

doi:10.3969/j.issn.1673-9833.2024.04.005

基于二次函数负定判据的 LFC 系统稳定性分析

陈 刚, 王 震, 刘旭阳, 刘亚雄

(湖南工业大学 电气与信息工程学院, 湖南 株洲 412007)

摘 要: 基于改进的二次积分不等式和二次多项式不等式建立的稳定性条件, 研究了基于负荷频率控制 (LFC) 的时滞电力系统稳定性问题。首先, 搭建了包含 PI 参数的负荷频率时滞系统数学模型; 然后, 通过引入增广的 Lyapunov-Krasovskii 泛函, 利用近年改进的二次积分不等式和二次多项式不等式的充分条件, 成功导出了具有时变时滞的系统稳定性判据; 最后, 通过负荷频率系统模型的实例仿真, 验证了所得稳定性判据优于现有的一些计算结果。

关键词: 时变时滞; 稳定性分析; Lyapunov-Krasovskii 泛函; 负荷频率控制; PI 控制

中图分类号: TM712

文献标志码: A

文章编号: 1673-9833(2024)04-0027-07

引文格式: 陈 刚, 王 震, 刘旭阳, 等. 基于二次函数负定判据的 LFC 系统稳定性分析 [J]. 湖南工业大学学报, 2024, 38(4): 27-33.

Stability Analysis of LFC System Based on Quadratic Function Negative Definite Criterion

CHEN Gang, WANG Zhen, LIU Xuyang, LIU Yaxiong

(College of Electrical and Information Engineering, Hunan University of Technology, Zhuzhou Hunan 412007, China)

Abstract: A research has been conducted on the stability problem of time-delay power systems based on load frequency control (LFC) by establishing stability conditions on the basis of improved quadratic integral inequality and quadratic polynomial inequality. Firstly, a mathematical model is constructed of a load frequency delay system with PI parameters. Then, by introducing an augmented Lyapunov-Krasovskii functional and utilizing the sufficient conditions of the improved quadratic integral inequality and quadratic polynomial inequality in recent years, a stability criterion for systems with time-varying delays can be successfully derived. Finally, through the simulation of a load frequency system model, it is verified that the obtained stability criterion is superior in performance to some existing calculation results.

Keywords: time-varying time delay; stability analysis; Lyapunov-Krasovskii functional; load frequency control; PI control

1 研究背景

近年来, 现代电力系统趋向于规模化和复杂化发展, 电网规模不断扩大, 输变电容量和电压等级不断提高, 以往的控制方式不足以处理用电量的变化来

提高电网供电能力^[1]。从以往数十年的电网停电事故中, 可以得知电网不稳定将会造成巨额经济损失, 故如何使电力系统安全稳定地运行已成为电力系统领域科研人员关注的焦点。在众多衡量电网平稳运行和供电质量的标准中, 频率是最重要的指标之一。因此,

收稿日期: 2023-08-09

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (62173136)

作者简介: 陈 刚, 男, 湖南工业大学副教授, 博士, 主要研究方向为时滞系统鲁棒控制, 网络控制, 机器人技术,

E-mail: chengang@hut.edu.cn

通过接收电网中的频率变化信息来控制发电机的功率输出,使得电网频率能够维持在一定范围内小幅度波动,实现负荷频率控制(load frequency control, LFC),在电网稳定工作方面变得尤为重要^[2]。近几年,LFC被广泛应用于广域互联系统也佐证了这一点。而随着控制技术的进步和用电负荷的不断增加,LFC也面临着新的问题——时滞现象。LFC中的时滞现象,指的是在全局监察电力系统时,检测及控制信号在传输通道中的延时。若这两种信号传送不及时,会降低LFC的控制效果,使电力系统稳定性下降。因此,研究LFC的重点之一,是如何提高保证电网运行稳定的最大时滞稳定裕度^[3]。

时滞是现实系统中常见的一种自然现象,时滞系统被称为包含后效或延时、微分-差分方程的系统,本质上属于一类无限维系统,是一种复杂且难以解决的系统^[4]。时滞系统的一个显著特征是:未来的演变不仅取决于当前状态,还取决于过去的状态^[5]。时滞广泛存在于实际系统中,如网络控制系统^[6]、化学工程实验、风力发电^[7]等,由于信息延迟与系统工作不匹配,大多数时滞会对系统产生不稳定的影响,降低系统性能。因此,解决时滞系统的稳定性问题成为近几十年来的重要研究目标,且已经取得重大突破。时滞系统的稳定性分析是一个基本问题,其中一个主要目标是确定维持系统稳定所需的时滞稳定裕度,由此得到的时滞稳定裕度将成为评估系统保守性的标准^[8]。时滞系统的稳定性分析通常采用两种方法:频域法和时域法。频域法是研究控制系统的一个经典方法,也是最早使用的工程方法之一。该方法的步骤是计算特征方程的根,并根据根的分布情况判断系统稳定性。然而,该方法在具有时变时滞系统情况下具有一定的局限性,无法进行计算,因此较少使用。目前,时域方法更为常用,其步骤是通过构建Lyapunov-Krasovskii泛函(LKF),并使用各种积分不等式对泛函进行放缩处理等,然后使用判定方法得到稳定性判据^[9]。经过多年的研究和讨论,LKF方法被证明是研究时滞系统稳定性的有力工具。时域方法的关键在于两个方面:如何选择合适的LKF和估计LKF导数。在选择LKF方面,可以发现增广LKF能够引入更多延迟状态信息,从而明显减小稳定性条件的保守性。在此创新的推动下,已经构建了许多LKF,如文献[10]。关于处理LKF的导数方面,也提出了几种积分不等式,如贝塞尔-勒让德不等式^[11]、二重积分不等式和三重积分不等式^[12]。积分不等式可以直接估计积分项,因此在时滞系统的稳定性分析中起重要作用。至于将时滞应用于LFC系统,近年

也获得了许多成果,文献[13]研究了电动汽车单区负荷变频控制系统的时滞稳定性问题,提出了电动汽车LFC系统的基于模型重构技术的模型和考虑电荷状态的参数不确定模型。

