

doi:10.3969/j.issn.1673-9833.2024.02.006

考虑时滞的自平衡车控制系统稳定性分析

易奎辰, 曾红兵, 梁津铭, 李新宇

(湖南工业大学 电气与信息工程学院, 湖南 株洲 412007)

摘要: 研究了自平衡车控制系统的时滞相关稳定性问题。首先, 应用牛顿经典力学, 对自平衡车进行数学建模, 给出了自平衡车瞬时力学平衡方程, 并对控制电机模型进行线性化处理。在此基础上, 建立了基于PID控制器并考虑传输时滞的自平衡车系统的整体状态空间模型。为了评估系统的时滞稳定裕度, 基于Lyapunov-Krasovskii (L-K) 泛函方法, 并应用广义自由矩阵积分不等式技术, 建立了系统的时滞相关稳定性判据。然后基于给出的稳定性判据, 借助Matlab中的线性矩阵不等式 (linear matrix inequality, LMI) 工具箱, 研究了速度环PID参数对自平衡车控制系统时滞稳定裕度的影响。最后, 通过仿真实验验证了所提出系统稳定性判据的有效性。

关键词: 自平衡车; 数学建模; 时滞; PID控制; Lyapunov-Krasovskii泛函

中图分类号: TP273+.4

文献标志码: A

文章编号: 1673-9833(2024)02-0033-08

引文格式: 易奎辰, 曾红兵, 梁津铭, 等. 考虑时滞的自平衡车控制系统稳定性分析 [J]. 湖南工业大学学报, 2024, 38(2): 33-40.

Stability Analysis of the Time-Delay-Oriented Self-Balancing Vehicle Control System

YI Kuichen, ZENG Hongbing, LIANG Jinming, LI Xinyu

(College of Electrical and Information Engineering, Hunan University of Technology, Zhuzhou Hunan 412007, China)

Abstract: A research has been conducted on the delay-delay related stability of the self-balancing vehicle control system. Firstly, by applying Newtonian classical mechanics, a mathematical model of the self-balancing vehicle has thus been established, providing the instantaneous mechanical balance equation of the self balancing vehicle, followed by a linearization of the control motor model. On this basis, an overall state-space model of the self-balancing vehicle system, which incorporates a PID controller with transmission delay taken into consideration, has been established. Using the Lyapunov-Krasovskii (L-K) functional method and a generalized free matrix integral inequality technique, a delay-dependent stability criterion is established for an assessment of delay stability margin of the system. Then, based on the given stability criteria, by using the linear matrix inequality (LMI) toolbox in Matlab, a research has been conducted on the influence of speed loop PID parameters on the time delay stability margin of the self-balancing vehicle control system. Finally, the validity of the proposed system stability criterion is verified through simulation experiments.

Keywords: self-balancing vehicle; mathematical modeling; time delay; PID control; Lyapunov-Krasovskii functional

收稿日期: 2023-09-06

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (62171316); 湖南省自然科学基金资助项目 (2021JJ50047); 湖南工业大学研究生科研创新基金资助项目 (CX2308)

作者简介: 易奎辰, 男, 湖南工业大学硕士生, 主要研究方向为时滞系统控制, E-mail: 962454637@qq.com

通信作者: 曾红兵, 男, 湖南工业大学教授, 博士, 博士生导师, 主要研究方向为电力系统, 鲁棒控制和网络控制, E-mail: zenghongbing@hut.edu.cn

1 研究背景

两轮平衡车是一种类直线倒立摆结构模型，主要由两个同轴分布的车轮和两个独立的电机组成，能够自动维持姿态平衡^[1]。因其具有结构简单、控制灵活、节能环保，能够适应多种复杂场合的优点，目前已在民用、安保、工业和军事等领域被广泛投入使用，并逐渐成为移动机器人研究的重要领域^[2-3]。

两轮自平衡车的平衡控制系统是其核心部分，主要包括传感器、控制器和执行器。传感器主要用于实时检测车辆的倾斜角度和角速度，常用的传感器有加速度计和陀螺仪^[4]。控制器根据传感器的信号计算出合适的控制指令，以保持车辆稳定。执行器则根据控制器的指令驱动轮子旋转，从而实现车辆自平衡。目前常见的控制策略有比例-积分-微分（PID）控制^[5]、模糊控制^[6-7]、最优控制 LQR（linear quadratic regulator）^[8]、神经网络控制^[9]等。国内外学者们虽然对平衡车进行了大量的研究，但是当前自平衡车的控制策略往往没有考虑时滞给平衡车控制系统带来的影响，例如传感器采集数据的延迟、控制器计算延迟，以及执行器响应延迟等，忽略时滞的影响不仅会使平衡车控制系统稳定性下降，也会使其控制性能降低^[10-12]。因此，在设计自平衡车的控制策略时，应充分考虑传输时滞问题。

当前关于时滞相关稳定性问题的研究中，主要采用的方法是时域法。Lyapunov-Krasovskii（L-K）泛函方法是时域法中的主要分析方法，其基本思路如下：首先，构造一个正定有界L-K泛函，然后对其求导，通过确定导数的负定条件来确定系统的稳定性，这类稳定性条件一般表述为线性矩阵不等式（LMI）的形式。此类方法获得的稳定判据具有一定的保守性。为了得到更低保守性的稳定判据，可以从泛函的构造与对其导数的处理两个方面来实现^[13]。其中泛函的构造一般分为简单型、增广型、完全型、离散型，以及时滞分割型等^[14]。其中，简单型泛函是在经典李雅普诺夫二次型函数上增加含时滞二次项得到的，虽然其结构简单，但所得结果往往保守性较大；完全型泛函虽可获得系统渐近稳定的充要条件，但因其维数无限大，难以求解验证；离散型泛函对于时变时滞系统存在难以求解的问题；时滞分割型泛函对于分段的数目增加，计算将变得非常复杂。故本研究拟采用增广型泛函，在简单型泛函的基础上进行增广，以包含更多的时滞信息，从而得到计算较简单、保守性较小的稳定判据^[15]。处理泛函导数中存在的二次型积分项方法一般分为模型变换法、自由权矩阵法和积分

