{\partial y^4}+c(x_i, y_j)\frac{h_1^2}{6}\cdot\frac{\partial^3 u(\bar{\xi}_{i,j}, y_j)}{\partial x^3}+d(x_i, y_j)\frac{h_2^2}{6}\frac{\partial^3 u(x_i, \bar{\eta}_{i,j})}{\partial y^3}。$$

记

$$M=\max\left\{\max_{(x,y)\in\bar{\Omega}}\left|a(x_i, y_j)\frac{\partial^4 u(\xi_{i,j}, y_j)}{\partial x^4}\right|,\ \max_{(x,y)\in\bar{\Omega}}\left|b(x_i, y_j)\frac{\partial^4 u(x_i, \eta_{i,j})}{\partial y^4}\right|,\ \max_{(x,y)\in\bar{\Omega}}\left|c(x_i, y_j)\frac{\partial^3 u(\bar{\xi}_{i,j}, y_j)}{\partial x^3}\right|,\ \max_{(x,y)\in\bar{\Omega}}\left|d(x_i, y_j)\frac{\partial^3 u(x_i, \bar{\eta}_{i,j})}{\partial y^3}\right|\right\}。$$

$$|R_{i,j}|\leqslant\frac{M}{4}(h_1^2+h_2^2),\ (i,j)\in\omega。\quad(9)$$

3　差分格式理论分析

引理 2（极值原理）　设 $v=\{v_{i,j}\,|\,(i,j)\in\bar{\omega}\}$ 为 Ω_h 上的网格函数，记

$$(L_h v)_{i,j}=-\left[a(x_i, y_j)\delta_x^2 v_{i,j}+b(x_i, y_j)\delta_y^2 v_{i,j}\right]+c(x_i, y_j)\Delta_x v_{i,j}+d(x_i, y_j)\Delta_y v_{i,j}+e(x_i, y_j)v_{i,j},\ (i,j)\in\omega,$$

当满足 $v_{i,j}\geqslant 0,\ (i,j)\in\omega$ 时，如果有 $(L_h v)_{i,j}\leqslant 0$，$(i, j)\in\omega$，则有 $\max\limits_{(i,j)\in\omega} v_{i,j}\leqslant\max\limits_{(i,j)\in\gamma} v_{i,j}$。

证明　采用反证法。设 $\max\limits_{(i,j)\in\omega} v_{i,j}>\max\limits_{(i,j)\in\gamma} v_{i,j}$，且 $\max\limits_{(i,j)\in\omega} v_{i,j}=M\geqslant 0$，则一定存在 $(i_0, j_0)\in\omega$，使得 $v_{i_0,j_0}=M$，且 v_{i_0-1,j_0}、v_{i_0+1,j_0}、v_{i_0,j_0-1}、v_{i_0,j_0+1} 中至少有一个的值严格小于 M。因此有

$$(L_h v)_{i_0,j_0}=\left[a(x_{i_0}, y_{j_0})\frac{2}{h_1^2}+\frac{2}{h_2^2}b(x_{i_0}, y_{j_0})+e(x_{i_0}, y_{j_0})\right]\cdot v_{i_0,j_0}-\left(\frac{a(x_{i_0}, y_{j_0})}{h_1^2}-\frac{c(x_{i_0}, y_{j_0})}{2h_1}\right)v_{i_0+1,j_0}-\left(\frac{a(x_{i_0}, y_{j_0})}{h_1^2}+\frac{c(x_{i_0}, y_{j_0})}{2h_1}\right)v_{i_0-1,j_0}-\left(\frac{b(x_{i_0}, y_{j_0})}{h_2^2}-\frac{d(x_{i_0}, y_{j_0})}{2h_2}\right)v_{i_0,j_0+1}-\left(\frac{b(x_{i_0}, y_{j_0})}{h_2^2}+\frac{d(x_{i_0}, y_{j_0})}{2h_2}\right)v_{i_0,j_0-1}>e(x_{i_0}, y_{j_0})M\geqslant 0。$$

只要 h_1 和 h_2 充分小，可保证 $\frac{a(x_{i_0}, y_{j_0})}{h_1^2}-\frac{c(x_{i_0}, y_{j_0})}{2h_1}$ 和 $\frac{b(x_{i_0}, y_{j_0})}{h_2^2}-\frac{d(x_{i_0}, y_{j_0})}{2h_2}$ 均大于 0，这与假设矛盾，

故假设不成立，引理证毕。

定理 1 差分格式存在唯一解。

证明 差分格式是线性的，考虑其齐次方程组

$$-\left[a\left(x_i, y_j\right)\delta_x^2 u_{i,j}+b\left(x_i, y_j\right)\delta_y^2 u_{i,j}\right]+ c\left(x_i, y_j\right)\Delta_x u_{i,j}+d\left(x_i, y_j\right)\Delta_y u_{i,j}+ e\left(x_i, y_j\right)u_{i,j}=0,\ (i,\ j)\in\omega。 \tag{10}$$

$$u_{i,j}=0,\ (i,\ j)\in\gamma。 \tag{11}$$

设$\|u\|_\infty=M>0$，则由式（11）可以得知，存在$(x_i, y_j)\in\omega$，使得$\left|u_{i_0,j_0}\right|=M$，且$\left|u_{i_0+1,\ j_0}\right|$、$\left|u_{i_0-1,\ j_0}\right|$、$\left|u_{i_0,\ j_0+1}\right|$、$\left|u_{i_0,\ j_0-1}\right|$中至少有一个严格小于$M$。考虑式（10）中$(i,j)=(x_0,y_0)$的等式，有