本文基于改进的二次积分不等式和二次多项式不等式建立的稳定性条件,分析了LFC系统中时变时滞的稳定性问题。利用基于Wirtinger不等式改进的二重积分不等式,发现这种改进后的不等式比一些现有的不等式提供了更紧的约束性。然后构造了一个包含二次积分项的LKF。使用改进的二次积分不等式,结合二阶贝塞尔-勒让德不等式,导出了时变时滞稳定性的充分判据。最后,通过Matlab仿真实验,分析了不同时滞情况下系统所能达到的时滞最大上界,验证了时变时滞情况下本文方法的优越性。

本文中, $\mathbb{R}^{n \times m}$ 为 $n \times m$ 实矩阵集合; \mathbb{S}^n 为 $n \times n$ 实对称矩阵集合; \mathbb{S}_+^n 为 $n \times n$ 实对称正定矩阵集合; $\text{diag}\{\cdots\}$ 为块对角矩阵; $\text{col}\{\cdots\}$ 为列向量; $\text{sym}\{A\}$ 为 $A+A^T$ 。

2 系统描述与引理

2.1 系统模型

LFC的基本原理与大多数控制系统并无不同,即接收到电网负荷侧的频率信息转化的信号后,通过设计好的控制器,控制供电侧发电机组的工作功率以影响供电输出,使得电网频率变为负荷侧需要的区间。因为实际上的LFC系统非常复杂,建模难以实现,所以一般用减弱了非线性化又能体现出与频率有关过程的简单模型,如图1所示。

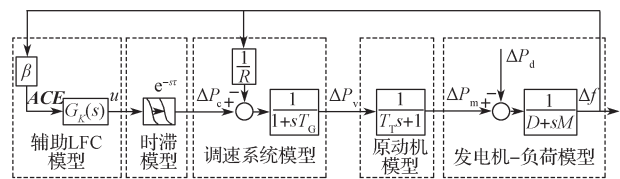


图1 考虑时滞的LFC结构框图

Fig. 1 LFC structure diagram considering the time delay

图1所示LFC模型含发电机-负荷、原动机、调速系统、时滞、辅助LFC模型等模块^[14]。图中 β 为频率偏差因子,且 $\beta=1/R+D$,其中 R 为调速器速度跌落系数; D 为发电机阻尼系数; ACE 为区域控制误差,且 $ACE(s)=\beta\Delta f(s)$; $G_k(s)$ 为辅助LFC控制器模型,实际电网在此环节大多用PI控制,故此模块传递函数为 $G_k(s)=\frac{u(s)}{ACE(s)}=K_p+\frac{K_i}{s}$; $e^{-s\tau}$ 为描述时滞给系统带来干扰的指数函数,其中 τ 为时滞程

度参数; ΔP_c 为系统控制信号; T_G 为机组调速器惯性时间常数; T_T 为汽轮机惯性时间常数; ΔP_m 为机械功率变化量; ΔP_d 为电网负荷变化量; M 为发电机转动惯量; Δf 为系统频率变化量^[15]。

根据图1选择的状态变量及输出变量如下:

$$\begin{cases} \mathbf{x}(t) = [\Delta f & \Delta P_m & \Delta P_v]^T; \\ \mathbf{y}(t) = ACE(t). \end{cases}$$

由上式可得如下LFC系统状态空间模型:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t - \tau(t)) + \mathbf{F}\mathbf{w}(t); \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t). \end{cases} \quad (1)$$

式中: $\mathbf{w}(t) = \Delta P_d$; $\mathbf{u}(t - \tau(t)) = \Delta P_c(t)$;

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -D/M & 1/M & 0 \\ 0 & -1/T_T & 1/T_T \\ -1/(T_G R) & 0 & -1/T_G \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/T_G \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} -1/M \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \beta \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T.$$

设计的PID控制器计算式为

$$\mathbf{u}(t) = K_p ACE(t) + K_i \int ACE(t) dt. \quad (2)$$

假定LFC系统的虚拟状态变量和输出变量如下:

$$\bar{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^T(t) \\ \int \mathbf{y}^T(t) dt \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{y}}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{y}^T(t) \\ \int \mathbf{y}^T(t) dt \\ \frac{d}{dt} \mathbf{y}^T(t) \end{bmatrix},$$

因为 $\mathbf{CB} = 0$, 所以式(1)和式(2)转化为如下静态输出反馈控制系统:

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{x}}(t) = \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{x}}(t) + \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{u}(t - \tau(t)) + \tilde{\mathbf{F}}\mathbf{w}(t); \\ \bar{\mathbf{y}}(t) = \tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{x}}(t) + \tilde{\mathbf{D}}\mathbf{w}(t); \\ \mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}\bar{\mathbf{y}}(t). \end{cases}$$

$$\text{式中: } \tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & 0 \\ \mathbf{C} & 0 \end{bmatrix}; \quad \tilde{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \tilde{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$\tilde{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \tilde{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_p \\ K_i \\ 0 \end{bmatrix}^T.$$

以上各式可继续整合简化为

$$\tilde{\mathbf{x}}(t) = \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{x}}(t) + \tilde{\mathbf{A}}_d\tilde{\mathbf{x}}(t - \tau(t)) + \tilde{\mathbf{B}}_w\mathbf{w}(t). \quad (3)$$

式中: $\tilde{\mathbf{A}}_d = -\tilde{\mathbf{B}}\mathbf{K}\tilde{\mathbf{C}}$; $\tilde{\mathbf{B}}_w = \tilde{\mathbf{F}} - \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{K}\tilde{\mathbf{D}}$ 。

假定上式正常运行时的平衡点为 $\mathbf{x}^*(t)$, 则满足

$$0 = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{x}^*(t) + \tilde{\mathbf{A}}_d\mathbf{x}^*(t - \tau(t)) + \tilde{\mathbf{B}}_w\mathbf{w}(t). \quad (4)$$

