doi:10.3969/j.issn.1673-9833.2024.04.013

广义 Birkhoff 系统分数阶最优控制问题的 Noether 定理

贾秋丽[1]，魏风军[2]

（1. 河南科技大学 数学与统计学院，河南 洛阳 471023；
2. 河南科技大学 艺术与设计学院，河南 洛阳 471023）

摘　要：探讨了广义 Birkhoff 系统分数阶最优控制问题的 Noether 定理。首先，基于 Caputo 分数阶导数提出广义 Birkhoff 系统的分数阶最优控制问题，并运用分数阶变分方法得到了广义 Birkhoff 系统的分数阶最优控制问题的极值条件。然后，运用分数阶微积分和分数阶变分方法讨论了泛函在无穷小变换群作用下的不变性，分别给出了其时间不变和时间变化情况下的分数阶最优控制问题的 Noether 定理。最后，应用实例显示方法的有效性。

关键词：广义 Birkhoff 系统；Noether 定理；最优控制；守恒量

中图分类号：O316　　　　**文献标志码**：A　　　　**文章编号**：1673-9833(2024)04-0093-05

引文格式：贾秋丽，魏风军．广义 Birkhoff 系统分数阶最优控制问题的 Noether 定理 [J]. 湖南工业大学学报，2024，38(4)：93-97.

Noether Theorem for Fractional Optimal Control Problems of Generalized Birkhoffian Systems

JIA Qiuli[1]，WEI Fengjun[2]

（1. School of Mathematics and Statistics，Henan University of Science and Technology，Luoyang Henan 471023，China；
2. School of Art and Design，Henan University of Science and Technology，Luoyang Henan 471023，China）

Abstract：An research has been made of the Noether theorem for fractional order optimal control problems of generalized Birkhoff systems. Firstly, based on Caputo fractional derivative, fractional optimal control problems have been proposed for generalized Birkhoff systems, thus obtaining the extremum conditions for fractional optimal control problems of generalized Birkhoff systems by using fractional calculus and fractional variations. Then, an investigation is made of the invariance of functionals under the action of infinitesimal transformation groups by adopting fractional calculus and variational methods, thus providing the Noether theorem for fractional optimal control problems under time invariant and time variation conditions, respectively. Finally, application examples are given to verify the effectiveness of the proposed method.

Keywords：generalized Birkhoff system；Noether theorem；optimal control；conserved quantity

---

收稿日期：2023-04-07

基金项目：国家自然科学基金资助项目（11672032）；河南科技大学博士科研启动基金资助项目（13480065）

作者简介：贾秋丽，女，河南科技大学讲师，博士，主要研究方向为分数阶系统理论与控制，E-mail：hkdjql@163.com

1 研究背景

分数阶微积分是传统微积分的一个扩展，主要研究分数阶导数和分数阶积分。分数阶微积分与经典微分方程理论相结合，产生了分数阶微分方程理论；分数阶微积分与经典变分学相结合，产生了分数阶变分学。分数阶变分学在力学、物理学和工程问题中得到了广泛应用，为描述物理现象提供了更加精确的数学模型 [1]。F. Riewe[2−3]、O. P. Agrawal[4]、T. M. Atanacković[5]、A. R. El-Nabulsi[6] 等对分数阶变分问题进行了深入研究。分数阶微积分、分数阶微分方程理论和分数阶变分学为分数阶系统控制理论的研究提供了数学基础。解决分数阶控制问题时，往往是把所研究的控制系统设定为分数阶系统，然后用分数阶微分方程对其建模。用分数阶微分方程描述能够更合理、更准确地反映系统的动态特性。Noether 定理将对称性、不变性和物理的守恒律联系在一起。分数阶 Noether 定理是分数阶变分学和分数阶系统控制理论中非常重要的结论之一 [7]。 G. S. C. Frederico 和 D. F. M. Torres 最早开展了关于分数阶不变性与守恒量的研究 [8−12]。他们研究了分数阶 Lagrange 系统，并且在时间不变和时间变化的无限小变换群下建立了相应的分数阶 Noether 理论 [8−11]。在此基础上，他们又研究了分数阶 Hamilton 系统，建立了相应的分数阶 Noether 理论 [12]。