不等式法^[11]。因时滞系统中模型的变换与积分不等式的界定都不可避免地会带来保守性，故自由权矩阵法是当前时滞系统研究中常用的方法。针对现阶段自平衡车控制策略存在的问题，本研究考虑两轮自平衡车控制系统的时滞相关稳定性。首先，建立了多PID控制器的平衡车系统整体状态空间模型；然后应用L-K泛函方法和自由权矩阵积分不等式技术，建立了一种基于文献[16]的新时滞相关稳定判据；接下来通过LMI工具箱求解，得出不同速度环PID参数下的最大时滞上界；最后，通过仿真结果验证所得结果的准确性。

2 自平衡车系统模型

2.1 坐标系建立

对自平衡车进行瞬时力学分析前，需要建立空间直角坐标系。本文建立的自平衡车坐标系如图1所示。其以自平衡车左右两轮轴中心点为参考坐标系的原点 $O(X-Y-Z)$ ，以左右两轮轴线并由左轮指向右轮方向为 X 轴，以过原点并和重力相反的方向为 Z 轴，以垂直 X 轴和 Z 轴并指向前进方向为 Y 轴。

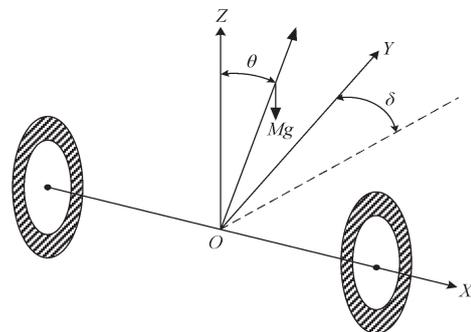


图1 自平衡车坐标系

Fig. 1 Self-balancing vehicle coordinate system

2.2 牛顿力学模型建立

自平衡车轮轴的中心位移 x 与其左右轮的位移关系如下：

$$x = (x_l + x_r) / 2, \quad (1)$$

自平衡车的偏航角 δ 与其左右轮的位移满足下式：

$$\delta = (x_l - x_r) / D, \quad (2)$$

式(1)(2)中： D 为左右轮间距离；

x_l 、 x_r 分别为左右轮的位移，且

$$x_l = R\theta_l, \quad (3)$$

$$x_r = R\theta_r, \quad (4)$$

其中 θ_l 、 θ_r 分别为左右轮转过的角度； R 为左右轮的半径。

图2为自平衡车左轮受力分析图。

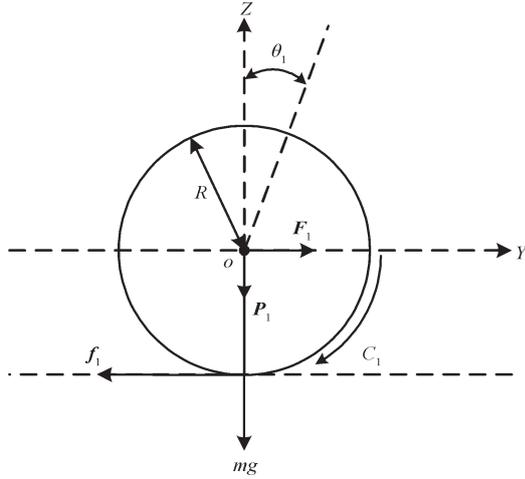


图2 自平衡车左轮受力分析图

Fig. 2 Analysis diagram of left-wheel force of the self-balancing vehicle

对自平衡车左轮进行受力分析, 建立如下力学平衡方程:

$$m\ddot{x}_1 = f_1 - F_1, \quad (5)$$

$$J_o\ddot{\theta}_1 = C_1 - f_1R. \quad (6)$$

同理可得如下右轮力学平衡方程:

$$m\ddot{x}_r = f_r - F_r, \quad (7)$$

$$J_o\ddot{\theta}_r = C_r - f_rR. \quad (8)$$

式(5)~(8)中: m 为左右轮的质量;

f_1 、 f_r 分别为左右轮受到的地面摩擦力;

F_1 、 F_r 分别为左右轮与平衡车体在水平方向的作用力;

C_1 、 C_r 分别为左右轮转矩;

J_o 为左右车轮转动惯量, 且 $J_o = \frac{1}{2}mR^2$ 。

平衡车体的力学方程如下:

$$M\ddot{x}_p = F_1 + F_r, \quad (9)$$

$$J_p\ddot{\theta} = (P_1 + P_r)L \sin \theta - (F_1 + F_r)L \cos \theta, \quad (10)$$

$$M\ddot{y}_p = P_1 + P_r - Mg, \quad (11)$$

$$J_\delta\ddot{\delta} = D(F_1 - F_r)/2. \quad (12)$$

式(9)~(12)中: M 为平衡车体的质量;

L 为质心到轮轴的距离;

θ 为平衡车摆杆倾斜角;