用式(3)减去式(4)得:

$$\dot{\mathbf{x}}_s(t) = \mathbf{A}_s\mathbf{x}_s(t) + \mathbf{A}_{ds}\mathbf{x}_s(t - \tau(t)).$$

式中: $\dot{\mathbf{x}}_s(t) = \dot{\mathbf{x}}(t) - \dot{\mathbf{x}}^*(t)$; $\mathbf{A}_s = \tilde{\mathbf{A}}$; $\mathbf{A}_{ds} = \tilde{\mathbf{A}}_d$ 。

故本研究的含时滞LFC系统模型可描述为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_s\mathbf{x}_s(t) + \mathbf{A}_{ds}\mathbf{x}_s(t - \tau(t)), \\ \mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\phi}(t), t \in [-h, 0]. \end{cases} \quad (5)$$

式中: $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ 为系统状态向量; $\boldsymbol{\phi}(t)$ 为定义在 $[-h, 0]$ 上的初始条件; $\tau(t)$ 为时变时滞, 满足以下条件

$$0 \leq \tau(t) \leq h, \quad \mu_1 \leq \dot{\tau}(t) \leq \mu_2 < \infty.$$

2.2 相关引理

为了给出本文的稳定性判据, 给出如下引理。

引理1^[16] 给定矩阵 $\mathbf{R} \in \mathbb{S}_+^n$, α, β 是 $\alpha < \beta$ 的标量, 有如下不等式成立:

$$\int_{\alpha}^{\beta} \dot{\boldsymbol{\omega}}^T(s) \mathbf{R} \dot{\boldsymbol{\omega}}(s) ds \geq \frac{1}{\beta - \alpha} \boldsymbol{\Omega}^T(\alpha, \beta) \tilde{\mathbf{R}} \boldsymbol{\Omega}(\alpha, \beta). \quad (6)$$

式中: $\tilde{\mathbf{R}} = \text{diag}\{\mathbf{R}, 3\mathbf{R}, 5\mathbf{R}\}$;

$$\boldsymbol{\Omega}(\alpha, \beta) = \text{col}\{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\};$$

$$\begin{cases} \mathbf{v}_0 = \boldsymbol{\omega}(\beta) - \boldsymbol{\omega}(\alpha); \\ \mathbf{v}_1 = \boldsymbol{\omega}(\beta) + \boldsymbol{\omega}(\alpha) - \frac{2}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} \boldsymbol{\omega}(s) ds; \\ \mathbf{v}_2 = \boldsymbol{\omega}(\beta) - \boldsymbol{\omega}(\alpha) + \frac{6}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} \boldsymbol{\omega}(s) ds - \\ \quad \frac{12}{(\beta - \alpha)^2} \int_{\alpha}^{\beta} \int_{\theta}^{\beta} \boldsymbol{\omega}(s) ds d\theta. \end{cases} \quad (7)$$

引理2^[17] 给定矩阵 $\mathbf{R} \in \mathbb{S}_+^n$, α, β 是 $\alpha < \beta$ 的标量, 有如下不等式成立:

$$\int_{\alpha}^{\beta} (s - \alpha) \dot{\mathbf{x}}^T(t) \mathbf{R} \dot{\mathbf{x}}(t) ds \geq \frac{1}{2} (\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1)^T \mathbf{R} (\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1) - (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)^T \mathbf{R} (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2). \quad (8)$$

引理3^[18] 给定矩阵 $\mathbf{R} \in \mathbb{S}_+^n$, α, β 是 $\alpha < \beta$ 的标量, 有如下不等式成立:

$$\int_{\alpha}^{\beta} (s - \alpha)^2 \dot{\mathbf{x}}^T(t) \mathbf{R} \dot{\mathbf{x}}(t) ds \geq \frac{\beta - \alpha}{4} (\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1)^T \mathbf{R} (\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1) + \frac{\beta - \alpha}{12} (\mathbf{v}_0 + 3\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2)^T \mathbf{R} (\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2). \quad (9)$$

近年提出了如下二次矩阵不等式的负定引理。

引理4^[19] 设 $\tilde{\mathbf{R}}_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 是正定的, 且 $\alpha \in (0, 1)$ 。如果存在对称矩阵 $\mathbf{X}_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 和 $\mathbf{Y}_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ($i = 1, 2$) 使得

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{R}}_1 - \mathbf{X}_1 & \mathbf{Y}_1 \\ \mathbf{Y}_1^T & \tilde{\mathbf{R}}_2 \end{bmatrix} \geq 0, \quad \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{R}}_1 & \mathbf{Y}_2 \\ \mathbf{Y}_2^T & \tilde{\mathbf{R}}_2 - \mathbf{X}_2 \end{bmatrix} \geq 0,$$

则有下列不等式成立:

$$\frac{1}{\alpha} \zeta_1^T \tilde{R}_1 \zeta_1 + \frac{1}{1-\alpha} \zeta_2^T \tilde{R}_2 \zeta_2 \geq \zeta_1^T [\tilde{R}_1 + (1-\alpha)X_1] \zeta_1 + \zeta_2^T (\tilde{R}_2 + \alpha X_2) \zeta_2 + 2\zeta_1^T [\alpha Y_1 + (1-\alpha)Y_2] \zeta_2.$$

其中 $\zeta_i \in \mathbb{R}^q$ ($i=1, 2$).

引理 5^[20] 设 $f(t) = a_2 t^2 + a_1 t + a_0$, 此函数中 $a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{S}^r$, I 为单位矩阵, $\forall t \in [0, h]$, 当且仅当存在 $E \in \mathbb{S}_+^r$ 和 $F \in \mathbb{R}^{r \times r}$ 且 F 为反对称矩阵时, 满足以下矩阵不等式:

$$\begin{bmatrix} a_0 & a_1/2 \\ a_1/2 & a_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} hI/2 & 0 \\ hI/2 & -I \end{bmatrix}^T \times \begin{bmatrix} E & F \\ F^T & -E \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} hI/2 & 0 \\ hI/2 & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (10)$$

则 $f(t) < 0$.