近年来，Birkhoff 系统动力学已经成为数学领域和力学领域中一个非常重要的研究方向。Zhang H. B. 等 [13] 研究了分数阶 Birkhoff 系统的 Noether 定理。Jia Q. L. 等 [14] 研究了分数阶受迫 Birkhoff 系统的 Noether 理论。Zhai X. H. 等 [15−17] 研究了含时滞的分数阶 Birkhoff 系统和时间尺度上的 Birkhoff 系统的对称性和守恒量。广义 Birkhoff 系统是一类广泛的动力学系统 [18]，广义 Birkhoff 方程不仅容易实现，且具有更多的“自由度”。对广义 Birkhoff 系统动力学研究具有一定的理论意义和应用价值。因此，本文拟基于 Caputo 分数阶导数，提出广义 Birkhoff 系统的分数阶最优控制问题，探讨广义 Birkhoff 系统的分数阶最优控制问题的极值条件，并研究该分数阶最优控制问题的 Noether 定理。

2 广义 Birkhoff 系统的分数阶最优控制问题

假设 M 是一个 $2n$ 维的位形空间，对于固定的时间区间 $[0, T]$，定义路径空间 $P(M)$ 为

$$P(M)=\{\boldsymbol{a}:[0,T]\to M \mid \boldsymbol{a}(t)\in C^2(M)\},$$

其中 $\boldsymbol{a}=\left(a^1, a^2, \cdots, a^{2n}\right)$ 为 Birkhoff 变量，$C^2(M)$ 为向量空间。基于该路径空间 $P(M)$，广义 Pfaff-Birkhoff 原理 [18] 可表述为如下形式：

$$\int_{t_0}^{t_1}\left[\delta\left(\sum_{\nu=1}^{2n}R_\nu(t,\boldsymbol{a})\dot{\boldsymbol{a}}^\nu-B(t,\boldsymbol{a})\right)+\sum_{\nu=1}^{2n}\Lambda_\nu\delta\boldsymbol{a}^\nu\right]\mathrm{d}t=0\,,\tag{1}$$

式中：$B(t, \boldsymbol{a})$ 为 Birkhoff 函数；$R_\nu(t, \boldsymbol{a})$ 为 Birkhoff 函数组；δ 为变分；Λ_ν 为对应 $\boldsymbol{a}^\nu$ 的广义力。

由广义 Pfaff-Birkhoff 原理，可以得到如下广义 Birkhoff 方程 [18]：

$$\sum_{\nu=1}^{2n}\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu}\right)\dot{\boldsymbol{a}}^\nu-\left(\frac{\partial B}{\partial a^\mu}+\frac{\partial R_\mu}{\partial t}\right)+\Lambda_\mu=0\,,\tag{2}$$

式中 μ=1, 2, ⋯, $2n$。

基于 Caputo 分数阶导数 [4]，本文研究如下广义 Birkhoff 系统的分数阶最优控制问题：求泛函

$$S(\boldsymbol{a},u)=\int_{t_1}^{t_2}\left[\sum_{\nu=1}^{2n}R_\nu\left(t,\boldsymbol{a}\right)u^\nu+G\left(t,\boldsymbol{a}\right)\right]\mathrm{d}t\tag{3}$$

在分数阶微分方程

$${}_{t_1}^{C}D_t^\alpha\boldsymbol{a}(t)=\phi\left(t,\boldsymbol{a}(t),\boldsymbol{u}(t)\right)\tag{4}$$

约束下的极值，其中 $\boldsymbol{a}:\left[t_1,t_2\right]\to\mathbf{R}^{2n}$ 为 Birkhoff 变量，并满足如下边界条件：

$$\delta\boldsymbol{a}^\nu\big|_{t=t_1}=\delta\boldsymbol{a}^\nu\big|_{t=t_2}=0,\ \nu=1,2,\cdots,2n\,。\tag{5}$$