J_p 为平衡车体对 x 轴的转动惯量, 且 $J_p = \frac{1}{3}ML^2$;

x_p 为质心的水平位移, 且

$$x_p = x + L \sin \theta; \quad (13)$$

y_p 为质心的垂直位移, 且

$$y_p = L \cos \theta - L, \quad (14)$$

P_1 、 P_r 分别为左右轮与平衡车在垂直方向作用力;

J_δ 为平衡车对 y 轴的转动惯量, 且 $J_\delta = \frac{1}{2}MD^2$ 。

当平衡车在平衡点附近时, $\theta \approx 0$ 、 $\sin \theta \approx 0$ 、 $\cos \theta \approx 1$, 联立方程(1)~(13), 化简可得^[17-18]:

$$(2m + M + 2J_o^2/R^2)\ddot{x} + ML\ddot{\theta} = (C_1 + C_r)/R, \quad (15)$$

$$J_p\ddot{\theta} = MgL\theta - ML^2\ddot{\theta} - ML\ddot{x}, \quad (16)$$

$$(Dm + DJ_o/R^2 + 2J_\delta/D)\ddot{\delta} = (C_1 - C_r)/R. \quad (17)$$

2.3 直流电机线性建模

两轮自平衡车控制电机采用的是两个直流电机, 直流电机的线性化模型如图3所示。

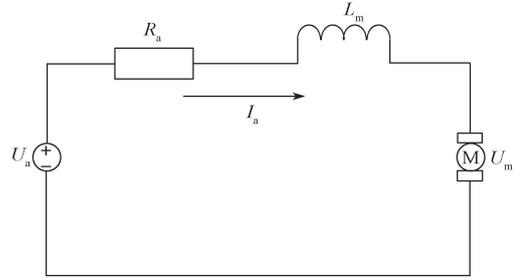


图3 直流电机工作原理示意图

Fig. 3 DC motor working principle diagram

电机输出电压 U_a 与电机转矩 C_m 之间的关系式如下^[19]:

$$C_m = \left(K_m \left(U_a - K_c \frac{d\theta_m}{dt} \right) \right) / R_a. \quad (18)$$

式中: K_m 为电机转矩系数;

$U_a = R_a I_a + U_m$, 其中 I_a 为电枢电流, U_m 为电机转子反电动势; R_a 为电机转子等效电阻; K_c 为电机反电动势系数; θ_m 为电机转子角度。

2.4 系统状态方程

当 $\theta = \pm 5^\circ$ 时, 输入变量 $U = [U_1 \ U_r]^T$, 状态变

量 $X = [\delta \ \dot{x} \ \dot{\theta} \ \theta \ \delta \ x]^T$, 则含时滞的双轮平衡车状态方程可表示如下:

$$\begin{cases} A_1 \dot{X}(t) = A_2 X(t) + B_1 U(t - \tau(t)), \\ Y(t) = CX(t). \end{cases} \quad (19)$$

式中: $\tau(t)$ 为传输时滞;

$X(t)$ 为 t 时刻状态向量;

$U(t)$ 为输入, U_1 、 U_r 分别为左右电机控制电压;

A_1 、 A_2 、 B_1 为系统矩阵;

C 为输出矩阵。

将式(18)代入式(15)~(17)写成式(19)形式,

可得:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} \frac{K_m}{RR_a} & \frac{K_m}{RR_a} \\ 0 & 0 \\ \frac{K_m}{RR_a} & -\frac{K_m}{RR_a} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}。$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -2a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & MgL & 0 & 0 \\ -Da & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

式中: $a_{12} = 2m + M + (2J\omega^2)/R^2$;

$a_{13} = a_{22} = ML$; $a_{23} = J_p = ML^2$

$a_{31} = Dm + 2J_\delta/D + DJ_\omega/R^2$;

$a = (K_m K_e)/(R_a R^2)$ 。

含传输时滞的自平衡车系统控制模型如图4所示。

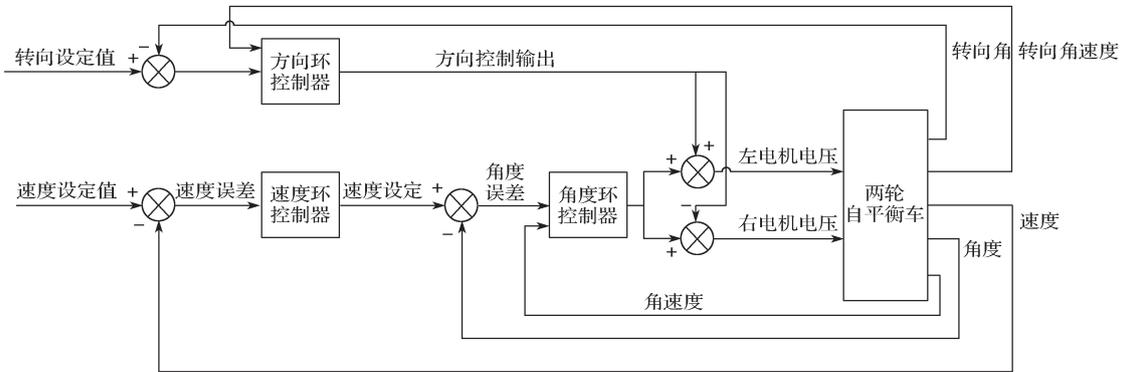


图4 自平衡车控制系统框图

Fig. 4 Block diagram of the self-balancing vehicle control system

自平衡车系统的速度环采用如下PI控制器:

$$u_v = K_p^v (v_d - v_b) + K_I^v \int (v_d - v_b) dt。 \quad (20)$$

式中: u_v 为速度环输出;