$$\left[a\left(x_{i_0}, y_{j_0}\right)\frac{2}{h_1^2}+\frac{2}{h_2^2}b\left(x_{i_0}, y_{j_0}\right)+e\left(x_{i_0}, y_{j_0}\right)\right]u_{i_0,j_0}= \left(a\left(x_{i_0}, y_{j_0}\right)/h_1^2\right)\left(u_{i_0+1,\ j_0}+u_{i_0-1,\ j_0}\right)+ \left(c\left(x_{i_0}, y_{j_0}\right)/(2h_1)\right)\left(-u_{i_0+1,\ j_0}+u_{i_0-1,\ j_0}\right)+ \left(b\left(x_{i_0}, y_{j_0}\right)/h_2^2\right)\left(u_{i_0,\ j_0+1}+u_{i_0,\ j_0-1}\right)+ \left(d\left(x_{i_0}, y_{j_0}\right)/(2h_2)\right)\left(-u_{i_0,\ j_0+1}+u_{i_0,\ j_0-1}\right)。$$

将上式两边取绝对值，并约掉相同式子，可得

$$\left|e\left(x_i, y_j\right)\right|M<0。$$

因为$\left|e\left(x_i,\ y_j\right)\right|\geqslant 0$，所以与假设矛盾，故$M=0$。因而差分格式是唯一可解的。

定理 2 设$v=\left\{v_{i,j}\middle|(i,\ j)\in\bar{\omega}\right\}$为差分格式式（7）的解，则有

$$\max_{(i,j)\in\omega}\left|v_{i,j}\right|\leqslant\max_{(i,j)\in\gamma}\left|\varphi_{i,j}\right|+\frac{L_1^2+L_2^2}{2\left(\min\limits_{(i,j)\in\omega}a_{i,j}+\min\limits_{(i,j)\in\omega}b_{i,j}\right)}\max_{(i,j)\in\omega}\left|f_{i,j}\right|。$$

证 明 记 $A=\min\limits_{(i,j)\in\omega}\left|a_{i,j}\right|$、$B=\min\limits_{(i,j)\in\omega}\left|b_{i,j}\right|$、$C=\max\limits_{(i,j)\in\omega}\left|f_{i,j}\right|$、$P(x,y)=x(2L_1-x)+y(2L_2-y)$，并定义$\Omega_h$上的网格函数

$$w_{i,j}=\left[C/2(A+B)\right]P\left(x_i, y_j\right),\ (i,j)\in\omega;$$

$$P_{i,j}=P\left(x_i, y_j\right),\ w_{i,j}\geqslant 0,\ (i,j)\in\omega;$$

$$\left(L_hP\right)_{i,j}=-a\left(x_i, y_j\right)\delta_x^2P_{i,j}-b\left(x_i, y_j\right)\delta_y^2P_{i,j}+ c\left(x_i, y_j\right)\delta_xP_{i,\ j}+d\left(x_i, y_j\right)\delta_yP_{i,j}+ e\left(x_i, y_j\right)P_{i,\ j}=2a\left(x_i, y_j\right)+2b\left(x_i, y_j\right)+ 2c\left(x_i, y_j\right)(L_1-x_i)+2d\left(x_i, y_j\right)\left(L_2-y_j\right)+ e\left(x_i, y_j\right)P_{i,j}\geqslant 2a\left(x_i, y_j\right)+2b\left(x_i, y_j\right)。$$

$$\left(L_hw\right)_{i,j}=C(L_hP)_{i,j}/\left[2(A+B)\right]\geqslant C,\ (i,j)\in\omega;$$

$$L_h\left(\pm v-w\right)_{i,j}=\pm\left(L_hv_{i,j}\right)-\left(L_hw_{i,j}\right)\leqslant \pm f_{i,j}-C\leqslant 0,\ (i,j)\in\omega;$$

$$\max_{(i,j)\in w}(\pm v-w)_{i,j}\leqslant\max_{(i,j)\in\gamma}(\pm v-w)_{i,j}\leqslant\max_{(i,j)\in\gamma}|\pm v_{i,j}|+ \max_{(i,j)\in\gamma}|-w_{i,j}|\leqslant\max_{(i,j)\in\gamma}|v_{i,j}|,\ (i,j)\in\omega。$$

所以有

$$\max_{(i,j)\in w}(\pm v)_{i,j}=\max_{(i,j)\in w}(\pm v-w+w)_{i,j}\leqslant\max_{(i,j)\in w}(\pm v-w)_{i,j}+ \max_{(i,j)\in w}w_{i,j}\leqslant\max_{(i,j)\in\gamma}|v_{i,j}|+\max_{(i,j)\in w}w_{i,j}\leqslant \max_{(i,j)\in\gamma}|\varphi_{i,j}|+\frac{L_1^2+L_2^2}{2\left(\min\limits_{(i,j)\in\omega}a_{i,j}+\min\limits_{(i,j)\in\omega}b_{i,j}\right)}\max_{(i,j)\in\omega}|f_{i,j}|。$$

定理证毕。

定理 3 （收敛性） 设$\left\{u(x,\ y)\middle|(x,\ y)\in\bar{\Omega}\right\}$为定解问题的解，设$\left\{u_{i,j}\middle|(i,j)\in\bar{\omega}\right\}$为差分格式的解，则有$\max\limits_{(i,j)\in\omega}|u\left(x_i,\ y_j\right)-u_{i,j}|\leqslant\dfrac{M\left(L_1^2+L_2^2\right)\left(h_1^2+h_2^2\right)}{8\left(\min\limits_{(i,j)\in\omega}a_{i,j}+\min\limits_{(i,j)\in\omega}b_{i,j}\right)}$。

