doi:10.3969/j.issn.1673-9833.2024.03.013

四阶时间分数波方程的快速紧致差分方法

王　婉，张海湘，杨雪花

（湖南工业大学 理学院，湖南 株洲 412007）

摘　要：对于四阶时间分数波方程，提出了一种快速紧致有限差分方法。该方法对时间Caputo导数采用H2N2方法进行离散，同时为了增加计算效率，采用了指数和来近似核 $t^{1-\gamma}$，并运用降阶法和差分法对空间导数项进行离散。并证明了该格式的收敛性，得出的空间收敛阶达到四阶，时间收敛阶达到了（$3-\gamma$）阶。最后，以数值算例验证了理论分析的有效性，得知该方法所需的CPU时间较短。

关键词：计算数学；快速算法；H2N2算法；紧致差分方法

中图分类号：O242.2　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673-9833(2024)03-0096-06

引文格式：王　婉，张海湘，杨雪花. 四阶时间分数波方程的快速紧致差分方法[J]. 湖南工业大学学报，2024，38(3)：96-101.

A Fast Compact Difference Method for Fourth-Order Time Fractional Wave Equations

WANG Wan，ZHANG Haixiang，YANG Xuehua

（College of Science，Hunan University of Technology，Zhuzhou Hunan 412007，China）

Abstract：A fast compact finite difference method, which discretizes the time Caputo derivative by using the H2N2 method, is proposed for fourth-order time fractional wave equations. In view of an increase of the computational efficiency, the exponential sum is used to approximate the kernel $t^{1-\gamma}$, with the order reduction method and difference method adopted to discretize the spatial derivative term, thus proving the convergence of the scheme, with a spatial convergence order of four and a temporal convergence order of（$3-\gamma$）. Finally, numerical examples are used to verify the effectiveness of the theoretical analysis, and it is found that the CPU time required for this method is relatively short.

Keywords：computational mathematics；fast algorithm；H2N2 algorithm；compact difference scheme

1　研究背景

分数微分方程现已被应用于越来越多的领域，如黏弹性材料[1-2]、控制理论[3]、金融市场中的期权定价模型[4-5]等。到目前为止，科研工作者们提出了很多解决具有弱奇异性分数阶微分方程的方法，比如有限差分法[6-7]、有限元方法[8-9]、光谱方法[10]，傅里叶变换法[11-12]等。对于分数阶微分方程中的Caputo导数项，学者们采用不同方法近似处理。例如，Xu D.等[13]用 L_1 离散Caputo导数项，用二阶卷积求积公式近似Riemann-Liouville积分项，构造了紧差分格式，不仅给出了收敛性和稳定性的证明，且以数值算例验证了理论分析结果。Guo J.等[14]用 L_{1-2} 公式离散Caputo导数项，用二阶有限差分法离散积分项，得知其空间收敛阶和时间收敛阶都达到二阶，并证明了格式的稳定性与收敛性。Shen J. Y.等[15]提出

收稿日期：2023-02-21

基金项目：国家自然科学基金数学天元基金资助项目（12226340, 12226337, 12126321）；湖南省自然科学基金资助项目（2022JJ50083）；湖南省教育厅优秀青年基金资助项目（21B0550）

作者简介：王　婉，女，湖南工业大学硕士生，主要研究方向为计算数学，E-mail：15136727518@163.com

通信作者：杨雪花，女，湖南工业大学副教授，博士(后)，主要研究方向为偏微分方程的数值模拟与金融统计计算，E-mail：hunanshidayang@163.com

H2N2 数值微分公式（二次 Hermite 和 Newton 插值多项式的应用）来近似 Caputo 导数项，并建立了有限差分格式。为了增加计算效率，其利用指数和近似核 $t^{1-\gamma}$，并推导出一种快速差分格式。对于初始时间的弱奇异性也在等级网格中进行了讨论。Jiang S. D. 等 [16] 提出了分数扩散方程的快速 L_1 差分格式，(0, 1) 阶的 Caputo 导数项被快速 L_1 递归公式离散。Xu W. Y. 等 [17] 考虑一种具有二阶空间和时间精度的快速差分格式。用 $FL2\text{-}1\sigma$ 公式近似时间卡普托导数，该公式使用了核指数和近似 Caputo 微分中出现的函数；通过离散能量方法证明了其无条件收敛性，最后通过数值例子验证了该方案的数值精度和效率。

本文讨论如下四阶分数波方程的初边值问题：

$$ {}_0^C D_t^\gamma u(x,t)+u_{xxxx}(x,t)=f(x,t),\ (x,t)\in\Omega, \tag{1}$$

其初始条件和边界条件分别如下：

$$u(x,0)=u^0(x),\ u_t(x,0)=\psi(x),\ x\in[0,L], \tag{2}$$

$$u(0,t)=u(L,t)=u_{xx}(x,t)=u_{xx}(L,t)=0,\quad t\in(0,T], \tag{3}$$

式（1）~（3）中：$\Omega=(0,L)\times(0,T]$；$f(x,t)$、$u^0(x)$、$\psi(x)$ 为光滑函数；

$$ {}_0^C D_t^\gamma u(x,t)=\frac{1}{\Gamma(2-\gamma)}\int_0^t \frac{\partial^2 u(x,s)}{\partial s^2}\frac{\mathrm{d}s}{(t-s)^{\gamma-1}},\ \gamma\in(1,2)。$$

