

doi:10.3969/j.issn.1673-9833.2024.06.005

# 电网频率控制系统的时滞相关稳定性分析

黄浪尘, 王 炜

(湖南工业大学 电气与信息工程学院, 湖南 株洲 412007)

**摘要:** 针对现有时滞相关稳定分析方法应用于电网频率控制系统时存在计算复杂度高的问题, 提出了一种具有更低计算复杂度和更低保守性的稳定分析方法。首先, 针对时滞电力系统中系统矩阵维度过高导致高计算复杂度问题, 应用模型重构技术对系统矩阵进行降维处理, 以达到降低计算复杂度的目的。其次, 针对现有电力系统负荷频率稳定性分析方法存在线性矩阵不等式维度和计算复杂度过高的问题, 提出一种基于自由矩阵积分不等式的时滞相关稳定判据, 该判据具有较低线性矩阵不等式维度和较小的计算复杂度。最后, 通过单区域电力系统的电压频率控制问题, 证明了所提出的分析方法具有较高计算效率的同时有着较小的保守性。

**关键词:** 电力系统; 频率控制; 模型重构; 时滞相关; 计算复杂度

**中图分类号:** TM712

**文献标志码:** A

**文章编号:** 1673-9833(2024)06-0029-07

**引文格式:** 黄浪尘, 王 炜. 电网频率控制系统的时滞相关稳定性分析 [J]. 湖南工业大学学报, 2024, 38(6): 29-35.

## Delay-Dependent Stability Analysis of Grid Frequency Control Systems

HUANG Langchen, WANG Wei

(College of Electrical and Information Engineering, Hunan University of Technology, Zhuzhou Hunan 412007, China)

**Abstract:** In view of the high computational complexity in the current delay-dependent stability analysis methods for power grid frequency control systems, a stability analysis method has thus been proposed with a lower computational complexity and lower conservatism. Firstly, in response to the problem of high computational complexity caused by the high dimensionality of the system matrix in the frequency control of power systems, model reconstruction technology is used to reduce the system matrix's dimensionality, thus achieving the goal of reducing computational complexity. Secondly, in view of the problem of an excessive use of state variables in current analysis methods for time-varying delay power system frequency control, which leads to high dimensions and computational complexity, a delay-dependent stability analysis method has been proposed for frequency control systems based on free matrix integral inequalities, thus obtaining a linear time-varying delay-dependent stability criterion with lower dimensions and computational complexity. Finally, on the basis of the single area load frequency control system, it has been verified that the proposed analysis method is characterized with a higher calculation efficiency but a lower conservatism.

**Keywords:** power system; frequency control; model reconstruction; delay-dependent; computational complexity

收稿日期: 2023-02-17

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (2173136); 湖南省自然科学基金资助项目 (2021JJ50047)

作者简介: 黄浪尘, 男, 湖南工业大学讲师, 主要研究方向为现代控制理论及其应用, E-mail: 1721847840@qq.com

通信作者: 王 炜, 女, 湖南工业大学副教授, 硕士生导师, 主要研究方向为时滞系统, 电力系统,

E-mail: wangwei9804@163.com

## 1 研究背景

随着互联电网的日益成熟,我国现代化电力系统的建设正以前所未有的速度推进。广域测量技术(wide area measurement systems, WAMS)的引入,为电力系统的监控提供了宝贵的数据支持,这对于维护系统的稳定运行至关重要<sup>[1]</sup>。不过,当该技术依赖于开放式通信网络进行数据传输时,不可避免地会遇到传输延迟的问题。这种延迟可能会对电力系统的运行效率产生负面影响,严重时甚至可能威胁到整个系统的安全与稳定<sup>[2-3]</sup>。因此,开展考虑传输时滞影响的高维电力系统稳定性分析和控制研究,不仅具有理论价值,更具有实际应用的重要性<sup>[4-10]</sup>。

众所周知,电力系统的高维度会增加电网频率控制时滞相关稳定判据的计算复杂度。为了降低计算复杂度,大量学者对时滞电力系统电网频率控制进行了研究。通过分析频率控制系统的结构特征,文献[11]将推导出的线性矩阵不等式(LMI)条件转变成几个低维线性矩阵不等式条件,达到降低计算复杂度的目的。文献[12]通过重新调整系统中的时滞相关状态向量和时滞无关状态向量的位置,将整个系统划分为时滞相关和时滞无关的两个部分。这种方法使得系统分析更加清晰,并且能够针对时滞相关部分构建Lyapunov泛函。为了进一步简化计算过程,文献[13]采用了模型重构技术,将原系统矩阵等价地分解为时滞相关和时滞无关状态。这种重构不仅保持了系统的等价性,而且通过分离时滞相关和时滞无关的部分,使得稳定性分析更加高效。

随着时滞相关稳定判据的发展,本课题组发现,具有低保守性的稳定判据往往具有较高的计算复杂度。例如,文献[14]基于简单型泛函以及Jensen积分不等式<sup>[15]</sup>与逆凸不等式<sup>[16]</sup>的组合,提出了具有较低计算复杂度的时变时滞相关稳定条件,并分析了时滞对具有非线性扰动的电网频率控制的影响。为了降低时变时滞相关稳定判据的保守性,文献[17]基于增广型泛函,以及二阶Bessel-Legendre积分不等式<sup>[18]</sup>与逆凸不等式的组合,推导得出了具有较高计算复杂度的时滞相关稳定判据。