3 稳定性分析

为便于接下来的推导证明, 给出如下时变时滞系统的符号及其定义:

$$\begin{aligned} v_1(t) &= \frac{1}{\tau(t)} \int_{t-\tau(t)}^t x(s) ds, \quad v_2(t) = \frac{1}{\tau^2(t)} \int_{t-\tau(t)}^t (t-s)x(s) ds, \\ v_3(t) &= (1/(h-\tau(t))) \int_{t-h}^{t-\tau(t)} x(s) ds, \\ v_4(t) &= (1/(h-\tau(t))^2) \int_{t-h}^{t-\tau(t)} (t-\tau(t)-s)x(s) ds, \\ \xi(t) &= \text{col}\{x(t), x(t-\tau(t)), x(t-h), v_1(t), \\ &\quad v_2(t), v_3(t), v_4(t), \dot{x}(t-\tau(t)), \dot{x}(t-h)\}, \quad (11) \\ \eta(t) &= \text{col}\{x(t), x(t-\tau(t)), x(t-h), \tau(t)v_1(t), \\ &\quad \tau(t)v_2(t), (h-\tau(t))v_3(t), (h-\tau(t))v_4(t)\}, \\ \eta_1(t, s) &= \text{col}\{x(t), x(s), \dot{x}(s), x(t-\tau(t)), \\ &\quad \int_s^t \dot{x}(\theta) d\theta, \int_{t-\tau(t)}^s \dot{x}(\theta) d\theta, \int_{t-h}^s \dot{x}(\theta) d\theta\}. \end{aligned}$$

定理 1 给定常数 $h \geq 0$, μ_1, μ_2 , 存在矩阵 $P_i \in \mathbb{S}_+^{7n}$, $Q_i \in \mathbb{S}_+^{8n}$, $E_i \in \mathbb{S}_+^{7n}$, $R_{ij} \in \mathbb{S}_+^{n}$, $X_i \in \mathbb{S}_+^{3n}$, $Y_i \in \mathbb{R}^{3n}$, ($i, j=1, 2$) 和反对称矩阵 F_1, F_2 , 有如下线性矩阵不等式

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} \tilde{R}_{12} - X_1 & Y_1 \\ Y_1^T & \tilde{R}_{11} + \tilde{R}_{21} + h\tilde{R}_3 \end{bmatrix} \geq 0, \\ &\begin{bmatrix} \tilde{R}_{12} & Y_2 \\ Y_2^T & \tilde{R}_{11} + \tilde{R}_{21} + h\tilde{R}_3 - X_2 \end{bmatrix} \geq 0; \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} \varphi_0(\mu_i) & \varphi_1(\mu_i)/2 \\ \varphi_1(\mu_i)/2 & \varphi_2(\mu_i) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} hI/2 & 0 \\ hI/2 & -I \end{bmatrix}^T \times \\ &\begin{bmatrix} E_i & F_i \\ F_i^T & -E_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} hI/2 & 0 \\ hI/2 & -I \end{bmatrix} < 0, \quad i=1, 2 \end{aligned} \quad (13)$$

成立, 则系统稳定。

式中:

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{11} &= \text{diag}\{R_{11}, 3R_{11}, 5R_{11}\}, \tilde{R}_{12} = \text{diag}\{R_{12}, 3R_{12}, 5R_{12}\}; \\ \tilde{R}_{21} &= \text{diag}\{R_{21}, 3R_{21}, 5R_{21}\}, \tilde{R}_3 = \text{diag}\{R_3, 3R_3, 5R_3\}; \\ \varphi_0(\dot{\tau}(t)) &= \tilde{\varphi}_0(\dot{\tau}(t)) - \mathcal{J}_1 - \mathcal{J}_5 - h(\mathcal{J}_3 + \mathcal{J}_4); \\ \varphi_1(\dot{\tau}(t)) &= \tilde{\varphi}_1(\dot{\tau}(t)) + \mathcal{J}_4 + \mathcal{J}_3 - \mathcal{J}_2 - \mathcal{J}_6; \\ \varphi_2(\dot{\tau}(t)) &= (1-\dot{\tau}(t))e_8^T(R_{22} - R_{21})e_8 + 1/h \cdot \dot{\tau}(t) \cdot \\ &\quad \Pi_{12}^T(P_2 - P_1)\Pi_{12} + \text{sym}\{1/h \cdot \Pi_{13}^T(P_2 - P_1)\Pi_{13}\}; \end{aligned}$$

其中 $e_i = [0_{n \times (i-1)n} \quad I_n \quad 0_{n \times (9-i)n}]$, $i=1, 2, \dots, 9$;

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_0(\dot{\tau}(t)) &= \Pi_{21}^T Q_1 \Pi_{21} - \Pi_{22}^T Q_2 \Pi_{22} + (1-\dot{\tau}(t))\Pi_{23}^T(Q_2 - Q_1) \cdot \\ &\quad \Pi_{23} + (1/h)\dot{\tau}(t)\Pi_{11}^T(P_2 - P_1)\Pi_{11} + e_0^T(h^2 R_{11} + h^2 R_{21} + \\ &\quad h^3 R_3)e_0 + h^2(1-\dot{\tau}(t))e_8^T(R_{12} + R_{22} - R_{11} - R_{21})e_8 + \\ &\quad \text{sym}\{\Pi_{11}^T P_1 \Pi_{13} + \Pi_{24}^T(Q_1 \Pi_{25} + Q_2 \Pi_{27})\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_1(\dot{\tau}(t)) &= \text{sym}\{\Pi_{12}^T P_1 \Pi_{13} + (1/h)\Pi_{11}^T(P_2 - P_1)\Pi_{13} + \\ &\quad (1/h)\dot{\tau}(t)\Pi_{11}^T(P_2 - P_1)\Pi_{12} + \Pi_{24}^T(Q_1 \Pi_{26} + Q_2 \Pi_{28})\} - \\ &\quad h(1-\dot{\tau}(t))e_8^T(R_{12} + 2R_{22} - R_{11} - 2R_{21})e_8, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_1 &= 4(e_2 - e_6)^T R_{22}(e_2 - e_6) + 8(e_2 - 4e_6 + 6e_7)^T \cdot \\ &\quad R_{22}(e_2 - 4e_6 + 6e_7) + 4(e_1 - e_4)^T R_{21}(e_1 - e_4) + \\ &\quad 8(e_1 - 4e_4 + 6e_5)^T R_{21}(e_1 - 4e_4 + 6e_5) - M_1^T \tilde{R}_{21} M_1, \end{aligned}$$