K_p^v 、 K_I^v 分别为速度控制环的比例与积分系数;

v_d 、 v_b 分别为设定的目标速度与速度反馈。

角度采用如下PD控制器:

$$u_a = K_p^a (\theta_d - \theta_b) + K_D^a (-\dot{\theta}_b)。 \quad (21)$$

式中: u_a 为角度环的输出;

K_p^a 、 K_D^a 分别为角度环的比例与微分系数;

θ_d 、 θ_b 为目标角度与角度反馈;

$\dot{\theta}_b$ 为角速度反馈。

在此控制模型中, 角度控制环的输入为速度控制环的输出, 即 $\theta_d = u_v$ 。

方向控制器采用PD控制:

$$u_s = K_p^s (\delta_d - \delta_b) + K_D^s (-\dot{\delta}_b)。 \quad (22)$$

式中: u_s 为方向环的输出;

K_p^s 、 K_D^s 分别为方向环的比例和微分系数;

δ_d 、 δ_b 分别为目标偏航角与偏航角反馈;

$\dot{\delta}_b$ 为偏航角速度反馈。

自平衡车控制系统中输出为左右轮电机电压:

$$\begin{cases} U_l = u_a + u_s, \\ U_r = u_a - u_s. \end{cases} \quad (23)$$

通过以上分析, 可构造如下输出控制反馈系统:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{U}(t - \tau(t)), \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t), \\ \mathbf{U}(t) = -\mathbf{K}\mathbf{y}(t). \end{cases} \quad (24)$$

式中: $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{A}_2$;

$\mathbf{B} = \mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{B}_1$;

$\mathbf{K} = [K_D^s \quad K_p^v K_p^a \quad K_D^a \quad K_p^a \quad K_p^s \quad K_p^a K_I^v]$ 。

将系统(24)简化可得如下线性系统:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{A}_d \mathbf{x}(t - \tau(t)), \quad t > 0; \\ \mathbf{x}(t) = \varphi(t), \quad t \in [-\tau, 0]. \end{cases} \quad (25)$$

式中: $\mathbf{A}_d = -\mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{C}$;

$0 < \tau(t) < \tau$;

$|\dot{\tau}(t)| \leq \mu$;

$\varphi(t)$ 为初始状态。

3 稳定判据

为建立系统 (25) 的稳定性条件, 需要用到如下引理。

引理 1^[16] 设 $N \in \mathbb{N}$, $\xi \in \mathbb{R}^m$, \mathbb{R}^m 表示 m 维向量空间, x 是一个连续可微函数: $[\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^n$, diag 表示对角矩阵, I 为单位向量矩阵。对于任意矩阵 $Z \in \mathbb{R}^{n \times n} > 0$, $M \in \mathbb{R}^{(N+1)n \times m}$, 有以下不等式成立:

$$-\int_{\alpha}^{\beta} \dot{x}^T(s) Z \dot{x}(s) ds \leq 2 \xi_N^T \Gamma_N^T M \xi + \Phi \xi^T M^T \tilde{Z} M \xi. \quad (26)$$

式中:

$$\xi_N = \begin{cases} \begin{bmatrix} x^T(\beta) & x^T(\alpha) \end{bmatrix}^T, & N=0; \\ \begin{bmatrix} x^T(\beta) & x^T(\alpha) & \frac{1}{\Phi} \Theta_0^T & \dots & \frac{1}{\Phi} \Theta_{N-1}^T \end{bmatrix}^T, & N \geq 1; \end{cases}$$

$$\Theta_k = \int (-1)^k \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} \binom{k+i}{i} \left(\frac{u-\alpha}{\Phi} \right)^i x(s) ds,$$

$$\Gamma_N = \begin{bmatrix} \pi_N^T(0) & \pi_N^T(1) & \dots & \pi_N^T(N) \end{bmatrix}^T,$$

$$\tilde{Z} = \text{diag} \left\{ \frac{1}{Z}, \frac{1}{3Z}, \dots, \frac{1}{(2N+1)Z} \right\},$$

$$\pi_N(k) = \begin{cases} \begin{bmatrix} I & -I \end{bmatrix}, & N=0; \\ \begin{bmatrix} I & (-1)^{k+1} I & \theta_{Nk}^0 I & \dots & \theta_{Nk}^{N-1} \end{bmatrix}, & N \geq 1. \end{cases}$$

$$\Phi = \beta - \alpha.$$

为简化矩阵和向量的表达, 首先定义以下符号:

$$\eta_1 = \begin{bmatrix} \lambda_0^T & v_1^T & v_2^T & v_3^T & v_4^T \end{bmatrix}^T,$$

$$\eta_2 = \begin{bmatrix} \lambda_0^T & \lambda_1^T \end{bmatrix}^T, \quad \eta_3 = \begin{bmatrix} \lambda_0^T & \lambda_2^T \end{bmatrix}^T,$$

$$\eta_4 = \begin{bmatrix} \dot{x}^T(s) & x^T(s) & x^T(t) & \int_s^{t-\tau(t)} \dot{x}^T(\alpha) d\alpha \end{bmatrix}^T,$$

$$\lambda_0 = \begin{bmatrix} x^T(t) & x^T(t-\tau(t)) & x^T(t-\tau) \end{bmatrix}^T,$$

$$\lambda_1 = \begin{bmatrix} v_1^T & \frac{v_1^T}{\tau(t)} & v_2^T & \frac{v_2^T}{\tau(t)} \end{bmatrix}^T,$$