证明 记$e_{i,j}=u\left(x_i,\ y_j\right)-u_{i,j}$，$(i,j)\in\omega\cup\gamma$。将式（3）和式（7）相减，得如下误差方程组：

$$-\left[a\left(x_i, y_j\right)\delta_x^2e_{i,j}+b\left(x_i, y_j\right)\delta_y^2e_{i,j}\right]+ c\left(x_i, y_j\right)\Delta_xe_{i,j}+d\left(x_i, y_j\right)\Delta_ye_{i,j}+e\left(x_i, y_j\right)e_{i,j}= R_{i,j},\ (i,j)\in\omega。$$

$$e_{i,j}=0,\ (i,\ j)\in\gamma,$$

其中$\max\limits_{(i,j)\in\omega}\left|R_{i,j}\right|\leqslant\dfrac{M}{4}\left(h_1^2+h_2^2\right)$。

应用定理 2，则有

$$\max_{(i,j)\in\omega}|e_{i,j}|\leqslant\frac{L_1^2+L_2^2}{2\left(\min\limits_{(i,j)\in\omega}a_{i,j}+\min\limits_{(i,j)\in\omega}b_{i,j}\right)}\max_{(i,j)\in\omega}\left|R_{i,j}\right|\leqslant \frac{M\left(L_1^2+L_2^2\right)\left(h_1^2+h_2^2\right)}{8\left(\min\limits_{(i,j)\in\omega}a_{i,j}+\min\limits_{(i,j)\in\omega}b_{i,j}\right)}。$$

定理证毕。

定理 4 （稳定性） 差分格式式（7）在下述意义下的边界值和右端函数是稳定的：设u_{ij}为差分格式

$$-\left[a\left(x_i, y_j\right)\delta_x^2u_{i,j}+b\left(x_i, y_j\right)\delta_y^2u_{i,j}\right]+ c\left(x_i, y_j\right)\Delta_yu_{i,j}+d\left(x_i, y_j\right)\Delta_yu_{i,j}+ e\left(x_i, y_j\right)u_{i,j}=f_{i,j},\ (i,j)\in\omega;$$

$$u_{i,j}=\varphi_{i,j},\ (i,\ j)\in\gamma$$

的解，则有

$$\max_{(i,j)\in\omega}|u_{i,j}|\leqslant\max_{(i,j)\in\gamma}|\varphi_{i,j}|+\frac{L_1^2+L_2^2}{2\left(\min\limits_{(i,j)\in\omega}a_{i,j}+\min\limits_{(i,j)\in\omega}b_{i,j}\right)}\max_{(i,j)\in\omega}|f_{i,j}|。$$

证明　假设在应用差分格式时，计算右端函数 $f(x_i, y_i)$ 有误差 $f_{i,j}$，计算边界值有误差 $\varphi_{i,j}$。设 $\{v_{i,j}|(i,j)\in\bar{\omega}\}$ 为差分格式

$$\begin{aligned}&-\left[a(x_i,y_j)\delta_x^2v_{i,j}+b(x_i,y_j)\delta_y^2v_{i,j}\right]+\\&\quad c(x_i,y_j)\Delta_xv_{i,j}+d(x_i,y_j)\Delta_yv_{i,j}+e(x_i,y_j)v_{i,j}=\\&\quad f(x_i,y_j)+f_{i,j},\ (i,j)\in\omega;\end{aligned}\tag{12}$$

$$e_{i,j}=\varphi(x_i,y_j)+\varphi_{i,j},\ (i,j)\in\gamma\tag{13}$$

的解，记 $\varepsilon_{i,j}=v_{i,j}-u_{i,j}$，$(i,j)\in\omega\cup\gamma$，将式（12）与式（7）相减，得

$$\begin{aligned}&-\left[a(x_i,y_j)\delta_x^2\varepsilon_{i,j}+b(x_i,y_j)\delta_y^2\varepsilon_{i,j}\right]+c(x_i,y_j)\Delta_x\varepsilon_{i,j}+\\&\quad d(x_i,y_j)\Delta_y\varepsilon_{i,j}+e(x_i,y_j)\varepsilon_{i,j}=f_{i,j},\ (i,j)\in\omega;\\&\qquad\varepsilon_{i,j}=\varphi_{i,j},\ (i,j)\in\gamma。\end{aligned}$$

应用定理 2，可得

$$\max_{(i,j)\in\omega}|\varepsilon_{i,j}|\leqslant\max_{(i,j)\in\gamma}|\varphi_{i,j}|+\frac{L_1^2+L_2^2}{2\left(\min\limits_{(i,j)\in\omega}a_{i,j}+\min\limits_{(i,j)\in\omega}b_{i,j}\right)}\max_{(i,j)\in\omega}|f_{i,j}|。$$

当 $\max\limits_{(i,j)\in\gamma}|\varphi_{i,j}|$ 和 $\max\limits_{(i,j)\in\omega}|f_{i,j}|$ 为小量时，$\max\limits_{(i,j)\in\omega}|\varepsilon_{i,j}|$ 也是小量，则称差分格式式（7）关于边界值和右端函数是稳定的。