$$\mathcal{J}_2 = 3(e_1 - e_4)^T R_3(e_1 - e_4) + 9(e_1 - 3e_4 + 4e_5)^T \cdot R_3(e_1 - 3e_4 + 4e_5) - M_1^T \tilde{R}_3 M_1,$$

$$\mathcal{J}_3 = 12(e_1 - e_4)^T R_3(e_1 - e_4) + 24(e_1 - 4e_4 + 6e_5)^T \cdot R_3(e_1 - 4e_4 + 6e_5) - 2M_1^T \tilde{R}_3 M_1,$$

$$\mathcal{J}_4 = 3(e_2 - e_6)^T R_3(e_2 - e_6) + 9(e_2 - 3e_6 + 6e_7)^T R_3(e_2 - 3e_6 + 6e_7),$$

$$\mathcal{J}_5 = M_2^T \tilde{R}_{21} M_2 + \text{sym}\{M_2^T Y_1 M_1\} + M_1^T(\tilde{R}_{11} + \tilde{R}_{21} + h\tilde{R}_3 + X_2)M_1,$$

$$\mathcal{J}_6 = (1/h)M_2^T X_1 M_2 - (1/h)M_1^T X_2 M_1 + \text{sym}\{(1/h)M_2^T(Y_2 - Y_1)M_1\},$$

$$e_0 = A_s e_1 + A_{ds} e_2, \quad \Pi_{11} = \text{col}\{e_1, e_2, e_3, 0, 0, h e_6, h e_7\},$$

$$\Pi_{12} = \text{col}\{0, 0, 0, e_4, e_5, -e_6, -e_7\},$$

$$\Pi_{13} = \text{col}\{e_0, (1-\dot{\tau}(t))e_8, e_9, e_1 - (1-\dot{\tau}(t))e_2(e_4 - e_2) + \dot{\tau}(t)(e_2 - e_5), (1-\dot{\tau}(t))e_2 - e_3, (e_6 - e_3) + \dot{\tau}(t)(e_7 - e_6)\},$$

$$\begin{aligned}
\Pi_{21} &= \text{col}\{e_1, e_1, e_0, e_2, 0, e_1 - e_2, e_1 - e_3\}, \\
\Pi_{22} &= \text{col}\{e_1, e_3, e_9, e_2, e_1 - e_3, e_3 - e_2, 0\}, \\
\Pi_{23} &= \text{col}\{e_1, e_2, e_8, e_2, e_1 - e_2, 0, e_2 - e_3\}, \\
\Pi_{24} &= \text{col}\{e_0, 0, 0, (1 - \dot{\tau}(t))e_8, e_0, (\dot{\tau}(t) - 1)e_8, -e_9\}, \\
\Pi_{25} &= \text{col}\{0, 0, e_1 - e_2, 0, 0, 0, 0\}, \\
\Pi_{26} &= \text{col}\{e_1, e_4, 0, e_2, e_1 - e_4, e_4 - e_2, e_4 - e_3\}, \\
\Pi_{27} &= \text{col}\{he_1, he_6, e_2 - e_3, he_2, \\
&\quad h(e_1 - e_6), h(e_6 - e_2), h(e_6 - e_3)\}, \\
\Pi_{28} &= \text{col}\{-e_1, -e_6, 0, -e_2, e_6 - e_1, e_2 - e_6, e_3 - e_6\}, \\
M_1 &= \text{col}\{e_1 - e_2, e_1 + e_2 - 2e_4, e_1 - e_2 - 6e_4 + 12e_5\}, \\
M_2 &= \text{col}\{e_2 - e_3, e_2 + e_3 - 2e_6, e_2 - e_3 - 6e_6 + 12e_7\}.
\end{aligned}$$

证明 构建如下新的泛函:

$$\begin{aligned}
V(t) &= V_1(t) + V_2(t) + V_3(t) + V_4(t) + V_5(t), \\
V_1(t) &= (h - \tau(t)/h)\eta^T(t)P_1\eta(t) + (\tau(t)/h)\eta^T(t)P_2\eta(t), \\
V_2(t) &= \int_{t-\tau(t)}^t \eta_h^T(t, s)Q_1\eta_h(t, s)ds + \\
&\quad \int_{t-h}^{t-\tau(t)} \eta_h^T(t, s)Q_2\eta_h(t, s)ds, \\
V_3(t) &= h\left(\int_{t-\tau(t)}^t (h + \theta - t)\dot{x}^T(\theta)R_{11}\dot{x}(\theta)d\theta + \right. \\
&\quad \left. \int_{t-h}^{t-\tau(t)} (h + \theta - t)\dot{x}^T(\theta)R_{12}\dot{x}(\theta)d\theta\right), \\
V_4(t) &= \int_{t-\tau(t)}^t (h + \theta - t)^2 \dot{x}^T(\theta)R_{21}\dot{x}(\theta)d\theta + \\
&\quad \int_{t-h}^{t-\tau(t)} (h + \theta - t)^2 \dot{x}^T(\theta)R_{22}\dot{x}(\theta)d\theta, \\
V_5(t) &= \int_{t-h}^t (h + \theta - t)^3 \dot{x}^T(\theta)R_3\dot{x}(\theta)d\theta. \quad (14)
\end{aligned}$$