$$\lambda_2 = \begin{bmatrix} v_3^T & \frac{v_3^T}{\tau-\tau(t)} & v_4^T & \frac{v_4^T}{\tau-\tau(t)} \end{bmatrix}^T,$$

$$v_1 = \int_{t-\tau(t)}^t x(s) ds, \quad v_2 = \frac{1}{\tau(t)} \int_{t-\tau(t)}^t \int_{\theta}^t x(s) ds d\theta,$$

$$v_3 = \int_{t-\tau}^{t-\tau(t)} x(s) ds, \quad v_4 = \frac{1}{\tau-\tau(t)} \int_{t-\tau}^{t-\tau(t)} \int_{\theta}^{t-\tau(t)} x(s) ds d\theta,$$

$$\xi(t) = \begin{bmatrix} x(t) & x^T(t-\tau(t)) & \xi_1^T(t) & \xi_2^T(t) & \xi_3^T(t) \end{bmatrix}^T,$$

$$\xi_1(t) = \begin{bmatrix} x^T(t-\tau) & \dot{x}^T(t-\tau(t)) & \dot{x}^T(t-\tau) \end{bmatrix}^T,$$

$$\xi_2(t) = \begin{bmatrix} \frac{v_1^T}{\tau(t)} & \frac{v_2^T}{\tau(t)} & \frac{v_3^T}{\tau-\tau(t)} & \frac{v_4^T}{\tau-\tau(t)} \end{bmatrix}^T,$$

$$\xi_3(t) = \begin{bmatrix} v_1^T & v_2^T & v_3^T & v_4^T \end{bmatrix}^T,$$

$$e_i = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n \times (i-1)n} & I_n & \mathbf{0}_{n \times (13-i)n} \end{bmatrix}, \quad i=1, 2, \dots, 13.$$

构造增广型 L-K 泛函, 并应用引理 1 给出的积分不等式, 推导出如下自平衡车控制系统稳定判据。

定理 1 对于给定的标量, $\mu_1 < \mu_2 < 1$, $\tau > 0$ 如果存在矩阵 $P_1 \in \mathbb{S}_+^{7n}$, $Z_1 \in \mathbb{S}_+^{4n}$, $Q_1 \in \mathbb{S}_+^n$, $P_2 \in \mathbb{S}_+^{7n}$, $P_3 \in \mathbb{S}_+^{7n}$, $R_1 \in \mathbb{S}_+^n$, $R_2 \in \mathbb{S}_+^n$, $N_1 \in \mathbb{R}^{13n \times 3n}$, $N_2 \in \mathbb{R}^{13n \times 3n}$, $S_1 \in \mathbb{R}^{13n \times n}$, $S_2 \in \mathbb{R}^{13n \times n}$, $S_3 \in \mathbb{R}^{13n \times n}$, $S_4 \in \mathbb{R}^{13n \times n}$, 使得式 (27) (28) 成立, 则系统 (25) 是渐近稳定的。

$$\begin{bmatrix} \Psi(0, \mu_j) & \tau N_2 \\ \tau N_2^T & -\tilde{Z} \end{bmatrix} < 0, \quad (27)$$

$$\begin{bmatrix} \Psi(\tau, \mu_j) & \tau N_1 \\ \tau N_1^T & -\tilde{Z} \end{bmatrix} < 0. \quad (28)$$

式中: $j=1, 2$; $\mathbb{R}^{n \times m}$ 为 $n \times m$ 维实矩阵; \mathbb{S}_+^n 为 $n \times n$ 维对称正定矩阵。

$$\Psi(\tau(t), \dot{\tau}(t)) = \Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3,$$

$$\Theta_1 = \text{sym} \{ \Pi_1^T P_1 \Pi_{1d} + \Pi_2^T P_2 \Pi_{2d} + \Pi_3^T P_3 \Pi_{3d} + \Pi_6^T Z_1 \Pi_{6d} + S_1(\tau(t)e_6 - e_{10}) + S_2(\tau(t)e_7 - e_{11}) + S_3(\tau-\tau(t)e_8 - e_{12}) + S_4(\tau-\tau(t)e_9 - e_{13}) \},$$

$$\Theta_2 = \dot{\tau}(t) \Pi_2^T P_2 \Pi_2 - \dot{\tau}(t) \Pi_3^T P_3 \Pi_3 + e_0^T Q_1 e_0 + \tau^2 e_0^T R_1 e_0 - (1-\dot{\tau}(t)) e_4^T Q_1 e_4 + (1-\dot{\tau}(t)) \Pi_4^T Z_1 \Pi_4 - \Pi_5^T Z_1 \Pi_5 + \tau(1-\dot{\tau}(t))(\tau-\tau(t)) e_4^T (R_2 - R_1) e_4,$$

$$\Theta_3 = \text{sym} \{ \tau N_1 M_1 + \tau N_2 M_2 \},$$

$$\Pi_1 = \begin{bmatrix} e_1^T & e_2^T & e_3^T & e_{10}^T & e_{11}^T & e_{12}^T & e_{13}^T \end{bmatrix}^T,$$

$$\Pi_{1d} = \begin{bmatrix} \Pi_{11}^T & \Pi_{12}^T & \Pi_{13}^T \end{bmatrix}^T,$$

$$\Pi_{11} = \begin{bmatrix} e_0^T & (1-\dot{\tau}(t))e_4^T & e_5^T \end{bmatrix}^T,$$

$$\Pi_{12} = \begin{bmatrix} e_1^T - (1-\dot{\tau}(t))e_2^T & e_1^T - (1-\dot{\tau}(t))e_6^T - \dot{\tau}(t)e_7^T \end{bmatrix}^T$$