式（3）~（5）中：${}_{t_1}^{C}D_t^\alpha$ 为 α 阶 Caputo 左导数，且 $0<\alpha\leqslant1$； $G\left(t,\boldsymbol{a}\right)=-B\left(t,\boldsymbol{a}\right)+W\left(t,\boldsymbol{a}\right)$，其中 $W\left(t,\boldsymbol{a}\right)$ 为广义力， $\delta W=\sum_{\nu=1}^{2n}\Lambda_\nu\delta\boldsymbol{a}^\nu$ ，函数 G 和 R_ν 是其变量的 C^2 类函数。

注释 1 如果 Λ=0，则该广义 Birkhoff 系统的分数阶最优控制问题转化为 Birkhoff 系统的分数阶最优控制问题；如果 Λ=0，α=1，则转化为 Birkhoff 系统的整数阶最优控制问题。

定义 1 式（4）称为分数阶最优控制问题（3）（4）的分数阶控制方程，一个满足分数阶控制方程（4）的容许二元组 $(\boldsymbol{a}(\cdot), \boldsymbol{u}(\cdot))$ 称为分数阶最优控制问题（3）（4）的一个过程。

由拉格朗日乘数法，求泛函（3）在约束条件（4）下的极值等价于求泛函

$$S(\boldsymbol{a},\boldsymbol{u},\boldsymbol{p})=\int_{t_1}^{t_2}[H(t,\boldsymbol{a}(t),\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{p}(t))-\boldsymbol{p}(t)\cdot{}_{t_1}^{C}D_t^\alpha\boldsymbol{a}(t)]\mathrm{d}t\tag{6}$$

的极值，其中

$$H(t,\boldsymbol{a}(t),\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{p}(t))=\sum_{\nu=1}^{2n}R_\nu\boldsymbol{u}^\nu+G\left(t,\boldsymbol{a}\right)+\boldsymbol{p}\cdot\phi(t,\boldsymbol{a}(t),\boldsymbol{u}(t))\,。\tag{7}$$

计算泛函（6）的变分，可得

$$\delta S=\int_{t_1}^{t_2}\Big[\big(\partial_2 H-{}_tD_{t_2}^{\alpha}\boldsymbol{p}\big)\cdot\delta\boldsymbol{a}+\partial_3 H\cdot\delta\boldsymbol{u}+\big(\partial_4 H-{}_{t_1}^{C}D_{t_2}^{\alpha}\boldsymbol{a}\big)\cdot\delta\boldsymbol{p}\Big]\mathrm{d}t-\big({}_tD_{t_2}^{\alpha-1}\boldsymbol{p}\big)\cdot\delta\boldsymbol{a}\big|_{t_1}^{t_2}\text{。}\tag{8}$$

式中：${}_tD_{t_2}^{\alpha}$为 α 阶 Riemann-Liouville 右导数 [1]；$\partial_i H$ 为函数 H 关于它的第 i 个变量的偏导数，i=1, 2, 3, 4。

由 $\delta S=0$，可得如下命题 1。

命题 1　若 $(\boldsymbol{a}(\cdot), \boldsymbol{u}(\cdot))$ 为分数阶最优控制问题（3）（4）的一个过程，则存在向量函数 $\boldsymbol{p}(\cdot)$，使得对所有 $t\in[t_1, t_1]$，三元组 $(\boldsymbol{a}(\cdot), \boldsymbol{u}(\cdot), \boldsymbol{p}(\cdot))$ 满足如下条件：

1）Hamilton 方程

$$\begin{cases}{}_{t_1}^{C}D_t^{\alpha}\boldsymbol{a}(t)=\partial_4 H(t,\boldsymbol{a}(t),\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{p}(t)),\\ {}_tD_{t_2}^{\alpha}\boldsymbol{p}(t)=\partial_2 H(t,\boldsymbol{a}(t),\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{p}(t));\end{cases}\tag{9}$$