对 $V(t)$ 求导, 可得:

$$\begin{aligned}
\dot{V}_1(t) &= \xi^T(t)\left[(\Pi_{11} + \tau(t)\Pi_{12})^T \times (h - \tau(t)/h)P_1\Pi_{13} + \right. \\
&\quad (\Pi_{11} + \tau(t)\Pi_{12})^T (\tau(t)/h)P_2\Pi_{13} + (\Pi_{11} + \tau(t)\Pi_{12})^T \cdot \\
&\quad \left. (\dot{\tau}(t)/h)(P_2 - P_1)(\Pi_{11} + \tau(t)\Pi_{12})\right]\xi(t), \\
\dot{V}_2(t) &= \xi^T(t)\left[\Pi_{21}^T Q_1 \Pi_{21} - \Pi_{22}^T Q_2 \Pi_{22} + (1 - \dot{\tau}(t))\Pi_{23}^T \cdot \right. \\
&\quad (Q_2 - Q_1)\Pi_{23} + \text{sym}\left\{\Pi_{24}^T [Q_1(\Pi_{25} + \tau(t)\Pi_{26}) + \right. \\
&\quad \left. Q_2(\Pi_{27} + \tau(t)\Pi_{28})]\right\}\right]\xi(t), \\
\dot{V}_3(t) &= h(h - \tau(t))(1 - \dot{\tau}(t)) \times \dot{x}^T(t - \tau(t))^T \cdot \\
&\quad (R_{12} - R_{11})\dot{x}(t - \tau(t)) + h^2 \dot{x}^T(t)R_{11}\dot{x}(t) - \varepsilon_1, \\
\dot{V}_4(t) &= h(h - \tau(t))^2 (1 - \dot{\tau}(t)) \dot{x}^T(h - \tau(t))^T \cdot \\
&\quad (R_{22} - R_{21})\dot{x}(h - \tau(t)) + h^2 \dot{x}^T(t)R_{21}\dot{x}(t) - \varepsilon_2, \\
\dot{V}_5(t) &= h^3 \dot{x}^T(t)R_3\dot{x}(t) - \varepsilon_3. \quad (15)
\end{aligned}$$

其中:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= h \int_{t-\tau(t)}^t \dot{x}^T(\theta)R_{11}\dot{x}(\theta)d\theta + h \int_{t-h}^{t-\tau(t)} \dot{x}^T(\theta)R_{12}\dot{x}(\theta)d\theta, \\
\varepsilon_2 &= 2 \int_{t-\tau(t)}^t (h + \theta - t)\dot{x}^T(\theta)R_{21}\dot{x}(\theta)d\theta + \\
&\quad 2 \int_{t-h}^{t-\tau(t)} (h + \theta - t)\dot{x}^T(\theta)R_{22}\dot{x}(\theta)d\theta, \\
\varepsilon_3 &= 3 \int_{t-h}^t (h + \theta - t)^2 \dot{x}^T(\theta)R_3\dot{x}(\theta)d\theta. \quad (16)
\end{aligned}$$

基于引理 1 对 ε_1 进行简单处理, 得:

$$\varepsilon_1 \geq \xi^T(t) \left[\frac{h}{\tau(t)} M_1^T \tilde{R}_{11} M_1 + \frac{h}{h - \tau(t)} M_2^T \tilde{R}_{12} M_2 \right] \xi(t). \quad (17)$$

基于引理 2 对 ε_2 进行处理, 得:

$$\begin{aligned}
&2 \int_{t-\tau(t)}^t (h + \theta - t)\dot{x}^T(\theta)R_{21}\dot{x}(\theta)d\theta + \\
&2 \int_{t-h}^{t-\tau(t)} (h + \theta - t)\dot{x}^T(\theta)R_{22}\dot{x}(\theta)d\theta \geq \\
&\xi^T(t) \left[4(e_1 - e_4)^T R_{21}(e_1 - e_4) + 8(e_1 - 4e_4 + 6e_5)^T \cdot \right. \\
&\quad R_{21}(e_1 - 4e_4 + 6e_5) + 4(e_2 - e_6)^T R_{22}(e_2 - e_6) + \\
&\quad 8(e_2 - 4e_6 + 6e_7)^T R_{22}(e_2 - 4e_6 + 6e_7) + \\
&\quad \left. (h - \tau(t)/\tau(t))M_1^T \tilde{R}_{21}M_1 \right] \xi(t).
\end{aligned}$$

因此可以简写为

$$\varepsilon_2 \geq \xi^T(t) \mathcal{J}_1 \xi(t) + \xi^T(t) (h/\tau(t)) M_1^T \tilde{R}_{21} M_1 \xi(t). \quad (18)$$

基于定理 3, 对 ε_3 进行处理, 得:

$$\begin{aligned}
&3 \int_{t-\tau(t)}^t (h + \theta - t)^2 \dot{x}^T(\theta)R_3\dot{x}(\theta)d\theta = \\
&6(h - \tau(t)) \int_{t-\tau(t)}^t (\tau(t) + \theta - t)\dot{x}^T(\theta)R_3\dot{x}(\theta)d\theta + \\
&3 \int_{t-\tau(t)}^t (\tau(t) + \theta - t)^2 \dot{x}^T(\theta)R_3\dot{x}(\theta)d\theta + \\
&3(h - \tau(t))^2 \int_{t-\tau(t)}^t \dot{x}^T(\theta)R_3\dot{x}(\theta)d\theta \geq \\
&\xi^T(t) \left[\tau(t)\mathcal{J}_2 + (h - \tau(t))\mathcal{J}_3 (h^2/\tau(t))M_1^T \tilde{R}_3 M_1 \right] \xi(t), \\
&3 \int_{t-h}^{t-\tau(t)} (h + \theta - t)^2 \dot{x}^T(\theta)R_3\dot{x}(\theta)d\theta \geq \\
&\xi^T(t) [h - \tau(t)] \mathcal{J}_4 \xi(t), \\
\varepsilon_3 &\geq \xi^T(t) \left[\tau(t)\mathcal{J}_2 + (h - \tau(t)) \times \right. \\
&\quad \left. (\mathcal{J}_3 + \mathcal{J}_4) + (h^2/\tau(t))M_1^T \tilde{R}_3 M_1 \right] \xi(t). \quad (19)
\end{aligned}$$