本文中，C 为一个正常数，在不同情况下可能具有不同的值。

2　预备知识

对区间 $[0,L]$ 作 M 等分，区间 $[0,T]$ 作 N 等分，记 $h=L/M,\ \tau=T/N,\ x_j=jh,\ 0\leqslant j\leqslant M,\ t_n=n\tau,\ 0\leqslant n\leqslant N$，其中 h 为空间步长，τ 为时间步长。

设 $\left\{u_j^n \mid 0\leqslant j\leqslant M,\ 0\leqslant n\leqslant N\right\}$ 为网格函数，且

$$u_j^{n-\frac12}=\frac12\left(u_j^n+u_j^{n-1}\right),\quad \delta_t u_j^n=\frac1\tau\left(u_j^n-u_j^{n-1}\right),$$

$$\Delta_t v^n=\frac1\tau\left(v^{n+\frac12}-v^{n-\frac12}\right),\ \delta_x u_j^n=\frac1h\left(u_j^n-u_{j-1}^n\right),$$

$$\delta_x^2 u_j^n=\frac1h\left(\delta_x u_{j+1}^n-\delta_x u_j^n\right),\quad 1\leqslant j\leqslant M-1。$$

$$Au_j^n=\begin{cases}u_j^n, & j=0;\\ \left(u_{j+1}^n+10u_j^n+u_{j-1}^n\right)/12, & 1\leqslant j<M;\\ u_j^n, & j=M。\end{cases}$$

令 $\boldsymbol{V}_h=\left\{\boldsymbol{v}\mid \boldsymbol{v}=(v_1,v_2,\cdots,v_{M-1})^{\mathrm T},\quad v_0=w_M=0\right\}$，

对于任何 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{V}_h$，有以下离散内积和模：

$$<\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}>=h\sum_{j=1}^{M-1}u_jv_j,\quad \|\boldsymbol{u}\|=\sqrt{<\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}>},$$

$$\|\boldsymbol{u}\|_\infty=\max_{1\leqslant j\leqslant M-1}\left|u_j\right|,\quad \|\delta_x\boldsymbol{u}\|^2=h\sum_{j=1}^{M}\left(\delta_x u_{j-1/2}\right)^2,$$

$$\left\|\delta_x^2\boldsymbol{u}\right\|^2=h\sum_{j=1}^{M-1}\left(\delta_x^2 u_j\right)^2。$$

引理 1[16]　对于给定的 $\alpha\in(0,1)$、截止时间限制 δ、误差 ε 和最后时间 T，有一个正整数 $N_{\exp}$，正点 $\left\{s_l \mid l=1,2,\cdots,N_{\exp}\right\}$ 和相应的正权重 $\left\{w_l \mid l=1,2,\cdots,N_{\exp}\right\}$，可得 $\left|t^{-\alpha}-\sum_{l=1}^{N_{\exp}}w_l e^{-s_l t}\right|\leqslant\mu,\ \forall t\in[\delta,T]$，其中

$$N_{\exp}=O\left(\left(\log\frac1\varepsilon\right)\left(\log\log\frac1\varepsilon\right)+\left(\log\frac1\varepsilon\right)\left(\log\log\frac1\varepsilon\right)+\log\frac1\varepsilon\right)。$$

接下来介绍一种运用 H2N2 方法计算 Caputo 分数导数的快速算法。

令 $\delta=\tau/2$，可得

$$\begin{aligned}&{}_0^C D_t^\gamma f\left(t_{n-1/2}\right)\approx\\ &\frac{1}{\Gamma(2-\gamma)}\int_{t_0}^{t_{\frac12}}H''_{2,0}(t)\sum_{l=1}^{N_{\exp}}w_l e^{-s_l(t_{n-1/2}-t)}\mathrm{d}t+\\ &\sum_{k=1}^{n-2}\int_{t_{k-1/2}}^{t_{k+1/2}}N''_{2,\ k}(t)\sum_{l=1}^{N_{\exp}}w_l e^{-s_l(t_{n-1/2}-t)}\mathrm{d}t=\\ &{}^F D_t^\gamma f\left(t_{n-1/2}\right)=\frac{1}{\Gamma(2-\gamma)}\Bigg[a_0^{(n,\gamma)}\delta_t f^{n-1/2}-\\ &\sum_{k=1}^{n-1}\left(a_{n-k-1}^{(n,\gamma)}-a_{n-k}^{(n,\gamma)}\right)\delta_t f^{k-1/2}-a_{n-1}^{(n,\gamma)}f'(t_0)\Bigg]。\end{aligned}$$