基于上述讨论,本文首先采用了基于转换矩阵的模型重构技术,对电网频率控制系统进行了降维处理。这一步骤旨在简化系统的复杂性,从而提高稳定判据的计算速度。通过这种降维处理,我们能够更高效地分析和理解系统的稳定性特性。为了进一步降低稳定分析的计算复杂度,本文在降维后的系统方程基础上,提出了一种创新的稳定分析方法,这种方法的

优势在于能够有效避免引入额外的状态向量,显著减少稳定判据中所需的决策变量数量。这意味着在进行线性矩阵不等式(LMI)求解时,所涉及的矩阵维度会更低,从而进一步降低了计算的复杂度。最后,仿真实验结果验证了本文所提方法的有效性。

在本文中, $R^{-1}$ 和 $R^T$ 分别表示矩阵 $R$ 的逆和转置; $\mathbb{R}^n$ 为 $n$ 维欧几里得空间; $R \in \mathbb{R}^{n \times m}$ 说明矩阵 $R$ 是属于 $n \times m$ 维的实矩阵; $R > 0$ 表示 $R$ 是正定矩阵; $\text{diag}\{\dots\}$ 表示块对角矩阵; $I$ 和 $0$ 分别代表单位矩阵和零矩阵; $*$ 表示对称矩阵中的对称项; $\text{He}\{X\}$ 表示矩阵 $X$ 与其转置之和。

## 2 考虑时滞的单区域电网频率控制系统

### 2.1 原系统

本研究考虑如图1所示的单区域电网频率控制系统。

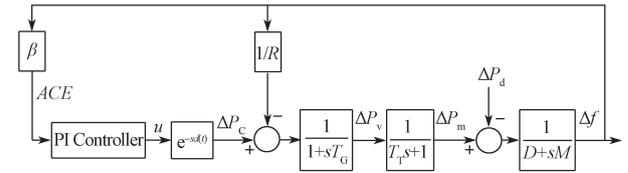


图1 单区域电网频率控制系统的动态模型

Fig. 1 Dynamic model of single-area grid frequency control systems

因此,系统状态空间模型可以表示如下:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t-d(t)) + F\Delta P_d, \\ y(t) = Cx(t). \end{cases} \quad (1)$$

式中:  $x(t) = [\Delta f \ \Delta P_m \ \Delta P_v \ \int ACE]^T$ ;

$$y(t) = [ACE \ \int ACE]^T; \quad C = \begin{bmatrix} \beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{D}{M} & \frac{1}{M} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{T_T} & \frac{1}{T_T} & 0 \\ -\frac{1}{T_G R} & 0 & -\frac{1}{T_G} & 0 \\ \beta & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{T_G} & 0 \end{bmatrix}^T; \quad F = \begin{bmatrix} -\frac{1}{M} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T。$$

单区域电网频率控制系统中没有电能的交换,因此,区域控制误差定义为

$$ACE = \beta \Delta f. \quad (2)$$

使用区域控制误差作为控制输入, 则PI控制器如下:

$$u(t) = -K_p ACE - K_i \int ACE = -K y(t) = -K C x(t). \quad (3)$$

式中  $K = [K_p \quad K_i]$ , 其中  $K_p$  和  $K_i$  分别为比例控制增益和积分控制增益。

考虑到输入变量的传输时延  $d(t)$ , 假设输入信号传输时延满足  $d(t) \leq h$ ,  $h$  为时滞稳定裕度。因此, 电网频率控制系统在平衡点处的状态方程可转换为

$$\dot{x}(t) = A x(t) + A_d x(t-d(t)). \quad (4)$$

$$\text{式中 } A_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\beta K_p}{T_G} & 0 & 0 & \frac{K_i}{T_G} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

上述各符号代表的实际参数意义如表1所示。

表1 各符号的实际参数意义

Table 1 Meaning of notations

符号	实际参数意义	符号	实际参数意义
$\Delta P_v$	汽门控制阀开度变化量	$M$	发电机转动惯量
$\Delta P_m$	机械功率变化量	$\Delta P_d$	电网负荷变化量
$T_T$	汽轮机惯性时间常数	$\Delta P_c$	系统控制信号
$\Delta f$	系统频率变化量	$T_G$	惯性时间常数
$D$	发电机阻尼系数	$R$	调速器速度跌落系数

系统相关参数值如表2所示。

表2 系统参数值

Table 2 System parameter values

$T_T$	$D$	$M$	$R$	$T_G$	$\beta$
0.3	1	10	0.05	0.1	21

## 2.2 变换后的系统

注意到系统矩阵  $A$  和  $A_d$  中存在大量的零元素, 这表明这两个矩阵都是稀疏的。在以往的研究中, 稳定性判据通常是针对整个系统矩阵来推导的。这种方法导致稳定性判据中的线性矩阵不等式条件具有较高的维度, 并且矩阵变量的数量也相对较多, 这无疑增加了计算的复杂性。

然而, 通过深入分析发现, 线性矩阵不等式条件的维度和变量数量主要与时滞相关项有关。在高维时滞电力系统中, 与时滞直接相关的系统状态变量实际上只占很小的一部分。基于这一发现, 可以采用基于矩阵变换的模型重构技术, 将系统等价地分解为时滞相关部分和时滞无关部分。这种分解策略旨在降低时滞相关项的维度, 从而简化稳定性分析和控制设计。具体过程如下:

首先, 根据系统矩阵  $A_d$  找出系统模型中的时滞

相关状态向量  $x_1(t) = [\Delta f, \int ACE]^T$ , 时滞无关的状态向量  $x_2(t) = [\Delta P_m, \Delta P_v]^T$ 。因此, 系统(4)可重新描述为以下形式:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = A_{11} x_1(t) + A_{12} x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = A_{21} x_1(t) + A_{22} x_2(t) + \bar{A}_d x_1(t-d(t)). \end{cases} \quad (5)$$