将式 (17) ~ (19) 进行整理得:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^3 \varepsilon_i \geq \xi^T(t) \left[\mathcal{J}_1 + \tau(t)\mathcal{J}_2 + (h - \tau(t))(\mathcal{J}_3 + \mathcal{J}_4) \right] \xi(t) + \\
&\xi^T(t) \left[(h/\tau(t))M_1^T (\tilde{R}_{11} + \tilde{R}_{21} + h\tilde{R}_3)M_1 + \right. \\
&\quad \left. (h/(h - \tau(t)))M_2^T \tilde{R}_{12}M_2 \right] \xi(t). \quad (20)
\end{aligned}$$

然后根据引理 4 对式 (20) 进行处理, 如果满足则:

$$\begin{aligned} \xi^T(t) & \left[\left(h/\tau(t) \right) M_1^T \left(\tilde{R}_{11} + \tilde{R}_{21} + h\tilde{R}_3 \right) M_1 + \left(h/(h-\tau(t)) \right) \cdot \right. \\ & M_2^T \tilde{R}_{12} M_2 \left. \right] \xi(t) \geq \xi^T(t) \left\{ M_1^T \left(\tilde{R}_{11} + \tilde{R}_{21} + h\tilde{R}_3 + \alpha X_2 \right) M_1 + \right. \\ & M_2^T \left(\tilde{R}_{12} + (1-\alpha) X_1 \right) M_2 + 2M_2^T \left[\alpha Y_1 + (1-\alpha) Y_2 \right] M_1 \left. \right\} \cdot \\ & \xi(t) = \xi^T(t) \left(\mathcal{J}_5 + \tau(t) \mathcal{J}_6 \right) \xi(t). \end{aligned} \quad (21)$$

将式 (15) 和 (21) 归总可得:

$$\dot{V}(t) \leq \xi^T(t) \left[\tau^2(t) \varphi_2(\dot{\tau}(t)) + \tau(t) \varphi_1(\dot{\tau}(t)) + \varphi_0(\dot{\tau}(t)) \right] \xi(t).$$

若式 (12) (13) 成立, 则表示:

$$\tau^2(t) \varphi_2(\dot{\tau}(t)) + \tau(t) \varphi_1(\dot{\tau}(t)) + \varphi_0(\dot{\tau}(t)) < 0,$$

则有 $\dot{V}(t) < 0$, 证明完毕。

4 仿真实例

根据文献 [17] 中的 LFC 系统参数 (即 $D=1.0$ 、 $R=0.05$ 、 $T_G=0.1$ 、 $M=10$ 、 $T_T=0.3$), 代入构建的系统矩阵中, 最后由 Matlab 软件仿真, 分析不同时滞情况 (定常时滞 $\mu=0$, 时变时滞 $\mu=0.5$)、不同 PI 取值对 LFC 系统稳定性间的联系, 仿真结果见表 1 和 2。

表 1 不同增益 (K_p, K_I) 下的最大时滞上界 h ($\mu=0$)

Table 1 Maximum time delay upper bound h ($\mu=0$) for different gains (K_p, K_I)

K_p	K_I								
	0.1			0.4			1.0		
	文献 [14]	文献 [15]	本文	文献 [14]	文献 [15]	本文	文献 [14]	文献 [15]	本文
0	13.778	15.201	15.201 0	3.124	3.385	3.385 0	0.886	0.922	0.922 9
0.05	14.061	15.680	15.680 0	3.215	3.501	3.501 3	0.927	0.970	0.970 3
0.10	13.682	16.118	16.118 1	3.290	3.610	3.615 0	0.963	1.012	1.012 3
0.20	12.760	16.855	16.856 6	3.320	3.792	3.792 1	1.016	1.078	1.078 0
0.40	10.426	17.656	17.656 2	2.832	3.980	3.980 0	1.017	1.118	1.118 3
0.60	7.477	16.253	16.253 2	2.130	3.825	3.825 6	0.827	0.947	0.947 1
1.00	0.538	0.585	0.585 6	0.482	0.515	0.515 7	0.348	0.361	0.361 2

表 2 不同增益 (K_p, K_I) 下的最大时滞上界 h ($\mu=0.5$)

Table 2 Maximum time delay upper bound h ($\mu=0.5$) for different gains (K_p, K_I)

K_p	K_I								
	0.1			0.4			1.0		
	文献 [14]	文献 [15]	本文	文献 [14]	文献 [15]	本文	文献 [14]	文献 [15]	本文
0	12.969	14.554	14.563 0	2.854	3.227	3.230 4	0.674	0.849	0.850 4
0.05	13.234	15.025	15.068 4	2.960	3.345	3.349 8	0.715	0.895	0.895 2
0.10	12.600	15.446	15.446 8	3.034	3.449	3.454 4	0.749	0.935	0.937 8
0.20	11.014	16.091	16.151 1	2.959	3.613	3.620 9	0.783	0.993	0.993 6
0.40	7.364	16.500	16.572 3	2.176	3.697	3.710 7	0.696	0.984	0.989 4
0.60	2.537	14.808	14.815 2	1.029	3.127	3.181 2	0.502	0.719	0.725 2
1.00	0.403	0.497	0.501 2	0.365	0.445	0.445 1	0.280	0.327	0.328 2

从表 1 和 2 可以得出: 1) 在定常时滞中的结果并不能明显地超过文献 [18], 说明现今的 LKF 运用到定常时滞下的 LFC 中时提升较小。2) 在时变时滞中可以看出本文方法优于文献 [18], 说明 LKF 方面的改进在 LFC 具有时变时滞的情况下依旧有所帮助。3) 在同种时滞情况下, 比例增益 K_p 固定时, 系统最大时滞上界随着积分增益 K_I 增大而减小。4) 在同种时滞情况下, 比例增益 K_I 固定时, 会出现系统最大时滞上界随着积分增益 K_p 增大而表现为先增大后减小的复杂情况。