4　Richardson 外推法

设未知量的一个近似式为 $p_0(h)$，当 $h\to0$ 时，有 $p_0(h)=p+\alpha h^2+O(h^4)$，用 $h/2$ 代替 h，得

$$p_0(h/2)=p+\alpha(h/2)^2+O\left((h/2)^4\right),$$

将上面两式进行线性组合，有

$$(4/3)p_0(h/2)-(1/3)p_0(h)=p+O(h^4)。$$

定理 5　设两点边值问题

$$\begin{cases}-\left[a(x,y)\dfrac{\partial^2v}{\partial x^2}+b(x,y)\dfrac{\partial^2v}{\partial y^2}\right]+c(x,y)\dfrac{\partial v}{\partial x}+\\\quad d(x,y)\dfrac{\partial v}{\partial y}+e(x,y)v=\dfrac{a(x,y)}{12}\dfrac{\partial^4u(x,y)}{\partial x^4}-\\\quad\dfrac{c(x,y)}{6}\dfrac{\partial^3u(x,y)}{\partial x^3},\ (x,y)\in\Omega;\\v=0,\ (x,y)\in\Gamma\end{cases}\tag{14}$$

和

$$\begin{cases}-\left[a(x,y)\dfrac{\partial^2w}{\partial x^2}+b(x,y)\dfrac{\partial^2w}{\partial y^2}\right]+c(x,y)\dfrac{\partial w}{\partial x}+\\\quad d(x,y)\dfrac{\partial w}{\partial y}+e(x,y)w=\dfrac{a(x,y)}{12}\dfrac{\partial^4u(x,y)}{\partial y^4}-\\\quad\dfrac{c(x,y)}{6}\dfrac{\partial^3u(x,y)}{\partial y^3},\ (x,\ y)\in\Omega;\\w=0,\ \ (x,y)\in\Gamma\end{cases}\tag{15}$$

存在光滑解，则有

$$\max_{(i,j)\in\omega}\left|u(x_i,\ y_j)-\left[\frac{4}{3}u_{2i,2j}\left(\frac{h_1}{2},\frac{h_2}{2}\right)-\frac{1}{3}u_{i,j}(h_1,\ h_2)\right]\right|=O\left(h_1^4+h_2^4\right)。$$

证明　式（3）和式（4）可以写为

$$\begin{cases}(L_hU)_{i,j}=f(x_i,y_j)-a(x_i,y_j)\dfrac{h_1^2}{12}\dfrac{\partial^4u(x_i,y_j)}{\partial x^4}-\\\quad b(x_i,y_j)\dfrac{h_2^2}{12}\dfrac{\partial^4u(x_i,y_j)}{\partial y^4}+c(x_i,y_j)\dfrac{h_1^2}{6}\cdot\\\quad\dfrac{\partial^3u(x_i,y_j)}{\partial x^3}+d(x_i,y_j)\dfrac{h_2^2}{6}\dfrac{\partial^3u(x_i,y_j)}{\partial y^3}-\\\quad a(x_i,y_j)\dfrac{h_1^4}{360}\dfrac{\partial^6u(\xi_{i,j}^{(1)},y_j)}{\partial x^6}-b(x_i,y_j)\dfrac{h_2^4}{360}\cdot\\\quad\dfrac{\partial^6u(x_i,\eta_{i,j}^{(1)})}{\partial x^6}+c(x_i,y_j)\dfrac{h_1^4}{120}\dfrac{\partial^5u(\xi_{i,j}^{(2)},y_j)}{\partial x^5}+\\\quad d(x_i,y_j)\dfrac{h_2^4}{120}\dfrac{\partial^5u(x_i,\eta_{i,j}^{(2)})}{\partial y^5},\ (i,j)\in\omega;\\U_{i,j}=\varphi(x_i,y_j),\ (i,j)\in\gamma。\end{cases}$$

则差分格式的误差方程组为

$$\begin{cases}(L_he)_{i,j}=-a(x_i,y_j)\dfrac{h_1^2}{12}\dfrac{\partial^4u(x_i,y_j)}{\partial x^4}-\\\quad b(x_i,y_j)\dfrac{h_2^2}{12}\dfrac{\partial^4u(x_i,y_j)}{\partial y^4}+c(x_i,y_j)\cdot\\\quad\dfrac{h_1^2}{6}\dfrac{\partial^3u(x_i,y_j)}{\partial x^3}+d(x_i,y_j)\dfrac{h_2^2}{6}\dfrac{\partial^3u(x_i,y_j)}{\partial y^3}-\\\quad a(x_i,y_j)\dfrac{h_1^4}{360}\dfrac{\partial^6u(\xi_{i,j}^{(1)},y_j)}{\partial x^6}-b(x_i,y_j)\dfrac{h_2^4}{360}\cdot\\\quad\dfrac{\partial^6u(x_i,\eta_{i,j}^{(1)})}{\partial x^6}+c(x_i,y_j)\dfrac{h_1^4}{120}\dfrac{\partial^5u(\xi_{i,j}^{(2)},y_j)}{\partial x^5}+\\\quad d(x_i,y_j)\dfrac{h_2^4}{120}\dfrac{\partial^5u(x_i,\eta_{i,j}^{(2)})}{\partial y^5},\ (i,j)\in\omega;\\e_{i,j}=0,\ (i,j)\in\gamma。\end{cases}\tag{16}$$

$$V_{i,j}=v(x_i,y_j),\ W_{i,j}=w(x_i,y_j),\ (i,j)\in\omega\cup\gamma。$$

对式（14）和（15）分别离散化，可得

$$\begin{cases}(L_hV)_{i,j}=\dfrac{a(x_i,y_j)}{12}\dfrac{\partial^4u(x_i,y_j)}{\partial x^4}-\\ \quad\dfrac{c(x_i,y_j)}{6}\dfrac{\partial^3u(x_i,y_j)}{\partial x^3}-a(x_i,y_j)\dfrac{h_1^2}{12}\cdot\\ \quad\dfrac{\partial^4v(x_{i,j}^{(1)},y_j)}{\partial x^4}-b(x_i,y_j)\dfrac{h_2^2}{12}\dfrac{\partial^4v(x_i,y_{i,j}^{(1)})}{\partial y^4}+\\ \quad c(x_i,y_j)\dfrac{h_1^2}{6}\dfrac{\partial^3v(x_{i,j}^{(2)},y_j)}{\partial x^3}+d(x_i,y_j)\dfrac{h_2^2}{6}\cdot\\ \quad\dfrac{\partial^3v(x_i,y_{i,j}^{(2)})}{\partial y^3},\quad (i,j)\in\omega;\\ V_{i,j}=0,\quad (i,j)\in\gamma\end{cases}\tag{17}$$