系统(5)等价于如下系统:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \bar{A}_d & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t-d(t)) \\ x_2(t-d(t)) \end{bmatrix}. \quad (6)$$

系统(6)是由系统(4)经过非奇异变换得到的,

$[x_1(t), x_2(t)]^T = T x(t)$ ,  $T$  为非奇异转换矩阵。转换矩阵  $T$  的求解及降维步骤如下:

**步骤1** 找出时滞相关状态向量  $x_1(t) \in \mathbb{R}^{n_1}$ , 时滞无关状态向量  $x_2(t) \in \mathbb{R}^{n_2}$  以及系统矩阵  $A_d$  中非零的列, 列数用  $a_k$  表示,  $a_k \in \{1, 2, \dots, n_1+n_2\}$ ,  $A_d$  中其他列数用  $b_k$  表示,  $b_k \in \{1, 2, \dots, n_1+n_2\}$ ,  $a_k \neq b_k$ 。

**步骤2** 定义非奇异转换矩阵  $T$ , 由  $[x_1(t), x_2(t)]^T = T x(t)$  可知,  $T$  将状态向量  $x(t)$  重新排序, 将时滞状态移动到前面, 因此,

$$T = [E_{a_1}, E_{a_2}, \dots, E_{a_{n_1}}, E_{b_1}, E_{b_2}, \dots, E_{b_{n_2}}]^T,$$

式中  $E_k = [0_{1 \times (k-1)}, 1, 0_{1 \times (n_1+n_2-k)}]^T$ 。

**步骤3** 计算系统(6)的系统矩阵, 由

$[x_1(t), x_2(t)]^T = T x(t)$  可得:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = T A T^{-1} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + T A_d T^{-1} \begin{bmatrix} x_1(t-d(t)) \\ x_2(t-d(t)) \end{bmatrix},$$

式中:  $\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = T A T^{-1}$ ,  $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \bar{A}_d & 0 \end{bmatrix} = T A_d T^{-1}$ 。

因此, 由上述步骤可求得系统(6)的系统矩阵和转换矩阵。根据求得的降维系统可知  $n_1=n_2$ , 因此, 本文中的系统维数统一用  $n$  表示, 并且有  $n_1=n_2=n$ 。

## 3 基于时滞项分离的降维模型和自由矩阵积分不等式方法的稳定判据

基于上节中给出的对时滞相关分离后的降维模型, 本文将分别针对定常时滞和时变时滞建立不同的稳定判据。本文主要结论的推导过程中, 需要用到以下引理。

**引理1**<sup>[19]</sup> 令  $x$  为区间  $[\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^n$  上的任意可

微函数, 则有正定矩阵  $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  以及任意矩阵  $\mathbf{N}_1$ 、 $\mathbf{N}_2$  和  $\mathbf{N}_3 \in \mathbb{R}^{(mn) \times n}$ , 使得以下不等式成立:

$$-\int_{\alpha}^{\beta} \dot{\mathbf{x}}^T(s) \mathbf{R} \dot{\mathbf{x}}(s) ds \leq \Psi^{\circ} \quad (8)$$

式中:

$$\Psi = \tau \theta^T \left( \mathbf{N}_1 \mathbf{R}^{-1} \mathbf{N}_1^T + \frac{1}{3} \mathbf{N}_2 \mathbf{R}^{-1} \mathbf{N}_2^T + \frac{1}{5} \mathbf{N}_3 \mathbf{R}^{-1} \mathbf{N}_3^T \right) \theta + \text{He} \{ \theta^T (\mathbf{N}_1 \omega_1 + \mathbf{N}_2 \omega_2 + \mathbf{N}_3 \omega_3) \};$$

其中,  $\tau = \beta - \alpha$ ;  $\omega_1 = \mathbf{x}(\beta) - \mathbf{x}(\alpha)$ ;

$$\omega_2 = \mathbf{x}(\beta) + \mathbf{x}(\alpha) - \frac{2}{\tau} \int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{x}(s) ds;$$

$$\omega_3 = \mathbf{x}(\beta) - \mathbf{x}(\alpha) + \frac{6}{\tau} \int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{x}(s) ds - \frac{12}{\tau^2} \int_{\alpha}^{\beta} \int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{x}(s) ds du;$$

$\theta$  为对应  $\mathbf{N}_1$ 、 $\mathbf{N}_2$  和  $\mathbf{N}_3$  矩阵维度的向量。

首先, 针对具有定常时滞  $d(t) = h$  的电网频率控制系统, 采用引理 1 给出的二阶自由矩阵积分不等式, 可以获得以下稳定判据。

**定理 1** 给定  $h > 0$ , 若存在正定矩阵  $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{4n \times 4n}$ ,  $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{3n \times 3n}$  和  $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , 以及任意矩阵  $\mathbf{N}_1$ 、 $\mathbf{N}_2$  和  $\mathbf{N}_3 \in \mathbb{R}^{5n \times n}$ , 使得以下线性矩阵不等式成立:

$$\begin{bmatrix} \Phi & \sqrt{h} \mathbf{N}_1 & \sqrt{h} \mathbf{N}_2 & \sqrt{h} \mathbf{N}_3 \\ * & -\mathbf{R} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ * & * & -3\mathbf{R} & \mathbf{0} \\ * & * & * & -5\mathbf{R} \end{bmatrix} < 0, \quad (9)$$