其中，

$$a_{n-k-1}^{(n,\gamma)}=\begin{cases}\dfrac2\tau\displaystyle\int_{t_0}^{t_{1/2}}\sum_{l=1}^{N_{\exp}}w_l e^{-s_l(t_{n-1/2}-t)}\mathrm{d}t, & k=0;\\ \dfrac1\tau\displaystyle\int_{t_{k-1/2}}^{t_{k+1/2}}\sum_{l=1}^{N_{\exp}}w_l e^{-s_l(t_{n-1/2}-t)}\mathrm{d}t, & k=1,2,\cdots,n-2;\\ a_0^{(n,\gamma)}, & k=n-1。\end{cases} \tag{4}$$

引理 2[15]　设 $u\in C^{(3)}[0,T]$，$\gamma\in(1,2)$，则有 $\left|R_{1j}^{n-1/2}\right|=\left|{}_0^C D_t^\gamma u\left(t_{n-1/2}\right)-{}^F D_t^\gamma u\left(t_{n-1/2}\right)\right|\leqslant c_0\tau^{3-\gamma}+c_1\varepsilon$，$1\leqslant n\leqslant N$。

其中

$$c_0=\left[\frac{1}{8\Gamma(2-\gamma)}+\frac{1}{12\Gamma(3-\gamma)}+\frac{\gamma-1}{2\Gamma(4-\gamma)}\right]\max_{t_0\leqslant t\leqslant t_n}\left|u'''(t)\right|,$$

$$c_1=\frac{t_{n-3/2}}{\Gamma(2-\gamma)}\max_{t_0\leqslant t\leqslant t_n}\left|u''(t)\right|。$$

引理 3[17]　若函数 $u(x)\in C_x^6([0,L])$，则有

$$\frac{1}{12}\left[u''\left(x_{j+1}\right)+10u''\left(x_j\right)+u''\left(x_{j-1}\right)\right]-$$
$$\frac{1}{h^2}\left[u\left(x_{j+1}\right)-2u\left(x_j\right)+u\left(x_{j-1}\right)\right]\frac{h^4}{240}u^{(6)}\left(\xi_j\right),$$
$$\xi_j\in\left(x_{j-1},\ x_{j+1}\right),\ 1\leqslant j\leqslant M-1。$$

3 数值离散格式

定解问题（1）~（3）可写成如下形式：

$$\begin{cases}{}_0^C D_t^{\gamma}u\left(x,\ t\right)+v_{xx}\left(x,\ t\right)=f\left(x,\ t\right),\ \left(x,\ t\right)\in\Omega;\\ v\left(x,\ t\right)=u_{xx}\left(x,\ t\right),\ 0<x<L,\ 0<t\leqslant T;\\ u\left(x,\ 0\right)=u^0(x),\ u_t\left(x,\ 0\right)=\psi(x),\ 0\leqslant x\leqslant L;\\ u\left(0,\ t\right)=u\left(L,\ t\right)=v\left(0,\ t\right)=v\left(L,\ t\right)=0,\ 0<t\leqslant T。\end{cases}\tag{5}$$

定义网格函数

$$U_j^n=u\left(x_j,\ t_n\right),\ V_j^n=v\left(x_j,\ t_n\right),\ f_j^n=f\left(x_j,\ t_n\right),$$
$$0\leqslant j\leqslant M,\ 0\leqslant n\leqslant N。$$

在点$\left(x_j,t_{n-1/2}\right)$考虑式（5）第一、二个方程，有

$${}_0^C D_t^{\gamma}u\left(x_j,\ t_{n-1/2}\right)+v_{xx}\left(x_j,\ t_{n-1/2}\right)=f\left(x_j,\ t_{n-1/2}\right),$$
$$1\leqslant j\leqslant M-1,\ 1\leqslant n\leqslant N,\tag{6}$$

$$v\left(x_j,\ t_{n-1/2}\right)=u_{xx}\left(x_j,\ t_{n-1/2}\right),\ 1\leqslant j\leqslant M-1,1\leqslant n\leqslant N。\tag{7}$$

将离散紧算子 A 分别作用于式（6）和（7），由泰勒展开式、引理 1 及 2，可得

$$A^F DU_j^{n-1/2}=-\delta_x^2V_j^{n-1/2}+Af_j^{n-1/2}+R_{1j}^{n-1/2},$$
$$1\leqslant j\leqslant M-1,\ 1\leqslant n\leqslant N;\tag{8}$$

$$AV_j^{n-1/2}=\delta_x^2U_j^{n-1/2}+R_{2j}^{n-1/2},\ 1\leqslant j\leqslant M-1,1\leqslant n\leqslant N,\tag{9}$$

式（8）（9）中：

$$|R_{1j}^{n-1/2}|\leqslant C\left(\tau^{3-\gamma}+h^4+\varepsilon\right),\ 1\leqslant j\leqslant M-1,\ 1\leqslant n\leqslant N。\tag{10}$$

$$|R_{2j}^{n-1/2}|\leqslant C\left(h^4+\tau^2\right),\ 1\leqslant j\leqslant M-1,1\leqslant n\leqslant N。\tag{11}$$

注意：初边值条件为

$$\begin{cases}U_0^n=U_M^n=0,\ V_0^n=V_M^n=0,\ 1\leqslant n\leqslant N;\\ U_j^0=u^0\left(x_j\right),\ 0\leqslant j\leqslant M。\end{cases}\tag{12}$$