$$\Pi_{13} = \begin{bmatrix} (1-\dot{\tau}(t))e_2^T - e_3^T & (1-\dot{\tau}(t))e_2^T - e_8^T + \dot{\tau}(t)e_9^T \end{bmatrix}^T$$

$$\Pi_2 = \begin{bmatrix} e_1^T & e_2^T & e_3^T & e_{10}^T & e_6^T & e_{12}^T & e_2^T \end{bmatrix}^T,$$

$$\Pi_{2d} = \begin{bmatrix} \Pi_{21}^T & \Pi_{22}^T & \Pi_{23}^T & \Pi_{24}^T \end{bmatrix}^T,$$

$$\Pi_{21} = \begin{bmatrix} \tau(t)e_0^T & \tau(t)(1-\dot{\tau}(t))e_4^T & \tau(t)e_5^T \end{bmatrix}^T,$$

$$\Pi_{22} = \begin{bmatrix} \tau(t)(e_1^T - (1-\dot{\tau}(t))e_2^T) & e_1^T - (1-\dot{\tau}(t))e_2^T - \dot{\tau}(t)e_6^T \end{bmatrix}^T,$$

$$\Pi_{23} = \begin{bmatrix} \tau(t)(e_1^T - (1-\dot{\tau}(t))e_6^T - \dot{\tau}(t)e_7^T) \end{bmatrix}^T,$$

$$\Pi_{24} = \begin{bmatrix} e_1^T - (1-\dot{\tau}(t))e_6^T - 2\dot{\tau}(t)e_7^T \end{bmatrix}^T,$$

$$\begin{aligned}
\Pi_3 &= [e_1^\top \ e_2^\top \ e_3^\top \ e_{12}^\top \ e_8^\top \ e_{13}^\top \ e_9^\top]^\top, \\
\Pi_{3d} &= [\Pi_{31}^\top \ \Pi_{32}^\top \ \Pi_{33}^\top \ \Pi_{34}^\top \ \Pi_{35}^\top]^\top, \\
\Pi_{31} &= [\tau - \tau(t) e_0^\top \ (\tau - \tau(t))(1 - \dot{\tau}(t)) e_4^\top \ (\tau - \tau(t)) e_5^\top]^\top, \\
\Pi_{32} &= [(\tau - \tau(t))((1 - \dot{\tau}(t)) e_2^\top - e_3^\top)]^\top, \\
\Pi_{33} &= [(1 - \dot{\tau}(t)) e_2^\top - e_3^\top + \dot{\tau}(t) e_8^\top]^\top, \\
\Pi_{34} &= [(\tau - \tau(t))((1 - \dot{\tau}(t)) e_2^\top - e_8^\top + \dot{\tau}(t) e_9^\top)]^\top, \\
\Pi_{35} &= [(1 - \dot{\tau}(t)) e_2^\top - e_8^\top - 2\dot{\tau}(t) e_9^\top]^\top, \\
\Pi_4 &= [e_4^\top \ e_2^\top \ e_1^\top \ \mathbf{0}]^\top, \\
\Pi_5 &= [e_5^\top \ e_3^\top \ e_1^\top \ e_2^\top - e_3^\top]^\top, \\
\Pi_6 &= \\
& [e_2^\top - e_3^\top \ e_{12}^\top \ (\tau - \tau(t)) e_1^\top \ (\tau - \tau(t)) (e_2^\top - e_8^\top)]^\top, \\
\Pi_{6d} &= [\mathbf{0} \ \mathbf{0} \ e_0^\top \ (1 - \dot{\tau}(t)) e_4^\top]^\top, \\
M_1 &= [e_1^\top - e_2^\top \ e_1^\top + e_2^\top - 2e_6^\top \ e_1^\top - e_2^\top + 6e_6^\top - 12e_7^\top]^\top, \\
M_2 &= [e_2^\top - e_3^\top \ e_2^\top + e_3^\top - 2e_8^\top \ e_2^\top - e_3^\top + 6e_8^\top - 12e_9^\top]^\top, \\
e_0 &= A e_1 + A_d e_2, \\
\tilde{R}_i &= \text{diag}\{R_i, 3R_i, 5R_i\}, \quad i=1, 2.
\end{aligned}$$

式中, $\mathbf{0}$ 为合适维度 $\mathbf{0}$ 矩阵。

证明 选取如下 L-K 泛函:

$$\begin{aligned}
V(t) &= V_1(t) + V_2(t) + V_3(t), \\
V_1(t) &= \eta_1^\top(t) P_1 \eta_1(t) + \tau(t) \eta_2^\top(t) P_2 \eta_2(t) + \\
& (\tau - \tau(t)) \eta_3^\top(t) P_3 \eta_3(t), \\
V_2(t) &= \int_{t-\tau(t)}^t \dot{x}^\top(s) Q_1 \dot{x}(s) ds + \int_{t-\tau}^{t-\tau(t)} \eta_4^\top(t) Z_1 \eta_4(t) ds, \\
V_3(t) &= \tau \int_{t-\tau(t)}^t (\tau - t + s) \dot{x}^\top(s) R_1 \dot{x}(s) ds + \\
& \tau \int_{t-\tau}^{t-\tau(t)} (\tau - t + s) \dot{x}^\top(s) R_2 \dot{x}(s) ds,
\end{aligned}$$