2）平衡条件

$$\partial_3 H(t,\boldsymbol{a}(t),\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{p}(t))=0\text{；}\tag{10}$$

3）横截条件

$$\big({}_tD_{t_2}^{\alpha-1}\boldsymbol{p}\big)\cdot\delta\boldsymbol{a}\big|_{t_1}^{t_2}=0\text{。}\tag{11}$$

定义 2　满足命题 1 的三元组 $(\boldsymbol{a}(\cdot), \boldsymbol{u}(\cdot), \boldsymbol{p}(\cdot))$ 称为分数阶最优控制问题（3）（4）的庞特里亚金极值。

3　分数阶最优控制问题的 Noether 定理

定义 3　在含参数 ε 的无穷小变换群

$$\begin{cases}\bar{t}=t+\varepsilon\tau(t,\boldsymbol{a},\boldsymbol{u},\boldsymbol{p})+o(\varepsilon),\\ \bar{\boldsymbol{a}}(t)=\boldsymbol{a}(t)+\varepsilon\boldsymbol{\xi}(t,\boldsymbol{a},\boldsymbol{u},\boldsymbol{p})+o(\varepsilon),\\ \bar{\boldsymbol{u}}(t)=\boldsymbol{u}(t)+\varepsilon\boldsymbol{\rho}(t,\boldsymbol{a},\boldsymbol{u},\boldsymbol{p})+o(\varepsilon),\\ \bar{\boldsymbol{p}}(t)=\boldsymbol{p}(t)+\varepsilon\boldsymbol{\zeta}(t,\boldsymbol{a},\boldsymbol{u},\boldsymbol{p})+o(\varepsilon)\end{cases}\tag{12}$$

作用下，如果对任意的 $[T_1, T_2]\subseteq[t_1, t_2]$，都有

$$\int_{T_1}^{T_2}\Big[H(\bar{t},\boldsymbol{a}(t),\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{p}(t))-\boldsymbol{p}(t)\cdot{}_{t_1}^{C}D_t^{\alpha}\boldsymbol{a}(t)\Big]=\int_{\bar{T}_1}^{\bar{T}_2}\Big[H(\bar{t},\bar{\boldsymbol{a}}(\bar{t}),\bar{\boldsymbol{u}}(\bar{t}),\bar{\boldsymbol{p}}(\bar{t}))-\bar{\boldsymbol{p}}(\bar{t})\cdot{}_{\bar{t}_1}^{C}D_{\bar{t}}^{\alpha}\bar{\boldsymbol{a}}(\bar{t})\Big]\mathrm{d}\bar{t}\tag{13}$$

成立，则称泛函（6）在无穷小变换群（12）作用下是不变的。

如果时间不发生改变，则式（12）变成

$$\begin{cases}\bar{\boldsymbol{a}}(t)=\boldsymbol{a}(t)+\varepsilon\boldsymbol{\xi}(t,\boldsymbol{a},\boldsymbol{u},\boldsymbol{p})+o(\varepsilon),\\ \bar{\boldsymbol{u}}(t)=\boldsymbol{u}(t)+\varepsilon\boldsymbol{\rho}(t,\boldsymbol{a},\boldsymbol{u},\boldsymbol{p})+o(\varepsilon),\\ \bar{\boldsymbol{p}}(t)=\boldsymbol{p}(t)+\varepsilon\boldsymbol{\zeta}(t,\boldsymbol{a},\boldsymbol{u},\boldsymbol{p})+o(\varepsilon)\text{。}\end{cases}\tag{14}$$

定义 4[1]　$C\big(t,\boldsymbol{a},{}_{t_1}^{C}D_t^{\alpha}\boldsymbol{a},\boldsymbol{u},\boldsymbol{p}\big)$为一个分数阶的守恒量，当且仅当对某一个 $m\in N$ 和一些函数 C_i^1，C_i^2，i=1, 2, ⋯, m，可将$C\big(t,\boldsymbol{a},{}_{t_1}^{C}D_t^{\alpha}\boldsymbol{a},\boldsymbol{u},\boldsymbol{p}\big)$写成如下形式：

$$C\big(t,\boldsymbol{a},{}_{t_1}^{C}D_t^{\alpha}\boldsymbol{a},\boldsymbol{u},\boldsymbol{p}\big)=\sum_{i=1}^{m}C_i^1\cdot C_i^2\text{，}\tag{15}$$