在式（8）（9）中，省略小量项，并用$u_j^{n-1/2}$和$v_j^{n-1/2}$分别代替$U_j^{n-1/2}$和$V_j^{n-1/2}$，得到如下紧差分格式

$$\begin{cases}A^F Du_j^{n-1/2}=-\delta_x^2v_j^{n-1/2}+Af_j^{n-1/2},\ 1\leqslant j\leqslant M-1,1\leqslant n\leqslant N;\\ Av_j^{n-1/2}=\delta_x^2u_j^{n-1/2},\ \ 1\leqslant j\leqslant M-1,\ 1\leqslant n\leqslant N;\\ u_0^n=u_M^n=0,\ v_0^n=v_M^n=0,\ 1\leqslant n\leqslant N;\\ u_j^0=u^0\left(x_j\right),\ \ 0\leqslant j\leqslant M。\end{cases}\tag{13}$$

引理 4 由带积分余项的泰勒展开式及不等式（10），可得 $\left|\varDelta_t R_{1j}^n\right|\leqslant C\left(\tau^{3-\gamma}+h^4\right),\ 1\leqslant j\leqslant M-1,\ 1\leqslant n\leqslant N$。

4 紧差分格式分析

为了证明格式的收敛性，给出以下引理。

引理 5[18] 设 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{V}_h$，则

$$<\delta_x^2\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v}>=-\sum_{j=1}^{M}h\left(\delta_x u_{j-1/2}\right)\left(\delta_x v_{j-1/2}\right)=<\boldsymbol{u},\ \delta_x^2\boldsymbol{v}>。$$

引理 6[19] 设 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{V}_h$，则有

$$h\sum_{j=1}^{M-1}\left(Au_j\right)\delta_x^2v_j=h\sum_{j=1}^{M-1}\left(\delta_x^2u_j\right)Av_j。$$

引理 7[20] 设 $\boldsymbol{u}\in\boldsymbol{V}_h$，可得

$$\|\boldsymbol{u}\|\leqslant\sqrt{L}\|\boldsymbol{u}\|_\infty,\ \|\boldsymbol{u}\|_\infty\leqslant\frac{\sqrt{L}}{2}\|\delta_x\boldsymbol{u}\|,\ \|\delta_x\boldsymbol{u}\|\leqslant\frac{1}{\pi}\|\delta_x^2\boldsymbol{u}\|。$$

引理 8[21] 对于任意正整数 p 和函数 $G=\{G_1,G_2,\cdots\}$，有

$$\sum_{n=1}^{N}\left[a_0G_n-\sum_{k=1}^{n-1}\left(a_{n-k-1}-a_{n-k}\right)G_k-a_{n-1}q\right]G_n\geqslant$$
$$\frac{t_N^{1-\gamma}}{2}\tau\sum_{n=1}^{N}G_n^2-\frac{t_N^{2-\alpha}}{2\left(2-\gamma\right)}q^2。$$

其中，$\{a_j\}$ 定义见式（4）。

引理 9[19] 对任意网格函数$\left\{u^m,\ v^m|0\leqslant m\leqslant N\right\}$，有$\tau\sum_{l=1}^{m}\left(\delta_t u^{l-1/2}\right)v^{l-1/2}=u^m v^{m-1/2}-u^0v^{1/2}-\tau\sum_{l=1}^{m}u^l\left(\varDelta_t v^l\right)$。

引理 10[22] 设 $F(k)$、$g(k)$ 为非负函数，且满足

$$F\left(k\right)\leqslant C\tau\sum_{l=1}^{k-1}F\left(l\right)+g\left(k\right),\ k=1,\ 2,\ \cdots,$$

则有$F\left(k\right)\leqslant e^{Ck\tau}g\left(k\right),\ k=1,\ 2,\ \cdots$。

定理 1 设$\boldsymbol{U}^n=\left(U_1^n,\ U_2^n,\ \cdots,\ U_{M-1}^n\right)^{\mathrm{T}}$是问题(1)~（3）的解，$\boldsymbol{u}^n=\left(u_1^n,\ u_2^n,\ \cdots,\ u_{M-1}^n\right)^{\mathrm{T}}$是差分格式的解。$V_j^n=v\left(x_j,\ t_n\right)$为精确解，$v_j^n$为数值解。则有$\max\limits_{1\leqslant n\leqslant N}\left\|\boldsymbol{U}^n-\boldsymbol{u}^n\right\|_\infty=O\left(\tau^{3-\gamma}+h^4+\varepsilon\right),\ 1\leqslant n\leqslant N$。