和

$$\begin{cases}(L_hW)_{i,j}=\dfrac{a(x_i,y_j)}{12}\dfrac{\partial^4u(x_i,y_j)}{\partial y^4}-\\ \quad\dfrac{c(x_i,y_j)}{6}\dfrac{\partial^3u(x_i,y_j)}{\partial y^3}--a(x_i,y_j)\dfrac{h_1^2}{12}\cdot\\ \quad\dfrac{\partial^4w(x_{i,j}^{(3)},y_j)}{\partial x^4}-b(x_i,y_j)\dfrac{h_2^2}{12}\dfrac{\partial^4w(x_i,y_{i,j}^{(3)})}{\partial y^4}+\\ \quad c(x_i,y_j)\dfrac{h_1^2}{6}\dfrac{\partial^3w(x_{i,j}^{(4)},y_j)}{\partial x^3}+d(x_i,y_j)\dfrac{h_2^2}{6}\cdot\\ \quad\dfrac{\partial^3w(x_i,y_{i,j}^{(4)})}{\partial y^3},\quad (i,j)\in\omega;\\ W_{i,j}=0,\quad (i,j)\in\gamma。\end{cases}\tag{18}$$

记$r_{i,j}=e_{i,j}+h_1^2V_{i,j}+h_2^2W_{i,j}$。

将式（17）两边同乘以h_1^2，将式（18）两边同乘以h_2^2，并将结果和式（16）相加，有

$$r_{i,j}=O(h_1^4+h_2^4),\ (i,j)\in\omega。$$

$$u_{i,j}(h_1,h_2)=u(x_i,y_j)+h_1^2v(x_i,y_j)+h_2^2w(x_i,y_j)+O(h_1^4+h_2^4),\ (i,j)\in\omega。\tag{19}$$

同理，可得

$$u_{2i,2j}\left(\frac{h_1}{2},\frac{h_2}{2}\right)=u(x_i,y_j)+\left(\frac{h_1}{2}\right)^2v(x_i,y_j)+\left(\frac{h_2}{2}\right)^2w(x_i,y_j)+O\left(\left(\frac{h_1}{2}\right)^4+\left(\frac{h_2}{2}\right)^4\right),(i,j)\in\omega。\tag{20}$$

将式（20）两边同乘以 4/3，将式（19）两边同乘以 1/3，并将所得结果相减，得

$$\frac{4}{3}u_{2i,2j}\left(\frac{h_1}{2},\frac{h_2}{2}\right)-\frac{1}{3}u_{i,j}(h_1,h_2)=u(x_i,y_j)+O(h_1^4+h_2^4)。$$

定理证毕。

5 数值算例

算例 1 应用差分格式式（7）计算如下问题：

$$-\left[(x+y)\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}\right]+(x+y)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}-\pi^2u=\pi e^x\cos(\pi y)+2\pi^2e^x\sin(\pi y),\ 0<x<2,\ 0<y<1。$$

$$u(0,y)=\sin(\pi y),\ u(2,y)=e^2\sin(\pi y),\ 0\leqslant y<1。$$

$$u(x,0)=0,\ u(x,1)=0,\ 0<x<2。$$

该问题的精确解为$u(x,y)=e^x\sin(\pi y)$。

将 [0, 2] 作 m_1 等分，将 [0, 1] 作 m_2 等分，用 Gauss-Seidel 迭代方法求解差分方程组，精确至$\left\|u^{(l+1)}-u^{(l)}\right\|_\infty\leqslant\frac{1}{2}\times10^{-10}$。

其中，不同步长所得数值解的最大误差为

$$E(h_1,h_2)=\max_{(i,j)\in\omega}\left|u(x_i,y_j)-u_{i,j}\right|。$$

表 1 给出了算例 1 应用差分格式式（7）在取不同步长时所得数值解的最大误差和误差阶，以及应用外推算法在取不同步长时所得数值解的最大误差和误差阶，分析表 1 中的数据可以得知，当取相同步长时，应用外推差分格式算法得到的最大误差要比应用差分格式式（7）所得的最大误差小很多，且其误差阶也相应提高。

表 1 算例 1 的数值结果

Table 1 Numerical results of Example 1

算 法	(h_1, h_2)	max $E(h_1, h_2)$	*Rate*
差分格式	(1/8, 1/8)	2.243e−2	*
	(1/16, 1/16)	5.629e−3	1.99
	(1/32, 1/32)	1.412e−3	1.99
	(1/64, 1/64)	3.533e−3	2.00
外推差分格式	(1/8, 1/8)	4.048e−5	*
	(1/16, 1/16)	3.524e−6	3.52
	(1/32, 1/32)	2.897e−7	3.60