其中任意一组

$C_i^1\big(t,\boldsymbol{a},{}_{t_1}^{C}D_t^{\alpha}\boldsymbol{a},\boldsymbol{u},\boldsymbol{p}\big)$、$C_i^2\big(t,\boldsymbol{a},{}_{t_1}^{C}D_t^{\alpha}\boldsymbol{a},\boldsymbol{u},\boldsymbol{p}\big)$，$i$=1, 2, ⋯, m，沿着分数阶庞特里亚金极值有

$$D_t^{\alpha}\Big(C_i^{j_i^1}\big(t,\boldsymbol{a},{}_{t_1}^{C}D_t^{\alpha}\boldsymbol{a},\boldsymbol{u},\boldsymbol{p}\big),C_i^{j_i^2}\big(t,\boldsymbol{a},{}_{t_1}^{C}D_t^{\alpha}\boldsymbol{a},\boldsymbol{u},\boldsymbol{p}\big)\Big)=0\text{，}\tag{16}$$

式中，j_i^1=1, j_i^2=2（或j_i^1=2, j_i^2=1）。

命题 2　若泛函（6）在含参数 ε 的无穷小变换群（14）之下是不变的，则

$$C\big(t,\boldsymbol{a},{}_{t_1}^{C}D_t^{\alpha}\boldsymbol{a},\boldsymbol{u},\boldsymbol{p}\big)=\boldsymbol{p}(t)\cdot\boldsymbol{\xi}\tag{17}$$

是分数阶最优控制问题（3）（4）的分数阶守恒量。

证明　由于泛函（6）在含参数 ε 的无穷小变换群（14）之下是不变的，根据积分区间的任意性，可以得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0}\Big[H(t,\boldsymbol{a}(t),\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{p}(t))-\boldsymbol{p}(t)\cdot{}_{t_1}^{C}D_t^{\alpha}\boldsymbol{a}(t)\Big]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0}\Big[H(\bar{t},\bar{\boldsymbol{a}}(\bar{t}),\bar{\boldsymbol{u}}(\bar{t}),\bar{\boldsymbol{p}}(\bar{t}))-\bar{\boldsymbol{p}}(\bar{t})\cdot{}_{\bar{t}_1}^{C}D_{\bar{t}}^{\alpha}\bar{\boldsymbol{a}}(\bar{t})\Big]\text{。}\tag{18}$$

经计算，可得

$$\partial_2 H\cdot\boldsymbol{\xi}+\partial_3 H\cdot\boldsymbol{\rho}+\Big[\partial_4 H-{}_{t_1}^{C}D_t^{\alpha}\boldsymbol{a}(t)\Big]\cdot\boldsymbol{\zeta}-\boldsymbol{p}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\left[\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{t_1}^{t}(t-\theta)^{-\alpha}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}(\theta)}{\mathrm{d}\theta}\mathrm{d}\theta+\frac{\varepsilon}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{t_1}^{t}(t-\theta)^{-\alpha}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}}{\mathrm{d}\theta}\mathrm{d}\theta\right]_{\varepsilon=0}=0\text{，}$$

其中 Γ 是 Euler Gamma 函数，故

$$\partial_2 H\cdot\boldsymbol{\xi}+\partial_3 H\cdot\boldsymbol{\rho}+\Big[\partial_4 H-{}_{t_1}^{C}D_t^{\alpha}\boldsymbol{a}(t)\Big]\cdot\boldsymbol{\zeta}-\boldsymbol{p}\cdot\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{t_1}^{t}(t-\theta)^{-\alpha}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}}{\mathrm{d}\theta}\mathrm{d}\theta=0,$$