对 $V(t)$ 求导, 可得:

$$\begin{aligned}
\dot{V}_1(t) &= 2\eta_1^\top(t) P_1 \dot{\eta}_1(t) + \dot{\tau}(t) \eta_2^\top(t) P_2 \eta_2(t) + 2\tau(t) \eta_2^\top(t) P_2 \cdot \\
& \dot{\eta}_2(t) - \dot{\tau}(t) \eta_3^\top(t) P_3 \eta_3(t) + 2(\tau - \tau(t)) \eta_3^\top(t) P_3 \dot{\eta}_3(t), \\
\dot{V}_2(t) &= \dot{x}^\top(t) Q_1 \dot{x}(t) - (1 - \dot{\tau}(t)) \dot{x}^\top(\tau - \tau(t)) Q_1 \dot{x}(\tau - \tau(t)) + \\
& (1 - \dot{\tau}(t)) \eta_4^\top(t, \tau - \tau(t)) Z_1 \eta_4(t - \tau(t)) - \eta_4^\top(t, t - \tau) Z_1 \cdot \\
& \eta_4(t, \tau - \tau(t)) + 2 \int_{t-\tau}^{t-\tau(t)} \eta_4^\top(t, s) Z_1 \frac{\partial \eta_4(t, s)}{\partial t} ds, \\
\dot{V}_3(t) &= \tau^2 \dot{x}^\top(t) R_1 \dot{x}(t) + \\
& \tau(1 - \dot{\tau}(t)) (\tau - \tau(t)) \dot{x}^\top(t - \tau(t)) (R_2 - R_1) \dot{x}(t - \tau(t)) -
\end{aligned}$$

$$\tau \int_{t-\tau(t)}^t \dot{x}^\top(s) R_1 \dot{x}(s) ds - \tau \int_{t-\tau}^{\tau - \tau(t)} \dot{x}^\top(s) R_2 \dot{x}(s) ds,$$

用引理 1 来估计 $V(t)$ 导数中的积分项, 可得:

$$\begin{aligned}
-\tau \int_{t-\tau(t)}^t \dot{x}^\top(s) R_1 \dot{x}(s) ds - \tau \int_{t-\tau}^{\tau - \tau(t)} \dot{x}^\top(s) R_2 \dot{x}(s) ds \leq \\
\xi(t) [\text{sym}\{\tau N_1 M_1 + \tau N_2 M_2\} + \Omega(\tau(t))] \xi(t), \quad (29)
\end{aligned}$$

式中,

$$\Omega(\tau(t)) = \tau \tau(t) N_1^\top \tilde{R}_1^{-1} N_1 + \tau(\tau - \tau(t)) N_2^\top \tilde{R}_2^{-1} N_2.$$

由定义的向量 $\xi(t)$ 可得, 对于任意矩阵 S_1 、 S_2 、 S_3 、 $S_4 \in \mathbb{R}^{13 \times n}$, 下列等式成立^[20]:

$$\begin{aligned}
2\xi^\top(t) [S_1(\tau(t) e_6 - e_{10})] \xi(t) &= 0, \\
2\xi^\top(t) [S_2(\tau(t) e_7 - e_{11})] \xi(t) &= 0, \\
2\xi^\top(t) [S_3((\tau - \tau(t)) e_8 - e_{12})] \xi(t) &= 0, \\
2\xi^\top(t) [S_4((\tau - \tau(t)) e_9 - e_{13})] \xi(t) &= 0,
\end{aligned}$$

将上列零等式左侧加入 $\dot{V}(t)$, 然后应用在不等式 (29) 中, 可得:

$$\dot{V}(t) \leq \xi^\top(t) (\Psi(\tau(t), \dot{\tau}(t)) + \Omega(\tau(t))) \xi(t). \quad (30)$$

由上式可以看出, 如果对于 $0 \leq \tau(t) \leq \tau$, $\mu_1 < \dot{\tau}(t) < \mu_2$, $\Psi(\tau(t), \dot{\tau}(t)) + \Omega(\tau(t)) < 0$, 则 $\dot{V}(t) < 0$, 由 Lyapunov 理论可以得知, 系统 (25) 渐近稳定。由 Schur 补可以得知, LMI (27) 和 (28) 等价于 $\Psi(\tau(t), \dot{\tau}(t)) + \Omega(\tau(t)) < 0$ 。证明完毕。

4 仿真结果与分析

对于系统 (25), 采用表 1 各项参数进行系统建模与 Simulink 仿真验证。

表 1 自平衡车参数设置

系统变量	单位	取值
左右轴距 D	m	0.13
左右轮半径 R	m	2.6e-2
左右轮质量 m	kg	3.68e-2
自平衡车体质量 M	kg	0.28
重心高度 L	m	0.1
重力加速度 g	m/s ²	9.8
电机反电动势 K_e	V/s/rad	5.0e-3
电机转矩系数 K_m	N·m/A	1.9e-3
电机转子等效电阻 R_a	Ω	1.017 1

当 $\mu=0$ 与 $\mu=0.5$ 时, 固定角度增益 $K_p^a=80$, $K_D^a=8$ 与偏航角增益 $K_p^s=10$, $K_D^s=3$; 变化速度增益 (K_p^v 由 0.1~0.5, K_D^v 由 0.01~0.03)。由稳定判据计算得到的保证系统 (25) 稳定允许的最大时滞上界见表 2。

表2 (K_1^y, K_p^y) 分别取不同参数时的时滞最大上界 (定常时滞 $\mu=0$ 和 $\mu=0.5$)

Table 2 Delay stability margin for different PI gains (with $\mu=0$ constant time delay and $\mu=0.5$ time-varying delay)