证明：令 $e_j^n=U_j^n-u_j^n,\ \eta_j^n=V_j^n-v_j^n,\ 0\leqslant j\leqslant M,\ 1\leqslant n\leqslant N$。将式（8）（9）和（12）与（13）相减，得到如下误差方程：

$$\begin{cases}A^F De_j^{n-1/2}+\delta_x^2\eta_j^{n-1/2}=R_{1j}^{n-1/2},\ 1\leqslant j\leqslant M-1,\ 1\leqslant n\leqslant N;\\ A\eta_j^{n-1/2}=\delta_x^2e_j^{n-1/2}+R_{2j}^{n-1/2},\ 1\leqslant j\leqslant M-1,\ 1\leqslant n\leqslant N;\\ e_0^n=e_M^n=0,\ \ \eta_0^n=\eta_M^n=0,\ \ 1\leqslant n\leqslant N;\\ e_j^0=0,\ \ 0\leqslant j\leqslant M。\end{cases}\tag{14}$$

将算子 A 作用在式（13）中第二个式子，可得

$$A^F Dv_j^{n-1/2}={}^F D\delta_x^2 u_j^{n-1/2},\ 1\leqslant j\leqslant M-1,\ 1\leqslant n\leqslant N。\qquad(15)$$

利用引理 2 和引理 3，则有

$$A^F DV_j^{n-1/2}={}^F D\delta_x^2 U_j^{n-1/2}+O\left(\tau^{3-\gamma}+h^4+\varepsilon\right),\quad 1\leqslant j\leqslant M-1,\ 1\leqslant n\leqslant N。\qquad(16)$$

用式（16）减去式（15），可得

$$A^F D\eta_j^{n-1/2}={}^F D\delta_x^2 e_j^{n-1/2}+R_{3j}^{n-1/2},\ 1\leqslant j\leqslant M-1, 1\leqslant n\leqslant N,\qquad(17)$$

其中 $\left|R_{3j}^{n-1/2}\right|\leqslant C\left(\tau^{3-\gamma}+h^4+\varepsilon\right)$。

式（14）中的第一个式子乘 $h\tau\delta_x^2\delta_t\eta_j^{n-1/2}$，式（17）乘 $h\tau A\delta_t\eta_j^{n-1/2}$，并对 j 从 1~M−1 求和，对 n 从 1~m 求和，可得

$$\tau\sum_{n=1}^{m}h\sum_{j=1}^{M-1}\left(A^F De_j^{n-1/2}\right)\left(\delta_x^2\delta_t\eta_j^{n-1/2}\right)+\tau\sum_{n=1}^{m}h\sum_{j=1}^{M-1}\left(\delta_x^2\eta_j^{n-1/2}\right)\left(\delta_x^2\delta_t\eta_j^{n-1/2}\right)=\tau\sum_{n=1}^{m}h\sum_{j=1}^{M-1}R_{1j}^{n-1/2}\left(\delta_x^2\delta_t\eta_j^{n-1/2}\right),\qquad(18)$$

$$\tau\sum_{n=1}^{m}h\sum_{j=1}^{M-1}\left(A^F D\eta_j^{n-1/2}\right)\left(A\delta_t\eta_j^{n-1/2}\right)=\tau\sum_{n=1}^{m}h\sum_{j=1}^{M-1}\left({}^F D\delta_x^2 e_j^{n-1/2}\right)\left(A\delta_t\eta_j^{n-1/2}\right)+\tau\sum_{n=1}^{m}h\sum_{j=1}^{M-1}R_{3j}^{n-1/2}\left(A\delta_t\eta_j^{n-1/2}\right)。\qquad(19)$$

由引理 6 可知

$$\tau\sum_{n=1}^{m}h\sum_{j=1}^{M-1}\left({}^F D\delta_x^2 e_j^{n-1/2}\right)\left(A\delta_t\eta_j^{n-1/2}\right)=\tau\sum_{n=1}^{m}h\sum_{j=1}^{M-1}\left(A^F De_j^{n-1/2}\right)\left(\delta_x^2\delta_t\eta_j^{n-1/2}\right)。\qquad(20)$$

将式（18）和（19）相加，可得

$$\tau\sum_{n=1}^{m}h\sum_{j=1}^{M-1}\left(A^F D\eta_j^{n-1/2}\right)\left(A\delta_t\eta_j^{n-1/2}\right)+\tau\sum_{n=1}^{m}h\sum_{j=1}^{M-1}\left(\delta_x^2\eta_j^{n-1/2}\right)\left(\delta_x^2\delta_t\eta_j^{n-1/2}\right)=\tau\sum_{n=1}^{m}h\sum_{j=1}^{M-1}R_{1j}^{n-1/2}\left(\delta_x^2\delta_t\eta_j^{n-1/2}\right)+\tau\sum_{n=1}^{m}h\sum_{j=1}^{M-1}R_{3j}^{n-1/2}\left(A\delta_t\eta_j^{n-1/2}\right)。\qquad(21)$$

对于式（21）左端的第一项，利用引理 8 并注意 $\dfrac{\partial\eta\left(x_j,0\right)}{\partial t}=0$，可得

$$\tau\sum_{n=1}^{m}h\sum_{j=1}^{M-1}\left(A^F D\eta_j^{n-1/2}\right)\left(A\delta_t\eta_j^{n-1/2}\right)\geqslant\frac{\tau t_m^{1-\gamma}}{2\Gamma(2-\gamma)}\sum_{n=1}^{m}\left\|A\delta_t\eta^{n-1/2}\right\|,\qquad(22)$$