则电网频率控制系统 (4) 是渐近稳定的。

式 (9) 中,

$$\Phi = \text{He} \{ \Pi_1^T \mathbf{P} \Pi_2 + \Pi_5^T \mathbf{Q} \Pi_6 + \mathbf{N}_1 \Pi_7 + \mathbf{N}_2 \Pi_8 + \mathbf{N}_3 \Pi_9 \} + \Pi_3^T \mathbf{Q} \Pi_3 - \Pi_4^T \mathbf{Q} \Pi_4 + h \Gamma_1^T \mathbf{R} \Gamma_1;$$

$$\Pi_1 = [e_1^T \ e_2^T \ h e_4^T \ h^2 e_5^T]^T;$$

$$\Pi_2 = [\Gamma_1^T \ \Gamma_2^T \ e_1^T - e_3^T \ h e_1^T - h e_4^T]^T;$$

$$\Pi_3 = [e_1^T \ e_1^T \ \mathbf{0}]^T; \quad \Pi_4 = [e_1^T \ e_3^T \ h e_4^T]^T;$$

$$\Pi_5 = [\Gamma_1^T \ \mathbf{0} \ e_1^T]^T; \quad \Pi_6 = [h e_1^T \ h e_4^T \ h^2 e_5^T]^T;$$

$$\Pi_7 = e_1 - e_3; \quad \Pi_8 = e_1 + e_3 - 2e_4;$$

$$\Pi_9 = e_1 - e_3 + 6e_4 - 12e_5; \quad \Gamma_1 = A_{11} e_1 + A_{12} e_2;$$

$$\Gamma_2 = A_{21} e_1 + A_{22} e_2 + \bar{A}_d e_3;$$

$$e_i = [\mathbf{0}_{n \times (i-1)n} \ \mathbf{I}_n \ \mathbf{0}_{n \times (5-i)n}]^T, \quad i=1, 2, 3, 4, 5.$$

**证明** 首先, 构造如下 Lyapunov 泛函:

$$V(t) = \zeta_1^T(t) \mathbf{P} \zeta_1(t) + \int_{t-d}^t \zeta_2^T(t, s) \mathbf{Q} \zeta_2(t, s) ds + \int_{-d}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{\mathbf{x}}_1^T(s) \mathbf{R} \dot{\mathbf{x}}_1(s) ds d\theta. \quad (10)$$

式中:

$$\zeta_1(t) = \left[ \mathbf{x}_1^T(t) \ \mathbf{x}_2^T(t) \ \int_{t-h}^t \mathbf{x}_1^T(s) ds \ \int_{t-h}^t \int_u^t \mathbf{x}_1^T(s) ds du \right]^T;$$

$$\zeta_2(t, s) = \left[ \mathbf{x}_1^T(t) \ \mathbf{x}_1^T(s) \ \int_s^t \mathbf{x}_1^T(\theta) d\theta \right]^T,$$

$$\zeta_2(t) = \left[ \mathbf{x}_1^T(t) \ \mathbf{x}_2^T(t) \ \mathbf{x}_1^T(t-h) \ \frac{1}{h} \int_{t-h}^t \mathbf{x}_1^T(s) ds \ \frac{1}{h^2} \int_{t-h}^t \int_u^t \mathbf{x}_1^T(s) ds du \right]^T.$$

对式 (10) 求导得:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= 2 \zeta_1^T(t) \mathbf{P} \dot{\zeta}_1(t) + \zeta_2^T(t, t) \mathbf{Q} \zeta_2(t, t) - \\ &\zeta_2^T(t, t-h) \mathbf{Q} \zeta_2(t, t-h) + 2 \zeta_2^T(t, s) \mathbf{Q} \int_{t-h}^t \zeta_2(t, s) ds + \\ &h \dot{\mathbf{x}}_1^T(s) \mathbf{R} \dot{\mathbf{x}}_1(s) - \int_{t-h}^t \dot{\mathbf{x}}_1^T(s) \mathbf{R} \dot{\mathbf{x}}_1(s) ds = \\ &\zeta^T(t) \left[ \text{He} \{ \Pi_1^T \mathbf{P} \Pi_2 + \Pi_5^T \mathbf{Q} \Pi_6 \} + \Pi_3^T \mathbf{Q} \Pi_3 - \right. \\ &\left. \Pi_4^T \mathbf{Q} \Pi_4 + h \Gamma_1^T \mathbf{R} \Gamma_1 \right] \zeta(t) - \int_{t-h}^t \dot{\mathbf{x}}_1^T(s) \mathbf{R} \dot{\mathbf{x}}_1(s) ds. \end{aligned}$$

对上式最后的二次型积分项用自由矩阵积分不等式进行界定, 可得:

$$-\int_{t-h}^t \dot{\mathbf{x}}_1^T(s) \mathbf{R} \dot{\mathbf{x}}_1(s) ds \leq \zeta^T(t) \left[ h \left( \mathbf{N}_1 \mathbf{R}^{-1} \mathbf{N}_1^T + \frac{1}{3} \mathbf{N}_2 \mathbf{R}^{-1} \mathbf{N}_2^T + \frac{1}{5} \mathbf{N}_3 \mathbf{R}^{-1} \mathbf{N}_3^T \right) + \text{He} \{ \mathbf{N}_1 \Pi_7 + \mathbf{N}_2 \Pi_8 + \mathbf{N}_3 \Pi_9 \} \right] \zeta(t),$$