表 2 给出了 5 个结点处取不同步长时，所得数值解和精确解的差的绝对值。

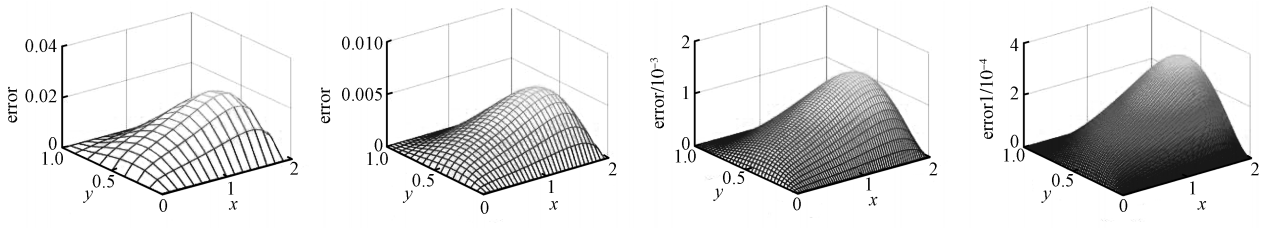
表 2 算例 1 不同结点处的误差值

Table 2 Error values at different nodes of Example 1

(h_1, h_2)	(1/2, 1/4)	(1, 1/4)	(3/2, 1/4)	(1/2, 1/2)	(1, 1/2)
(1/8, 1/8)	8.745e−3	1.443e−2	1.947e−2	9.958e−3	1.652e−2
(1/16, 1/16)	2.194e−3	3.614e−3	4.888e−3	2.502e−3	4.139e−3
(1/32, 1/32)	5.490e−4	9.037e−4	1.223e−3	6.263e−4	1.035e−3
(1/64, 1/64)	1.373e−4	2.260e−4	3.059e−4	1.566e−4	2.589e−4

由表 2 可以看到，不同结点处的误差值也不同，并且在结点 (3/2, 1/4) 处的误差值比在其他 4 个结点处的误差值要大。

图 1 为算例 1 在不同步长下的误差曲面。



a）M=16，N=8　　b）M=32，N=16　　c）M=64，N=32　　d）M=128，N=64

图 1　算例 1 在不同步长下的误差曲面

Fig. 1　Error surface with different step lengths of Example 1

由图 1 可清晰地看到，随着剖分次数增多，步长缩小，误差也不断缩小，且可直观地看到，在 x=3/2 左右的误差最大，这和表 2 结果相对应。

算例 2　应用差分格式式（7）计算如下问题：

$$-\left[(x+2y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right]+\pi^2\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+(x+2y)u=$$

$$-\pi e^x\sin(\pi y)+2\pi^2 e^x\cos(\pi y),\ 0<x<2,\ 0<y<1;$$

$$u(0,\ y)=\cos(\pi y),\ u(2,\ y)=e^2\cos(\pi y),\ 0\leqslant y\leqslant 1;$$

$$u(x,\ 0)=e^x,\ u(x,\ 1)=-e^x,\ 0<x<2。$$

该问题的精确解为$u(x,\ y)=e^x\cos(\pi y)$。

计算算例 2 得到表 3 和表 4 中的数据，并画出图 2 所示取不同步长时的误差曲面。

对表 1 和表 3 进行比较，可以发现在步长相同的情况下，算例 2 的精度要比算例 1 的精度高，并且算例 2 的误差阶从 2 阶提高到 4 阶，虽然两个算例的精确解相似，但是受系数影响，最后得到的数据以及数值解精度也不同。由表 4 可以发现，结点 (1, 1/2) 处的误差比其他 4 个结点处的误差要大，所以图 2 所示误差曲面在 y=1/2 处有最大误差。

表 3　算例 2 的数值结果

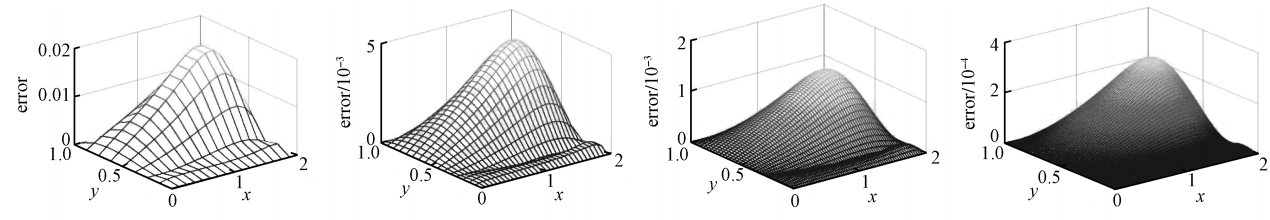
Table 3　Numerical results of Example 2

算　法	(h_1, h_2)	max $E(h_1, h_2)$	*Rate*
差分格式	(1/ 8, 1/ 8)	1.742e−2	*
	(1/16, 1/16)	4.891e−3	1.96
	(1/32, 1/32)	1.122e−3	2.00
	(1/64, 1/64)	2.806e−4	2.00
外推差分格式	(1/ 8, 1/ 8)	4.469e−5	*
	(1/16, 1/16)	2.771e−6	4.01
	(1/32, 1/32)	1.746e−7	3.99