对式（21）左端第二项，注意 $\dfrac{\partial\eta\left(x_j,0\right)}{\partial t}=0$，则有

$$\tau\sum_{n=1}^{m}h\sum_{j=1}^{M-1}\left(\delta_x^2\eta_j^{n-1/2}\right)\left(\delta_x^2\delta_t\eta_j^{n-1/2}\right)=\frac{1}{2}\left\|\delta_x^2\eta^m\right\|^2。\qquad(23)$$

对于式（21）右端的第一项，利用引理 9 和 young 不等式，且考虑 $\eta_0=0$，可得

$$\tau\sum_{n=1}^{m}h\sum_{j=1}^{M-1}R_{1j}^{n-1/2}\left(\delta_x^2\delta_t\eta_j^{n-1/2}\right)=h\sum_{j=1}^{M-1}\left(\delta_x^2\eta_j^m\right)R_{1j}^{m-1/2}-h\sum_{j=1}^{M-1}\left(\delta_x^2\eta_j^0\right)R_{1j}^{1/2}-h\sum_{j=1}^{M-1}\tau\sum_{n=1}^{m}\left(\delta_x^2\eta_j^n\right)\left(\Delta_t R_{1j}^n\right)\leqslant\frac{1}{4}\left\|\delta_x^2\eta^m\right\|^2+\left\|R_1^{m-1/2}\right\|^2+\frac{1}{2}\left\|R_1^{1/2}\right\|^2+\frac{\tau}{2}\sum_{n=1}^{m-1}\left\|\delta_x^2\eta^n\right\|^2+\frac{\tau}{2}\sum_{n=1}^{m-1}\left\|\Delta_t R_1^n\right\|^2。\qquad(24)$$

式（21）右端第二项，利用 young 不等式，得到

$$\tau\sum_{n=1}^{m}h\sum_{j=1}^{M-1}R_{3j}^{n-1/2}\left(A\delta_t\eta_j^{n-1/2}\right)\leqslant\frac{\Gamma(2-\gamma)t_m^{\gamma-1}\tau}{2}\sum_{n=1}^{m}\left\|R_3^{n-1/2}\right\|^2+\frac{\tau t_m^{1-\gamma}}{2\Gamma(2-\gamma)}\sum_{n=1}^{m}\left\|A\delta_t\eta^{n-1/2}\right\|^2。\qquad(25)$$

将式（22）~（25）代入式（21），有

$$\left\|\delta_x^2\eta^m\right\|^2\leqslant 2\tau\sum_{n=1}^{m-1}\left\|\delta_x^2\eta^n\right\|^2+2\left\|R_1^{1/2}\right\|^2+4\left\|R_1^{m-1/2}\right\|^2+2\tau\sum_{n=1}^{m}\left\|\Delta_t R_1^n\right\|^2+2\Gamma(2-\gamma)t_m^{\gamma-1}\tau\sum_{n=1}^{m}\left\|R_3^{n-1/2}\right\|^2。\qquad(26)$$

令

$$G^m=2\left\|R_1^{1/2}\right\|^2+4\left\|R_1^{m-1/2}\right\|^2+2\tau\sum_{n=1}^{m}\left\|\Delta_t R_1^n\right\|^2+2\Gamma(2-\gamma)t_m^{\gamma-1}\tau\sum_{n=1}^{m}\left\|R_3^{n-1/2}\right\|^2,$$

因而式（26）可写成

$$\left\|\delta_x^2\eta^m\right\|^2\leqslant 2\tau\sum_{n=1}^{m-1}\left\|\delta_x^2\eta^n\right\|^2+G^m。$$

由引理 10 得到 $\left\|\delta_x^2\eta^m\right\|^2\leqslant G^m e^{Cm\tau}+G^m$。

考虑式（10）和引理 4 可得

$$\left\|\delta_x^2\eta^m\right\|^2\leqslant CG^m\leqslant C\left(\tau^{3-\gamma}+h^4+\varepsilon\right)^2,\ 1\leqslant m\leqslant N。$$

由引理 7 可知 $\left\|\eta^m\right\|_\infty\leqslant CG^m\leqslant C\left(\tau^{3-\gamma}+h^4+\varepsilon\right)$。

当 m 为任意值时，有

$$\left\|\eta^n\right\|_\infty\leqslant CG^m\leqslant C\left(\tau^{3-\gamma}+h^4+\varepsilon\right),\ 1\leqslant n\leqslant N。$$

由式（14）和（17）知

$$\left\|\delta_x^2\eta^{n-1/2}\right\|_\infty\leqslant\left\|A\eta^{n-1/2}\right\|_\infty+\left\|R_2^{n-1/2}\right\|_\infty\leqslant C\left\|\eta^{n-1/2}\right\|_\infty+\left\|R_2^{n-1/2}\right\|_\infty\leqslant C\left(\tau^{3-\gamma}+h^4+\varepsilon\right)+C\left(\tau^2+h^4\right)\leqslant C\left(\tau^{3-\gamma}+h^4+\varepsilon\right)。$$