因此,

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &\leq \zeta^T(t) \left[ \text{He} \{ \Pi_1^T \mathbf{P} \Pi_2 + \Pi_5^T \mathbf{Q} \Pi_6 + \mathbf{N}_1 \Pi_7 + \mathbf{N}_2 \Pi_8 + \right. \\ &\left. \mathbf{N}_3 \Pi_9 \} + \Pi_3^T \mathbf{Q} \Pi_3 - \Pi_4^T \mathbf{Q} \Pi_4 + d \Gamma_1^T \mathbf{R} \Gamma_1 + \right. \\ &\left. h \left( \mathbf{N}_1 \mathbf{R}^{-1} \mathbf{N}_1^T + \frac{1}{3} \mathbf{N}_2 \mathbf{R}^{-1} \mathbf{N}_2^T + \frac{1}{5} \mathbf{N}_3 \mathbf{R}^{-1} \mathbf{N}_3^T \right) \right] \zeta(t). \end{aligned}$$

由 Schur 补引理可知, 若式 (9) 成立, 则  $\dot{V}(t) < 0$ , 由 Lyapunov 稳定性理论可知, 系统渐近稳定, 证毕。

定理 1 给出了降维电网频率控制系统的定常时滞相关稳定判据。针对现有线性时变时滞相关稳定判据具有高计算复杂度的问题, 本文基于引理 1 得出以下降维电网频率控制系统的时滞相关稳定判据。

**定理 2** 给定  $h > 0$ , 若存在正定矩阵  $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{4n \times 4n}$ ,  $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{3n \times 3n}$  和  $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , 以及任意矩阵  $\bar{\mathbf{N}}_1$ 、 $\bar{\mathbf{N}}_2$ 、 $\bar{\mathbf{N}}_3$ 、 $\mathbf{M}_1$ 、 $\mathbf{M}_2$  和  $\mathbf{M}_3 \in \mathbb{R}^{8n \times n}$ , 使得以下矩阵不等式成立:

$$\begin{bmatrix} \bar{\Phi}(0) & \sqrt{h} \bar{\mathbf{N}}_1 & \sqrt{h} \bar{\mathbf{N}}_2 & \sqrt{h} \bar{\mathbf{N}}_3 \\ * & -\mathbf{R} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ * & * & -3\mathbf{R} & \mathbf{0} \\ * & * & * & -5\mathbf{R} \end{bmatrix} < 0, \quad (11)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{\Phi}(h) & \sqrt{h}M_1 & \sqrt{h}M_2 & \sqrt{h}M_3 \\ * & -R & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ * & * & -3R & \mathbf{0} \\ * & * & * & -5R \end{bmatrix} < 0, \quad (12)$$

则频率控制系统(4)是渐近稳定的。

式(11)~(12)中:

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}(d(t)) = & \text{He}\{\bar{\Pi}_1^T P \bar{\Pi}_2 + \bar{\Pi}_5^T Q \bar{\Pi}_6 + M_1 \bar{\Pi}_7 + M_2(\bar{\Pi}_8 - \\ & 2\bar{e}_5) + M_3(\bar{\Pi}_7 + 6\bar{e}_5 - 12\bar{e}_7) + \bar{N}_1 \bar{\Pi}_9 + \\ & \bar{N}_2(\bar{\Pi}_{10} - 2\bar{e}_6) + \bar{N}_3(\bar{\Pi}_9 + 6\bar{e}_6 - 12\bar{e}_8)\} + \\ & \bar{\Pi}_3^T Q \bar{\Pi}_3 - \bar{\Pi}_4^T Q \bar{\Pi}_4 + h \bar{\Gamma}_1^T R \bar{\Gamma}_1; \end{aligned}$$

$$\bar{\Pi}_1 = [\bar{e}_1^T \quad \bar{e}_2^T \quad \bar{e}_5^T + \bar{e}_6^T \quad (h-d(t))^2(\bar{e}_5^T + \bar{e}_8^T) + d^2(t)\bar{e}_7^T]^T;$$

$$\bar{\Pi}_2 = [\bar{\Gamma}_1^T \quad \bar{\Gamma}_2^T \quad \bar{e}_1^T - \bar{e}_4^T \quad h\bar{e}_1^T - \bar{e}_5^T - \bar{e}_6^T]^T;$$

$$\bar{\Pi}_3 = [\bar{e}_1^T \quad \bar{e}_1^T \quad \mathbf{0}]^T; \quad \bar{\Pi}_4 = [\bar{e}_1^T \quad \bar{e}_4^T \quad \bar{e}_5^T + \bar{e}_6^T]^T;$$

$$\bar{\Pi}_5 = [h\bar{e}_1^T \quad \bar{e}_5^T + \bar{e}_6^T \quad (h-d(t))^2(\bar{e}_5^T + \bar{e}_8^T) + d^2(t)\bar{e}_7^T]^T;$$

$$\bar{\Pi}_6 = [\bar{\Gamma}_1^T \quad \mathbf{0} \quad \bar{e}_1^T]^T; \quad \bar{\Pi}_7 = \bar{e}_1 - \bar{e}_3; \quad \bar{\Pi}_8 = \bar{e}_1 + \bar{e}_3;$$

$$\bar{\Pi}_9 = \bar{e}_3 - \bar{e}_4; \quad \bar{\Pi}_{10} = \bar{e}_3 + \bar{e}_4; \quad \bar{\Gamma}_1 = A_{11}\bar{e}_1 + A_{12}\bar{e}_2;$$

$$\bar{\Gamma}_2 = A_{21}\bar{e}_1 + A_{22}\bar{e}_2 + \bar{A}_d\bar{e}_3; \quad \bar{e}_i = [\mathbf{0}_{n \times (i-1)n} \quad I_n \quad \mathbf{0}_{n \times (8-i)n}]^T, \\ i=1, 2, \dots, 8.$$