由 Caputo 分数阶导数的定义和性质 [1]，上式等价于

$$\partial_2 H\cdot\boldsymbol{\xi}+\partial_3 H\cdot\boldsymbol{\rho}+\Big[\partial_4 H-{}_{t_1}^{C}D_t^{\alpha}\boldsymbol{a}(t)\Big]\cdot\boldsymbol{\zeta}-\boldsymbol{p}\cdot{}_{t_1}^{C}D_t^{\alpha}\boldsymbol{\xi}=0\text{。}$$

由命题 1，可得

$$0=-\partial_2 H\cdot\boldsymbol{\xi}+\partial_3 H\cdot\boldsymbol{\rho}+\Big[\partial_4 H-{}_{t_1}^{C}D_t^{\alpha}\boldsymbol{a}(t)\Big]\cdot\boldsymbol{\zeta}+\boldsymbol{p}\cdot{}_{t_1}^{C}D_t^{\alpha}\boldsymbol{\xi}\text{，}$$

于是有 $-\boldsymbol{\xi}\cdot\big({}_tD_{t_2}^{\alpha}\boldsymbol{p}\big)+p\cdot\big({}_{t_1}^{C}D_t^{\alpha}\boldsymbol{\xi}\big)=D_t^{\alpha}[\boldsymbol{p},\boldsymbol{\xi}]=0$。

由定义 4，可得守恒量（17）。

命题 3　若泛函（6）在含参数 ε 的无穷小变换群（12）之下是不变的，则

$$C\big(t,\boldsymbol{a},{}_{t_1}^{C}D_t^{\alpha}\boldsymbol{a},\boldsymbol{u},\boldsymbol{p}\big)=-\sum_{\mu=1}^{2n}p_{\mu}\xi_{\mu}+\left[H-(1-\alpha)\sum_{\mu=1}^{2n}p_{\mu}\,{}_{t_1}^{C}D_t^{\alpha}a^{\mu}\right]\tau\tag{19}$$

是分数阶最优控制问题（3）（4）的分数阶守恒量。

证明 该命题的证明方法与文献 [14] 中命题 4 的证明方法类似，本文从略。

注释 2 命题 3 给出了广义 Birkhoff 系统的分数阶最优控制问题的 Noether 定理。如果 Λ=0，则该 Noether 定理就转化为 Birkhoff 系统的分数阶最优控制问题的 Noether 定理；如果 Λ=0，α=1，则该 Noether 定理就转化为 Birkhoff 系统的整数阶最优控制问题的 Noether 定理。

4 算例

例 1 考虑如下分数阶最优控制问题 [7]：求积分泛函

$$S(\boldsymbol{a},\boldsymbol{u})=\int_{t_1}^{t_2}\left[\sum_{v=1}^{4}R_v u^v+G\left(t,\boldsymbol{a}\right)\right]\mathrm{d}t \tag{20}$$

在分数阶微分方程

$${}_{t_1}^{C}D_t^{\alpha}\boldsymbol{a}=\phi(t,\boldsymbol{u}(t)) \tag{21}$$

约束下的最优控制问题，初始条件为 $\boldsymbol{a}(t_1)=\boldsymbol{a}_{t_1}$，其中，

$$R_1=a^3,\ R_2=a^4,\ R_3=R_4=0,$$

$$B=\frac{1}{2}\left[\left(a^3\right)^2+\left(a^4\right)^2\right],$$

$$G\left(t,\boldsymbol{a}\right)=-B\left(t,\boldsymbol{a}\right)+W\left(t,\boldsymbol{a}\right),$$

$$W=\left(a^3/b\right)\arctan(bt)+\left(a^4/2b\right)\ln\left(1+b^2t^2\right)。$$

由拉格朗日乘数法，求泛函（20）在约束条件（21）下的极值，等价于求泛函

$$S(\boldsymbol{a},\boldsymbol{u},\boldsymbol{p})=\int_{t_1}^{t_2}\left[H(t,\boldsymbol{a}(t),\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{p}(t))-\boldsymbol{p}(t)\cdot{}_{t_1}^{C}D_t^{\alpha}\boldsymbol{a}(t)\right]\mathrm{d}t \tag{22}$$