表 4　算例 2 不同结点处的误差值

Table 4　Error values at different nodes of Example 2

(h_1, h_2)	(1/2, 1/4)	(1, 1/4)	(3/2, 1/4)	(1/2,1/2)	(1,1/2)
(1/8, 1/8)	3.251e−4	1.474e−3	2.383e−3	3.944e−3	8.725e−3
(1/16, 1/16)	7.226e−5	3.573e−4	5.708e−4	9.856e−4	2.176e−3
(1/32, 1/32)	1.747e−5	8.862e−5	1.141e−4	2.463e−4	5.435e−4
(1/64, 1/64)	4.330e−6	2.211e−5	3.518e−5	6.158e−5	1.359e−4



a）M=16，N=8　　b）M=32，N=16　　c）M=64，N=32　　d）M=128，N=64

图 2　算例 2 在不同步长下的误差曲面

Fig. 2　Error surface with different step lengths of Example 2

算例 3　应用差分格式式（7）计算如下问题：

$$-\left[\pi^2 x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+(x+y^2)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right]+\pi\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\pi^2 y^2 u=$$

$$2\pi e^x\cos(\pi y)+2\pi^2 e^x y^2\left(\cos(\pi y)+\sin(\pi y)\right),$$

$$0<x<2,\ \ 0<y<1;$$

$$u(0,\ y)=\cos(\pi y)+\sin(\pi y),\ \ 0\leqslant y\leqslant 1;$$

$$u(2,\ y)=e^2\left[\cos(\pi y)+\sin(\pi y)\right],\ \ 0\leqslant y\leqslant 1;$$

$$u(x,\ 0)=e^x,\ \ u(x,\ 1)=-e^x,\ \ 0<x<2。$$

该问题的精确解为

$$u(x,\ y)=e^x\left[\cos(\pi y)+\sin(\pi y)\right]。$$

计算算例 3 得到表 5 和表 6 中的数据。

表 5 算例 3 的数值结果

Table 5 Numerical results of Example 3

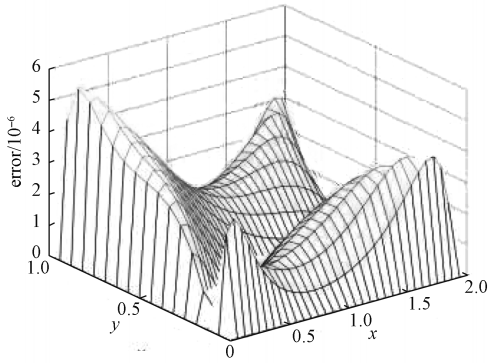
算 法	(h_1, h_2)	max $E(h_1, h_2)$	*Rate*
差分格式	(1/ 8, 1/ 8)	1.485e−2	*
	(1/16, 1/16)	3.749e−3	1.96
	(1/32, 1/32)	9.445e−4	2.00
	(1/64, 1/64)	2.363e−4	2.00
外推差分格式	(1/ 8, 1/ 8)	5.643e−5	*
	(1/16, 1/16)	5.655e−6	3.32
	(1/32, 1/32)	7.173e−7	2.98

表 6 算例 3 在外推格式下不同结点处的误差值

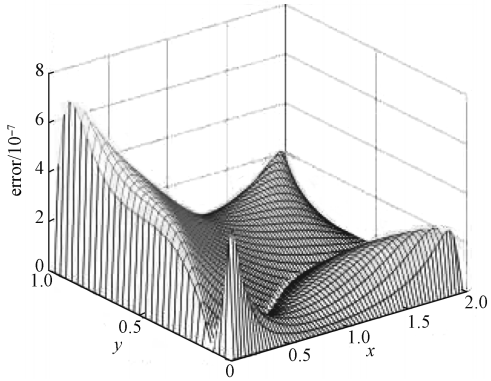
Table 6 Error values at different nodes of Example 3 in extrapolation scheme

(h_1, h_2)	(1/2, 1/4)	(1, 1/4)	(3/2, 1/4)	(1/2, 1/2)	(1, 1/2)
(1/8, 1/8)	1.742e−5	3.737e−5	4.976e−5	1.413e−5	7.489e−6
(1/16, 1/16)	4.276e−7	1.966e−6	3.033e−6	2.306e−6	2.650e−7
(1/32, 1/32)	5.179e−8	7.735e−8	1.696e−7	2.887e−7	9.522e−8

从表 5 可发现，外推格式下所得到的误差阶并没有如理论一样达到四阶，而是在三阶左右，这可能是在对数据线性组合时边界附近的误差较大。所以选择观察外推格式下不同结点处的误差值，并做出不同步长下的误差曲面，如图 3 所示。



a）M=32，N=16



b）M=64，N=32

图 3 算例 3 在不同步长下的误差曲面

Fig. 3 Error surface with different step lengths of Example3

由图 3 可以发现，的确是在边界附近误差明显变大，从而影响了最后的误差阶。

6 结语

本文研究了一类变系数椭圆型方程 Dirichlet 边值问题的差分格式，即应用五点差分法建立差分格式，并证明了差分格式解的唯一性，再应用极值原理证明了差分格式的稳定性和收敛性，最后应用 Richardson 外推法提高数值解的精度。本文通过计算 3 个不同的数值算例，得到它们在取不同步长时的最大误差和在不同结点处的误差，以及应用外推公式得到了提高精度后的误差与误差阶。可以发现，虽然椭圆方程的系数不同，在边界处的值也不同，但是应用差分格式计算得到的数值结果都可以达到二阶，并且发现在将数据线性组合后，边界附近的误差值要比其他内部结点处的误差值大很多，从而影响了外推的精度，使外推并不能如理论上能很好地达到四阶。所以，对于一些本身差分格式就可以得到精度较高、误差较小的椭圆方程，在进行外推时要格外注意边界附近的误差。综合来看，对于大部分结点，外推还是可以显著提高数值解的精度。

参考文献：

[1] 孙志忠 . 偏微分方程数值解法 [M]. 3 版 . 北京：科学出版社，2022：44−61
SUN Zhizhong. Numerical Solution of Partial Differential Equation[M]. 3rd ed. Beijing：Science Press，2022：44−61.