证明 构造和定理1相同的 Lyapunov 泛函,

其中:

$$\bar{\zeta}(t) = [\bar{\zeta}_1 \quad \bar{\zeta}_2 \quad \bar{\zeta}_3 \quad \bar{\zeta}_4 \quad \bar{\zeta}_5 \quad \bar{\zeta}_6 \quad \bar{\zeta}_7 \quad \bar{\zeta}_8],$$

式中:

$$\bar{\zeta}_1 = \mathbf{x}_1^T(t); \quad \bar{\zeta}_2 = \mathbf{x}_2^T(t); \quad \bar{\zeta}_3 = \mathbf{x}_1^T(t-d(t)); \quad \bar{\zeta}_4 = \mathbf{x}_1^T(t-h);$$

$$\bar{\zeta}_5 = \frac{1}{d(t)} \int_{t-d(t)}^t \mathbf{x}_1^T(s) ds; \quad \bar{\zeta}_6 = \frac{1}{h-d(t)} \int_{t-h}^{t-d(t)} \mathbf{x}_1^T(s) ds;$$

$$\bar{\zeta}_7 = \frac{1}{d^2(t)} \int_{t-d(t)}^t \int_u^t \mathbf{x}_1^T(s) ds du;$$

$$\bar{\zeta}_8 = \frac{1}{(h-d(t))^2} \int_{t-h}^{t-d(t)} \int_u^{t-d(t)} \mathbf{x}_1^T(s) ds du.$$

对式(10)求导得:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) = & 2\bar{\zeta}_1^T(t)P\dot{\bar{\zeta}}_1(t) + \bar{\zeta}_2^T(t,t)Q\dot{\bar{\zeta}}_2(t,t) - \\ & \bar{\zeta}_2^T(t,t-h)Q\dot{\bar{\zeta}}_2(t,t-h) + 2\bar{\zeta}_2^T(t,s)Q\int_{t-h}^t \dot{\bar{\zeta}}_2(t,s)ds + \\ & h\dot{\mathbf{x}}_1^T(s)R\dot{\mathbf{x}}_1(s) - \int_{t-h}^t \dot{\mathbf{x}}_1^T(s)R\dot{\mathbf{x}}_1(s)ds = \\ & \bar{\zeta}^T(t) \left[ \text{He}\{\bar{\Pi}_1^T P \bar{\Pi}_2 + \bar{\Pi}_5^T Q \bar{\Pi}_6\} + \bar{\Pi}_3^T Q \bar{\Pi}_3 - \right. \\ & \left. \bar{\Pi}_4^T Q \bar{\Pi}_4 + h \bar{\Gamma}_1^T R \bar{\Gamma}_1 \right] \bar{\zeta}(t) - \int_{t-h}^t \dot{\mathbf{x}}_1^T(s)R\dot{\mathbf{x}}_1(s)ds, \end{aligned}$$

因为,

$$-\int_{t-h}^t \dot{\mathbf{x}}_1^T(s)R\dot{\mathbf{x}}_1(s)ds = -\int_{t-d(t)}^t \dot{\mathbf{x}}_1^T(s)R\dot{\mathbf{x}}_1(s)ds -$$

$$\int_{t-h}^{t-d(t)} \dot{\mathbf{x}}_1^T(s)R\dot{\mathbf{x}}_1(s)ds,$$

$$\text{令 } J_1 = -\int_{t-d(t)}^t \dot{\mathbf{x}}_1^T(s)R\dot{\mathbf{x}}_1(s)ds, \quad J_2 = -\int_{t-h}^{t-d(t)} \dot{\mathbf{x}}_1^T(s)R\dot{\mathbf{x}}_1(s)ds,$$

对这两项应用引理2给出的自由矩阵积分不等式进行处理, 可得:

$$\begin{aligned} J_1 \leq & \bar{\zeta}^T(t) \left[ d(t) \left( M_1 R^{-1} M_1^T + \frac{1}{3} M_2 R^{-1} M_2^T + \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{1}{5} M_3 R^{-1} M_3^T \right) + \text{He}\{M_1 \bar{\Pi}_7 + M_2(\bar{\Pi}_8 - 2\bar{e}_5) + \right. \\ & \left. M_3(\bar{\Pi}_7 + 6\bar{e}_5 - 12\bar{e}_7)\} \right] \bar{\zeta}(t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_2 \leq & \bar{\zeta}^T(t) \left[ (h-d(t)) \left( \bar{N}_1 R^{-1} \bar{N}_1^T + \frac{1}{3} \bar{N}_2 R^{-1} \bar{N}_2^T + \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{1}{5} \bar{N}_3 R^{-1} \bar{N}_3^T \right) + \text{He}\{\bar{N}_1 \bar{\Pi}_9 + \bar{N}_2(\bar{\Pi}_{10} - \right. \\ & \left. 2\bar{e}_6) + \bar{N}_3(\bar{\Pi}_9 + 6\bar{e}_6 - 12\bar{e}_8)\} \right] \bar{\zeta}(t). \end{aligned}$$

因此,

$$\dot{V}(t) \leq \bar{\zeta}^T(t) [\bar{\Phi}(d(t)) + \Phi_a] \bar{\zeta}(t).$$

其中,  $\bar{\Phi}(d(t))$  定义于定理2,

$$\begin{aligned} \Phi_a = & d(t) \left( M_1 R^{-1} M_1^T + \frac{1}{3} M_2 R^{-1} M_2^T + \right. \\ & \left. \frac{1}{5} M_3 R^{-1} M_3^T \right) + (h-d(t)) \times \\ & \left( \bar{N}_1 R^{-1} \bar{N}_1^T + \frac{1}{3} \bar{N}_2 R^{-1} \bar{N}_2^T + \frac{1}{5} \bar{N}_3 R^{-1} \bar{N}_3^T \right). \end{aligned}$$