的极值，其中

$$H(t,\boldsymbol{a},\boldsymbol{u},\boldsymbol{p})=\sum_{v=1}^{4}R_v u^v+G\left(t,\boldsymbol{a}\right)+\boldsymbol{p}\cdot\phi\left(t,\boldsymbol{u}(t)\right)。\tag{23}$$

由命题 3 可得，若泛函（22）在含参数 ε 的无穷小变换群（12）之下是不变的，则

$$C\left(t,\boldsymbol{a},{}_{t_1}^{C}D_t^{\alpha}\boldsymbol{a},\boldsymbol{u},\boldsymbol{p}\right)=-\sum_{\mu=1}^{4}p_\mu\xi_\mu+\left[H-(1-\alpha)\sum_{\mu=1}^{4}p_\mu\,{}_{t_1}^{C}D_t^{\alpha}a^\mu\right]\tau \tag{24}$$

是分数阶最优控制问题（20）（21）的分数阶守恒量。

1）若取 $\tau=0$，$\boldsymbol{\xi}^1=(-1,0,0,0)$，$\boldsymbol{\rho}=\mathbf{0}$，$\boldsymbol{\zeta}=\mathbf{0}$，则泛函（22）在无穷小变换群（12）作用下是不变的，可得守恒量 $C\left(t,\boldsymbol{a},{}_{t_1}^{C}D_t^{\alpha}\boldsymbol{a},\boldsymbol{u},\boldsymbol{p}\right)=p_1$。

2）若取 $\tau=0$，$\boldsymbol{\xi}^2=(0,-1,0,0)$，$\boldsymbol{\rho}=\mathbf{0}$，$\boldsymbol{\zeta}=\mathbf{0}$，则泛函（22）在无穷小变换群（12）作用下是不变的，可得守恒量 $C\left(t,\boldsymbol{a},{}_{t_1}^{C}D_t^{\alpha}\boldsymbol{a},\boldsymbol{u},\boldsymbol{p}\right)=p_2$。

3）若取 $\tau=0$，$\boldsymbol{\xi}^3=(-1,-1,0,0)$，$\boldsymbol{\rho}=\mathbf{0}$，$\boldsymbol{\zeta}=\mathbf{0}$，则泛函（22）在无穷小变换群（12）作用下是不变的，可得守恒量 $C\left(t,\boldsymbol{a},{}_{t_1}^{C}D_t^{\alpha}\boldsymbol{a},\boldsymbol{u},\boldsymbol{p}\right)=p_1+p_2$。

注释 3 在实际应用中，当一个力学系统或物理系统转化成广义 Birkhoff 系统时，就可以研究该系统对应的分数阶最优控制问题，并且运用本文的方法可分析其对称性和守恒量。该算例的结果与文献 [18] 中的结论相吻合。

5 结语

本文研究了广义 Birkhoff 系统的分数阶最优控制问题，运用分数阶变分方法得到该分数阶最优控制问题的极值条件，并运用分数阶微积分和分数阶变分方法得到了该分数阶最优控制问题的 Noether 定理。本研究中，如果 Λ=0，就得到 Birkhoff 系统的分数阶最优控制问题的极值条件和 Noether 定理；如果 Λ=0，α=1，就得到 Birkhoff 系统的整数阶最优控制问题的极值条件和 Noether 定理。本文的结论包含了 Birkhoff 系统的分数阶最优控制问题的情形和 Birkhoff 系统的整数阶最优控制问题的情形，具有一定的普遍性。

迄今为止，国内外关于广义 Birkhoff 系统的最优控制理论方面的研究结果较少，本文运用分数阶变分的方法对广义 Birkhoff 系统的分数阶最优控制问题进行了一定的探索，所得结果对于广义 Birkhoff 系统的最优控制理论方面的研究，具有重要的理论价值。在实际应用中，当一个力学系统或物理系统转化成广义 Birkhoff 系统时，就可以研究该系统对应的分数阶最优控制问题，并且运用本文的方法分析其对称性和守恒量。

参考文献：

[1] MALINOWSKA A B，TORRES D F M. Introduction to the Fractional Calculus of Variations[M]. London：Imperial College Press，2012：1–10.