[2] 刘忠敏，安 静，陈 悦 . 圆域上变系数二阶椭圆方程有效的谱方法及其在奇异非线性问题中的应用 [J]. 陕西师范大学学报 (自然科学版)，2023，51(1)：30−37.
LIU Zhongmin，AN Jing，CHEN Yue. An Efficient Spectral Method for Second Order Elliptic Equation with Variable Coefficients on a Circular Domain and Its Application to Singular Nonlinear Problem[J]. Journal of Shaanxi Normal University(Natural Science Edition)，2023：51(1)：30−37.

[3] 何尚琴 . 一类变系数椭圆方程 Cauchy 问题的恒等逼近算子正则化方法 [J]. 高等学校计算数学学报，2022，44(2)：116−135.
HE Shangqin. A Regularization Method of Identical Approximation Operator for Cauchy Problem of Elliptic Equation with Variable Coefficients[J]. Numerical Mathematics A Journal of Chinese Universities，2022，44(2)：116−135.

[4] 孙岩刚 . 变系数椭圆型方程的紧差分格式 [D]. 沈阳：

东北大学，2008.
SUN Yangang. Compact Difference Scheme for Elliptic Equations with Variable Coefficients[D]. Shenyang：Northeastern University，2008.

[5] 钟　婷，陈宗燕，肖雪玲 . 一类椭圆型变系数方程的差分格式 [J]. 保山学院学报，2010，29(2)：57−61.
ZHONG Ting，CHEN Zongyan，XIAO Xueling. A Finite Difference Scheme for a Class of Elliptic Differential Equation with Variable Coefficients[J]. Journal of Baoshan University，2010，29(2)：57−61.

[6] 刘志清，周　惠 . 变系数椭圆方程的混合有限元方法 [J]. 吉首大学学报 (自然科学版)，2011，32(4)：31−34.
LIU Zhiqing，ZHOU Hui. Mixed Finite Element Methods for Elliptic Equations with Variable Coefficients[J]. Journal of Jishou University (Natural Sciences Edition)，2011，32(4)：31−34.

[7] 李曹杰，张海湘，杨雪花 . 一类椭圆型 Dirichlet 边值问题的高精度 Richardson 外推法 [J]. 湖南工业大学学报，2024，38(1)：91−97，104.
LI Caojie，ZHANG Haixiang，YANG Xuehua. A High-Precision Richardson Extrapolation Method for a Class of Elliptic Dirichlet Boundary Value Calculation[J]. Journal of Hunan University of Technology，2024，38(1)：91−97，104.

[8] 张海湘，杨雪花，汤　琼 . 多项复合型黏弹性波问题的离散奇异卷积方法 [J]. 湖南工业大学学报，2019，33(3)：1−5, 103.
ZHANG Haixiang，YANG Xuehua，TANG Qiong. Discrete Singular Convolution Scheme for Multiple Compound Viscoelastic Wave Flaws[J]. Journal of Hunan University of Technology，2019，33(3)：1−5，103.

[9] 王　婉，张海湘，杨雪花 . 四阶时间分数波方程的快速紧致差分方法 [J]. 湖南工业大学学报， 2024，38(3)：96−101.
WANG Wan，ZHANG Haixiang，YANG Xuehua. Fast Compact Difference Method for Fourth-Order Time-Fractional Wave Equations[J]. Journal of Hunan University of Technology，2024，38(3)：96−101.

[10] 王佳威，张海湘，杨雪花 . 一类非线性 Burgers 型问题的预测校正紧差分方法 [J]. 湖南工业大学学报，2024，38(1)：98−104.
WANG Jiawei，ZHANG Haixiang，YANG Xuehua. Predictive Correction Compact Difference Method for a Class of Nonlinear Burgers Problem[J]. Journal of Hunan University of Technology，2024，38(1)：98−104.

[11] PIKULIN S V. On the Estimate of Integral Norm of Solution of the Dirichlet Problem for Quasilinear Elliptic Equation[J]. Mathematical Notes，2023，114(3/4)：639−642.

[12] GORDIN V A，SHADRIN D A. Compact Approximation of a Two-Dimensional Boundary Value Problem for Elliptic Equations of the Second Order with a Discontinuous Coefficient[J]. Mathematical Models and Computer Simulations，2023，15(5)：920−943.

[13] YIN D P，XIE Y Y，MEI L Q. The Stability and Convergence Analysis of Finite Difference Methods for the Fractional Neutron Diffusion Equation[J]. Advances in Computational Mathematics，2023，49(5)：72.

[14] HE M Y，LIAO W Y. A Compact ADI Finite Difference Method for 2D Reaction-Diffusion Equations with Variable Diffusion Coefficients[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics，2024，436：115400.

[15] URINOV A K，KARIMOV K T. Dirichlet Problem for an Elliptic Equation with Three Singular Coefficients[J]. Journal of Mathematical Sciences，2021，254(6)：731−742.

[16] ZHANG H X，LIU Y，YANG X H. An Efficient ADI Difference Scheme for the Nonlocal Evolution Problem in Three-Dimensional Space[J]. Journal of Applied Mathematics and Computing，2023，69(1)：651−674.

[17] SUN Y M，YANG Q. Numerical Analysis of Upwind Difference Schemes for Two-Dimensional First-Order Hyperbolic Equations with Variable Coefficients[J]. Engineering，2021，13(6)：306−329.

（责任编辑：廖友媛）