因为上式中  $\bar{\Phi}(d(t))$  是关于时变时滞  $d(t) \in [0, h]$  的矩阵不等式, 由 Schur 补引理可知, 若式(11)和式(12)同时成立, 则  $\dot{V}(t) < 0$ , 由 Lyapunov 稳定性理论可知, 系统渐近稳定, 证毕。

## 4 数值仿真与验证

为了展示所提方法的优越性, 本文在分析电网频率控制的时滞稳定裕度的同时还讨论了不同的 PI 参数对时滞稳定裕度的影响。最后, 通过 Simulink 平台进行了仿真实验。

基于所提稳定判据, 本文得出不同 PI 参数情况下, 时变时滞和定常时滞两种情况时的时滞稳定裕度, 将所得结果列于表3和表4中。从表3中可以看出: 在相同大小的比例增益  $K_p$  下, 时滞稳定裕度积分增益  $K_i$  的增加而减小; 在积分增益  $K_i$  不变的条件下, 随着比例增益  $K_p$  的增加先增后减。

上述发现的时滞稳定裕度随着比例增益的增加先增后减的现象，与文献 [4] 中描述的复杂无规律性完全不同。

表 3 不同 PI 控制器对应的定常时滞稳定裕度

Table 3 Constant delay stability margin for different PI controllers s

$K_p$	$K_i$					s
	0.1	0.2	0.4	0.6	0.8	
0.1	16.11	7.79	3.61	2.19	1.46	1.01
0.2	16.85	8.16	3.79	2.31	1.55	1.07
0.4	17.65	8.55	3.98	2.42	1.62	1.11
0.6	17.19	8.31	3.82	2.28	1.46	0.94
0.8	14.42	6.85	2.91	1.24	0.72	0.55
1.0	0.58	0.56	0.51	0.46	0.41	0.36

表 4 不同 PI 控制器对应的时变时滞稳定裕度

Table 4 Time-varying delay stability margin for different PI controllers s

$K_p$	$K_i$					s
	0.1	0.2	0.4	0.6	0.8	
0.1	9.93	6.70	3.12	1.85	1.18	0.76
0.2	5.26	4.82	3.15	1.92	1.23	0.80
0.4	2.49	2.43	2.16	1.60	1.04	0.71
0.6	1.12	1.08	0.94	0.78	0.63	0.51
0.8	0.60	0.58	0.53	0.48	0.42	0.37
1.0	0.41	0.40	0.37	0.34	0.31	0.28

通过对比可以得知，表 3 和表 4 中的结果比文献 [4]、文献 [13] 和文献 [17] 中的结果都要大。因此，在相同的 PI 控制增益条件下，本文的稳定性判据具有更低的保守性。另外，为了更好地证明本文的方法具有更低的计算复杂度，稳定性判据中的决策变量数如表 5 所示。本文中，计算复杂度将以线性矩阵不等式中的矩阵变量数作为参考。

表 5 稳定性判据中的决策变量数

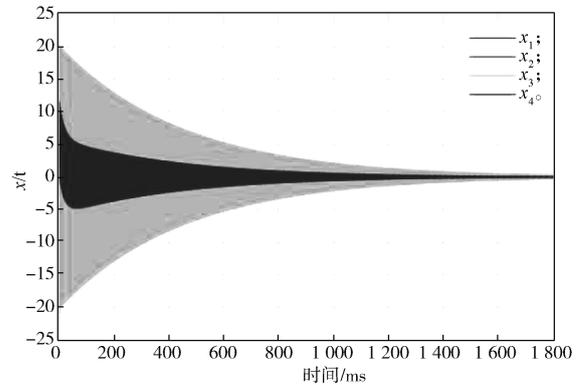
Table 5 Decision variables of the stability criteria

方法	定常时滞 /s	时变时滞 /s
文献 [17]	1 404	1 404
本文	120	273

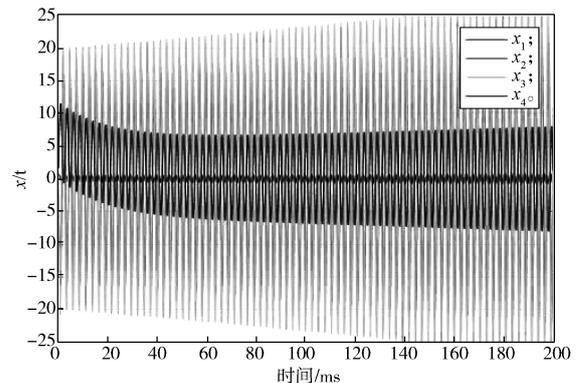
根据表 5 可知：本文定常时滞稳定判据的计算复杂度仅不足文献 [17] 计算复杂度的 1/10；相比文献 [17]，本文提出的时滞稳定判据的决策变量数大大减小，意味着本文提出的稳定判据的计算复杂度将大大降低。这充分说明了本文的分析方法显著提升了计算效率，这一点在系统维度较高时尤为突出。随着系统规模的扩大，传统方法在处理大规模数据时往往会遇到瓶颈，而本文的方法能够有效克服这一问题，