5 结论

本文研究了 LFC 时变时滞系统的稳定性问题, 先利用改进的二次积分不等式处理增广泛函, 再使用二次多项式不等式的判定得到了保守性较小的新的稳定性判据, 用于传统的 LFC 系统模型, 最后使用 Matlab 对数例进行仿真, 分析了在定常时滞与时变时滞两种情况下系统的稳定裕度情况, 还设定了不同的比例增益 K_p 和不同的积分增益 K_I , 与现有文献相比, 结果表明了本文方法能够更好地降低保守性,

具有更大的优势。

参考文献:

- [1] 周沙鏊. 计及电动汽车并网的负荷频率控制系统时滞相关稳定性分析[D]. 株洲: 湖南工业大学, 2021.
ZHOU Shajun. Delay-Dependent Stability Analysis for Load Frequency Control Systems with Electric Vehicles[D]. Zhuzhou: Hunan University of Technology, 2021.
- [2] 肖友强, 邓步青, 文云峰. 计及送端电网频率稳定的直流联络线极限承载能力评估[J]. 电力科学与技术学报, 2021, 36(2): 3-12.
XIAO Youqiang, DENG Buqing, WEN Yunfeng. Total Transfer Capability Assessment of HVDC Tie-Lines Based on Frequency Stability of the Sending-End Grid[J]. Journal of Electric Power Science and Technology, 2021, 36(2): 3-12.
- [3] 陶苏滕, 王琦, 赵奇, 等. 大功率缺失下频率响应负荷聚合建模与分散控制方法[J]. 电力自动化设备, 2020, 40(2): 182-188, 1.
TAO Sumeng, WANG Qi, ZHAO Qi, et al. Aggregation Modeling and Decentralized Control Method of Frequency Response Load Under Severe Power Shortage[J]. Electric Power Automation Equipment, 2020, 40(2): 182-188, 1.
- [4] WANG W, WANG W M, ZENG H B. Stability Analysis of Systems with Cyclical Delay via an Improved Delay-Monotonicity-Dependent Lyapunov Functional[J]. Journal of the Franklin Institute, 2023, 360(1): 99-108.
- [5] ZHANG X M, HAN Q L, SEURET A, et al. Overview of Recent Advances in Stability of Linear Systems with Time-Varying Delays[J]. IET Control Theory & Applications, 2019, 13(1): 1-16.
- [6] 颜俊杰. 基于双边闭环函数方法的网络化电机控制系统分析与设计[D]. 株洲: 湖南工业大学, 2023.
YAN Junjie. Analysis and Design of Networked Motor Control System Based on Two Side Closed-Loop Function Method[D]. Zhuzhou: Hunan University of Technology, 2023.
- [7] WANG Z H, LIU Y H, YANG Z H, et al. Load Frequency Control of Multi-Region Interconnected Power Systems with Wind Power and Electric Vehicles Based on Sliding Mode Control[J]. Energies, 2021, 14(8): 2288.
- [8] MAHMOUD M S. Robust Control and Filtering for Time-Delay Systems[M]. New York: Marcel Dekker, 2000: 1-27.
- [9] ZENG H B, LIU X G, WANG W. A Generalized Free-Matrix-Based Integral Inequality for Stability Analysis of Time-Varying Delay Systems[J]. Applied Mathematics and Computation, 2019, 354: 1-8.
- [10] ZHANG X M, HAN Q L, GE X H, et al. Passivity Analysis of Delayed Neural Networks Based on Lyapunov-Krasovskii Functionals with Delay-Dependent Matrices[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2020, 50(3): 946-956.
- [11] SEURET A, GOUAISBAUT F. Hierarchy of LMI Conditions for the Stability Analysis of Time-Delay Systems[J]. Systems & Control Letters, 2015, 81: 1-7.
- [12] ZHANG X M, HAN Q L. Global Asymptotic Stability Analysis for Delayed Neural Networks Using a Matrix-Based Quadratic Convex Approach[J]. Neural Networks, 2014, 54: 57-69.
- [13] ZENG H B, ZHOU S J, ZHANG X M, et al. Delay-Dependent Stability Analysis of Load Frequency Control Systems with Electric Vehicles[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2022, 52(12): 13645-13653.
- [14] 张传科. 时滞电力系统的小扰动稳定分析与负荷频率控制[D]. 长沙: 中南大学, 2013.
ZHANG Chuanke. Small-Signal Stability Analysis and Load Frequency Control for Delayed Power Systems[D]. Changsha: Central South University, 2013.
- [15] 肖伸平, 张天, 唐军, 等. 基于PI控制的时滞电力系统稳定性分析[J]. 电网技术, 2020, 44(10): 3949-3954.
XIAO Shenping, ZHANG Tian, TANG Jun, et al. Stability Analysis for Power Systems with Time-Delay Based on PI Control[J]. Power System Technology, 2020, 44(10): 3949-3954.
- [16] PARK P, LEE W I, LEE S Y. Auxiliary Function-Based Integral Inequalities for Quadratic Functions and Their Applications to Time-Delay Systems[J]. Journal of the Franklin Institute, 2015, 352(4): 1378-1396.
- [17] ZHANG X M, HAN Q L. Event-Triggered H_∞ Control for a Class of Nonlinear Networked Control Systems Using Novel Integral Inequalities[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2017, 27(4): 679-700.
- [18] ZHANG B L, CHENG L H, PAN K J, et al. Reducing Conservatism of Stability Criteria for Linear Systems with Time-Varying Delay Using an Improved Triple-Integral Inequality[J]. Applied Mathematics and Computation, 2020, 380: 125254.
- [19] SEURET A, GOUAISBAUT F. Delay-Dependent Reciprocally Convex Combination Lemma[J/OL]. HAL Science Ouverte, 2016. [2023-08-02]. <https://hal.science/hal-01257670>.
- [20] DE OLIVEIRA F S S, SOUZA F O. Further Refinements in Stability Conditions for Time-Varying Delay Systems[J]. Applied Mathematics and Computation, 2020, 369: 124866.

(责任编辑: 廖友媛)