[2] RIEWE F. Nonconservative Lagrangian and Hamiltonian Mechanics[J]. Physical Review E. Statistical Physics, Plasmas, Fluids, and Related Interdisciplinary Topics，1996，53(2)：1890–1899.

[3] RIEWE F. Mechanics with Fractional Derivatives[J]. Physical Review E. Statistical Physics, Plasmas, Fluids, and Related Interdisciplinary Topics，1997，55(3)：3581–3592.

[4] AGRAWAL O P. Formulation of Euler-Lagrange Equations for Fractional Variational Problems[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications，2002，272(1)：368−379.

[5] ATANACKOVIĆ T M，KONJIK S，PILIPOVIĆ S，et al. Variational Problems with Fractional Derivatives：Invariance Conditions and Nöther's Theorem[J]. Nonlinear Analysis：Theory, Methods & Applications，2009，71(5/6)：1504−1517.

[6] EL-NABULSI A R. A Fractional Approach to Nonconservative Lagrangian Dynamical Systems[J]. Fizika A，2005，14(4)：289−298.

[7] 贾秋丽. 分数阶 Kirchhoff 系统的变分和最优控制问题的 Noether 理论 [D]. 北京：北京理工大学，2017.
JIA Qiuli. Noether Theories of Variational Problems and Optimal Control Problems for Fractional Birkhoff Systems[D]. Beijing：Beijing Institute of Technology，2017.

[8] FREDERICO G S F，TORRES D F M. A Formulation of Noether's Theorem for Fractional Problems of the Calculus of Variations[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications，2007，334(2)：834−846.

[9] FREDERICO G S F，TORRES D F M. Fractional Conservation Laws in Optimal Control Theory[J]. Nonlinear Dynamics，2008，53(3)：215−222.

[10] FREDERICO G S F，TORRES D F M. Fractional Optimal Control in the Sense of Caputo and the Fractional Noether's Theorem[J]. Int. Math. Forum，2008，3：479−493.

[11] FREDERICO G S F，TORRES D F M. Fractional Noether's Theorem in the Riesz-Caputo Sense[J]. Applied Mathematics and Computation，2010，217(3)：1023−1033.

[12] FREDERICO G S F，TORRES D F M. Noether's Theorem for Fractional Optimal Control Problems[J]. IFAC Proceedings Volumes，2006，39(11)：79−84.

[13] ZHANG H B，CHEN H B. Noether's Theorem of Fractional Birkhoffian Systems[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications，2017，456(2)：1442−1456.

[14] JIA Q L，WU H B，MEI F X. Noether Symmetries and Conserved Quantities for Fractional Forced Birkhoffian Systems[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications，2016，442(2)：782−795.

[15] ZHAI X H，ZHANG Y. Noether Symmetries and Conserved Quantities for Fractional Birkhoffian Systems with Time Delay[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation，2016，36：81−97.

[16] ZHANG Y. Noether's Theorem for a Time-Delayed Birkhoffian System of Herglotz Type[J]. International Journal of Non-Linear Mechanics，2018，101：36−43.

[17] CHEN J Y，ZHANG Y. Time-Scale Version of Generalized Birkhoffian Mechanics and Its Symmetries and Conserved Quantities of Noether Type[J]. Advances in Mathematical Physics，2021，2021：9982975.

[18] 梅凤翔 . 广义 Birkhoff 系统动力学 [M]. 北京：科学出版社，2013：30−52.
MEI Fengxiang. Generalized Birkhoff System Dynamics[M]. Beijing：Science Press，2013：30−52.

（责任编辑：廖友媛）