显示出其高维电力系统分析中的独特优势。

为验证所提出方法的有效性，采用 Simulink 平台进行仿真实验。从表 3 可知：当  $K_i=0.1$  以及  $K_p=1.0$  时的定常时滞稳定裕度为 0.58 s。分别对时滞为 0.58 s 和 0.59 s 两种情况进行仿真，仿真结果见图 2。



a)  $h=0.58$  s



b)  $h=0.59$  s

图 2 定常时滞  $h=0.58, 0.59$  s 时的系统响应曲线

Fig. 2 System response curves with constant delay  $h=0.58, 0.59$  s

从图 2 中可以看出，当时滞为 0.58 s 时系统可以保持稳定，但当时滞增大到 0.59 s 时系统变得不稳定。由此可见，本文的方法在降低计算复杂度的同时，还能保证分析计算结果具有较小的保守性。

## 5 结语

本文研究了电网频率控制系统的时滞相关稳定性问题。针对现有电网频率控制系统所面临的高维度挑战，本文采用了基于转换矩阵的模型重构技术，对单区域 PI 型电网频率控制系统中的时滞相关项和时滞无关项进行分离，降低了时滞相关项的状态维数，显著减少了系统分析计算的工作量。其次，分别针对定常时滞和时变时滞两种条件，建立了新的稳定判据，进一步降低了分析方法的计算复杂度。最后，通过仿真验证了所提方法的有效性。

## 参考文献:

- [1] ZENG H B, ZHOU S J, ZHANG X M, et al. Delay-Dependent Stability Analysis of Load Frequency Control Systems with Electric Vehicles[J]. IEEE Trans Cybernetics, 2022, 52(2): 13645–13653.
- [2] 钱伟, 蒋鹏冲. 时滞电力系统带记忆反馈控制方法[J]. 电网技术, 2017, 41(11): 3605–3611.  
QIAN Wei, JIANG Pengchong. A Method of Memory Feedback Control for Power System with Time-Delay[J]. Power System Technology, 2017, 41(11): 3605–3611.
- [3] 姚伟. 时滞电力系统稳定性分析与网络预测控制研究[D]. 武汉: 华中科技大学, 2010.  
YAO Wei. Study on Stability Analysis and Network Predictive Control of Time-Delay Power System[D]. Wuhan: Huazhong University of Science and Technology, 2010.
- [4] 张传科. 时滞电力系统的小扰动稳定分析与负荷频率控制[D]. 长沙: 中南大学, 2013.  
ZHANG Chuanke. Small Signal Stability Analysis and Load Frequency Control of Time-Delay Power System[D]. Changsha: Central South University, 2013.
- [5] 贾宏杰, 安海云, 余晓丹. 电力系统时滞依赖型鲁棒稳定判据及其应用[J]. 电力系统自动化, 2010, 34(3): 6–11.  
JIA Hongjie, AN Haiyun, YU Xiaodan. A Delay-Dependent Robust Stability Criterion for Power System and Its Application[J]. Automation of Electric Power Systems, 2010, 34(3): 6–11.
- [6] SUN Q, AN H Y, JIA H J, et al. An Improved Power System Stability Criterion with Multiple Time Delays[C]//2009 IEEE Power & Energy Society General Meeting. Calgary: IEEE, 2009: 1–7.
- [7] JIANG L, YAO W, WU Q H, et al. Delay-Dependent Stability for Load Frequency Control with Constant and Time-Varying Delays[C]//2009 IEEE Power & Energy Society General Meeting. Calgary: IEEE, 2009: 932–941.
- [8] JIANG L, YAO W, WU Q H, et al. Delay-Dependent Stability for Load Frequency Control with Constant and Time-Varying Delays[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2012, 27(2): 932–941.
- [9] YAO W, JIANG L, WU Q H, et al. Delay-Dependent Stability Analysis of the Power System with a Wide-Area Damping Controller Embedded[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2011, 26(1): 233–240.
- [10] ZHANG C K, JIANG L, WU Q H, et al. Delay-Dependent Robust Load Frequency Control for Time Delay Power Systems[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2013, 28(3): 2192–2201.
- [11] DUAN C, ZHANG C K, JIANG L, et al. Structure-Exploiting Delay-Dependent Stability Analysis Applied to Power System Load Frequency Control[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2017, 32(6), 4528–4540.
- [12] YU X D, JIA H J, WANG C S. CTDAE & CTODE Models and Their Applications to Power System Stability Analysis with Time Delays[J]. Science China Technological Sciences, 2013, 56(5): 1213–1223.
- [13] JIN L, ZHANG C K, HE Y, et al. Delay-Dependent Stability Analysis of Multi-Area Load Frequency Control with Enhanced Accuracy and Computation Efficiency[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2019, 34: 3687–3696.
- [14] RAMAKRISHNAN K, RAY G. Stability Criteria for Nonlinearly Perturbed Load Frequency Systems with Time-Delay[J]. IEEE Journal on Emerging and Selected Topics in Circuits and Systems, 2015, 5: 383–392.
- [15] GU K, KHARITONOV V L, CHEN J. Stability of Time-Delay Systems[M]. Boston: Birkhauser, 2003: 10–20.
- [16] PARK P, KO J W, JEONG C. Reciprocally Convex Approach to Stability of Systems with Time-Varying Delays[J]. Automatica, 2011, 47(1): 235–238.
- [17] YANG F S, HE J, PAN Q. Further Improvement on Delay-Dependent Load Frequency Control of Power Systems Via Truncated B-L Inequality[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2018, 33: 5062–5071.
- [18] SEURET A, GOUAISBAUT F. Hierarchy of LMI Conditions for the Stability Analysis of Time-Delay Systems[J]. Systems & Control Letters, 2015, 81: 1–7.
- [19] ZENG H B, HE Y, WU M, et al. New Results on Stability Analysis for Systems with Discrete Distributed Delay[J]. Automatica, 2015, 60: 189–192.

(责任编辑: 申剑)