引用引理 7，有

$$\left\|\eta^n\right\|_\infty \leqslant \left\|\delta_x^2 \eta^{n-1/2}\right\| \leqslant C\left(\tau^{3-\gamma}+h^4+\varepsilon\right)。$$

定理 1 证毕。

5　数值算例

应用快速紧差分格式计算下列定解问题：

$${}_0^C D_t^\gamma u(x,t)+u_{xxxx}(x,t)=f(x,t),\quad (x,t)\in\Omega,$$

其中精确解为

$$u(x,t)=t^{2+\gamma}\sin 2\pi x,$$

右端项为

$$f(x,t)=\left(\Gamma(3+\gamma)/2+16\pi^4 t^\gamma\right)t^2\sin 2\pi x,$$

不同步长时的最大误差为

$$E_\infty(h,\tau)=\max_{1\leqslant j\leqslant M-1,\ 1\leqslant n\leqslant N}\left|u(x_j,\ t_n)-u_j^n\right|,$$

空间收敛阶为

$$Rate^x=\log_2\left[E_\infty(2h,\tau)/E_\infty(h,\tau)\right],$$

时间收敛阶为

$$Rate^t=\log_2\left[E_\infty(h,2\tau)/E_\infty(h,\tau)\right]。$$

固定时间步长 N=2 048，参数 $\varepsilon=10^{-12}$，γ 取不同值时，差分格式的最大误差以及相应的空间收敛阶与 CPU 时间见表 1。由表 1 中数据可知，上述问题的空间收敛阶为 4。

表 1　N=2 048 时最大误差及相应的空间阶、CPU 时间

Table 1　Maximum error, spatial order and CPU time with N=2 048

γ	M	E_∞	$Rate^x$	CPU 时间
1.2	4	5.681e−02	*	42.449
	8	3.245e−03	4.130	40.940
	16	1.989e−04	4.028	43.566
	32	1.236e−05	4.007	53.145
1.5	4	5.673e−02	*	39.161
	8	3.241e−03	4.130	39.979
	16	1.987e−04	4.028	42.715
	32	1.238e−05	4.004	52.242
1.7	4	5.667e−02	*	42.243
	8	3.237e−03	4.130	43.007
	16	1.986e−04	4.027	45.446
	32	1.252e−05	3.987	51.942

固定空间步数 M=512，参数 $\varepsilon=10^{-12}$，表 2 中列出了不同 γ 取值和时间步长 N 下，计算得到的最大误差，及其相应的时间收敛阶与 CPU 时间。分析表 2 中的数据可以得知，时间收敛阶为 $(3-\gamma)$ 阶，且所需 CPU 时间较少。

表 2　M=512 时最大误差及时间阶与 CPU 时间

Table 2　Maximum error, time order and CPU time with M=512

γ	N	E_∞	$Rate^x$	CPU 时间
1.2	16	4.663e−06	*	1.640
	32	1.412e−06	1.724	4.157
	64	4.007e−07	1.816	16.110
	128	1.202e−07	1.737	55.516
1.5	16	3.077e−05	*	1.213
	32	1.092e−05	1.495	3.515
	64	3.867e−06	1.497	16.122
	128	1.366e−06	1.501	59.817
1.8	16	1.667e−04	*	0.980
	32	7.284e−05	1.194	4.106
	64	3.177e−05	1.197	16.510
	128	1.385e−05	1.198	61.537

固定 γ 值，图 1 给出了在空间方向上的收敛阶，图 2 给出了在时间方向上的收敛阶。由图 1 和 2 可看出，实例的空间收敛阶与时间收敛阶与理论分析得到的结论是一致的。

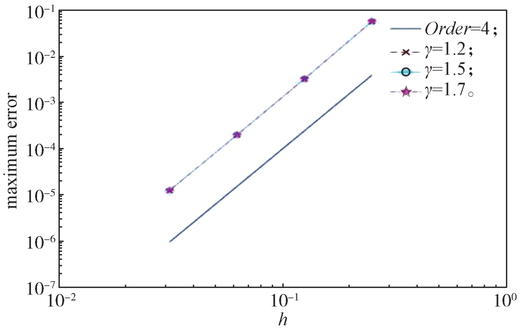

图 1　当 γ 固定时的空间收敛阶

Fig. 1　Spatial convergence orders with a fixed value of γ

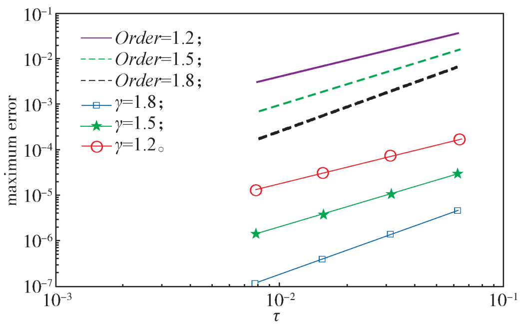

图 2　当 γ 固定时的时间收敛阶

Fig. 2　Temporal convergence orders with a fixed value of γ

6　结语

本文研究了四阶分数波动方程的快速紧差分格式，Caputo 导数项用一种快速的 H2N2 方法来近似，通过使用降阶法和离散能量法得到格式的收敛性。

由数值算例可知，本文考虑的紧差分格式的收敛阶为 $O(\tau^{3-\gamma}+\varepsilon+h^4)$，且数值算例验证了理论分析结果。该格式所需的 CPU 时间较短。

参考文献：

[1] CAPUTO M. Linear Models of Dissipation Whose Q is Almost Frequency Independent II[J]. Geophysical Journal International，1967，13(5)：529−539.

[2] BAGLEY R L，CALICO R A. Fractional Order State Equations for the Control of Viscoelastically Damped Structures[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics，1991，14(2)：304−311.

[3] PODLUBNY I. Fractional Differential Equations[M]. New York：Lightning Source Inc，1998：41−117.

[4] CARTEA Á，DEL-CASTILLO-NEGRETE D. Fractional Diffusion Models of Option Prices in Markets with Jumps[J]. Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications，2007，374(2)：749−763.

[5] SCALAS E，GORENFLO R，MAINARDI F. Fractional Calculus and Continuous-Time Finance[J]. Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications，2000，284 (1/2/3/4)：376−384.

[6] LIN Y M，XU C J. Finite Difference/Spectral Approximations for the Time-Fractional Diffusion Equation[J]. Journal of Computational Physics，2007，225(2)：1533−1552.

[7] STYNES M，O'RIORDAN E，GRACIA J L. Error Analysis of a Finite Difference Method on Graded Meshes for a Time-Fractional Diffusion Equation[J]. SIAM Journal on Numerical Analysis，2017，55(2)：1057−1079.

[8] JIN B T，LAZAROV R，ZHOU Z. Error Estimates for a Semidiscrete Finite Element Method for Fractional Order Parabolic Equations[J]. SIAM Journal on Numerical Analysis，2013，51(1)：445−466.

[9] ZENG F H，LI C P. A New Crank-Nicolson Finite Element Method for the Time-Fractional Subdiffusion Equation[J]. Applied Numerical Mathematics，2017，121：82−95.

[10] YAN Y，FAIRWEATHER G. Orthogonal Spline Collocation Methods for some Partial Integrodifferential Equations[J]. SIAM Journal on Numerical Analysis，1992，29(3)：755−768.

[11] CHEN C M，LIU F，BURRAGE K. Finite Difference Methods and a Fourier Analysis for the Fractional Reaction-Subdiffusion Equation[J]. Applied Mathematics and Computation，2008，198(2)：754−769.

[12] CHEN C M，LIU F，ANH V. A Fourier Method and an Extrapolation Technique for Stokes' First Problem for a Heated Generalized Second Grade Fluid with Fractional Derivative[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics，2009，223(2)：777−789.

[13] XU D，QIU W L，GUO J. A Compact Finite Difference Scheme for the Fourth-Order Time-Fractional Integro-Differential Equation with a Weakly Singular Kernel[J]. Numerical Methods for Partial Differential Equations，2020，36(2)：439−458.

[14] GUO J，XU D，QIU W L. A Finite Difference Scheme for the Nonlinear Time-Fractional Partial Integro-Differential Equation[J]. Mathematical Methods in the Applied Sciences，2020，43(6)：3392−3412.

[15] SHEN J Y，LI C P，SUN Z Z. An H2N2 Interpolation for Caputo Derivative with Order in (1, 2) and Its Application to Time-Fractional Wave Equations in More than one Space Dimension[J]. Journal of Scientific Computing，2020，83(2)：1−29.

[16] JIANG S D，ZHANG J W，ZHANG Q A，et al. Fast Evaluation of the Caputo Fractional Derivative and Its Applications to Fractional Diffusion Equations[J]. Communications in Computational Physics，2017，21(3)：650−678.

[17] XU W Y，SUN H. A Fast Second-Order Difference Scheme for the Space-Time Fractional Equation[J]. Numerical Methods for Partial Differential Equations，2019，35(4)：1326−1342.

[18] CHEN H B，XU D，CAO J L，et al. A Backward Euler Alternating Direction Implicit Difference Scheme for the Three-Dimensional Fractional Evolution Equation[J]. Numerical Methods for Partial Differential Equations，2018，34(3)：938−958.

[19] HU X L，ZHANG L M. A New Implicit Compact Difference Scheme for the Fourth-Order Fractional Diffusion-Wave System[J]. International Journal of Computer Mathematics，2014，91(10)：2215−2231.

[20] 孙志忠 . 偏微分方程数值解法 [M]. 3 版 . 北京：科学出版社，2022：2−9.
SUN Zhizhong. Numerical Solution of Partial Differential Equations[M]. 3rd ed. Beijing：Science Press，2022：2−9.

[21] SUN Z Z，WU X N. A Fully Discrete Difference Scheme for a Diffusion-Wave System[J]. Applied Numerical Mathematics，2006，56(2)：193−209.

[22] LUBICH C. On Convolution Quadrature and Hille-Phillips Operational Calculus[J]. Applied Numerical Mathematics，1992，9(3/4/5)：187−199.

（责任编辑：廖友媛）