K_p^y	K_1^y					
	0.01		0.02		0.03	
	$\mu=0$	$\mu=0.5$	$\mu=0$	$\mu=0.5$	$\mu=0$	$\mu=0.5$
0.1	0.088 9	0.088 8	0.088 7	0.088 6	0.088 6	0.088 5
0.2	0.091 6	0.091 4	0.091 5	0.091 2	0.091 3	0.091 1
0.3	0.090 5	0.090 0	0.090 4	0.089 8	0.090 3	0.089 8
0.4	0.086 9	0.085 9	0.086 8	0.085 8	0.086 7	0.085 8
0.5	0.082 0	0.080 6	0.081 9	0.080 5	0.081 9	0.080 4

为了验证上述结果的准确性, 选取速度环的控制参数 $K_p^y=0.3, K_1^y=0.03$; 角度环的控制参数 $K_p^a=80, K_D^a=8$; 方向环控制参数 $K_p^s=10, K_D^s=3$; 初始时刻角度为 $\theta=10^\circ$, 由 Simulink 仿真, 所得结果如图 5 所示。

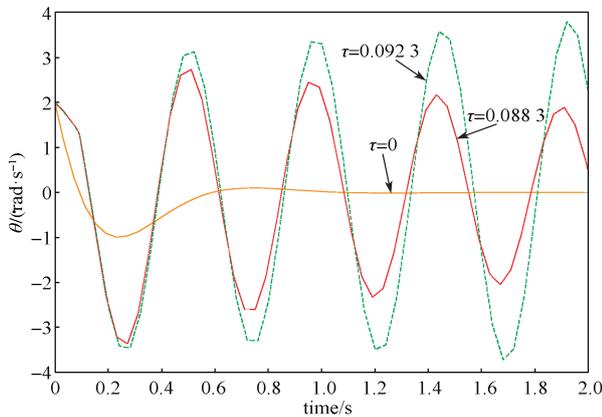


图5 不同时滞的系统角速度偏移

Fig. 5 Angular velocity shifting of the system with different time delays

由图 5 所示仿真结果可知: $\tau=0$ s 时, 自平衡车系统大约经过 1 s 后保持稳定; $\tau=0.0883$ s 时, 系统逐渐收敛; $\tau=0.0923$ s 时, 系统变为发散不稳定的情况。这说明保证自平衡车系统稳定的时滞最大上界在 0.0883~0.0923 s 这一区间范围内, 而表 2 中通过 LMI 求解出的时滞上界为 0.0903 s, 正好在这一区间范围内, 表明了文章中构造的稳定性判据的有效性和计算出的时滞稳定裕度的准确性。

5 结语

文中针对两轮平衡车系统的非线性、多变量、强耦合等特性, 对其进行了建模与线性化解耦, 构造出自平衡车系统的状态空间模型。其次, 考虑了系统传输时滞的影响, 运用基于自由权矩阵积分不等式的方法, 建立了系统的时滞相关稳定性判据。最后运用

Simulink 仿真, 验证了该系统稳定性判据的有效性。因此文中提出的时滞稳定裕度可以作为附加指标, 指导考虑时滞影响的控制器设计。同时, 因本方法计算出的时滞最大上界能较为准确地评估时滞对机器人自平衡能力的影响, 故本文计算时滞稳定裕度的方法可为控制器设计提供新思路。

参考文献:

- [1] UNG T H, JUNG S. Camera-Based Balancing and Line Tracking Control of a Two-Wheel Mobile Robot[J]. Journal of Korean Institute of Intelligent Systems, 2020, 30(3): 195-201.
- [2] 杨正才, 吕科. 基于模糊 PD 控制方法的两轮直立自平衡电动车研究[J]. 控制工程, 2016, 23(3): 366-370.
YANG Zhengcai, LÜ Ke. Study on Two-Wheeled Self-Balancing Electric Vehicle Based on Fuzzy PD Control Method[J]. Control Engineering of China, 2016, 23(3): 366-370.
- [3] LIU K, BAI M, NI Y H. Two-Wheel Self-Balanced Car Based on Kalman Filtering and PID Algorithm[C]//2011 IEEE 18th International Conference on Industrial Engineering and Engineering Management. Changchun: IEEE, 2011: 281-285.
- [4] SEN M A, KALYONCU M. Optimisation of a PID Controller for an Inverted Pendulum Using the Bees Algorithm[J]. Applied Mechanics and Materials, 2015, 789/790: 1039-1044.
- [5] 陈鹏展, 朱年华, 李杰. 两轮自平衡车姿态检测与平衡控制[J]. 控制工程, 2017, 24(8): 1574-1578.
CHEN Pengzhan, ZHU Nianhua, LI Jie. Attitude Detection and Balance Control of Two-Wheeled Self-Balancing Vehicles[J]. Control Engineering of China, 2017, 24(8): 1574-1578.
- [6] 龙奕璇, 肖仲平. 基于增广 Lyapunov 泛函的时变时滞 T-S 模糊系统稳定性分析[J]. 湖南工业大学学报, 2023, 37(4): 14-19.
LONG Yixuan, XIAO Shenping. Stability Analysis of T-S Fuzzy Systems with Time-Varying Delay Based on Augmented Lyapunov Functional[J]. Journal of Hunan University of Technology, 2022, 37(4): 14-19.
- [7] 李洪兴, 苗志宏, 王加银, 等. 四级倒立摆的变论域自适应模糊控制[J]. 中国科学(E辑), 2002, 32(1): 65-75.
LI Hongxing, MIAO Zhihong, WANG Jiayin, et al. Variable Universe Adaptive Fuzzy Control of Four-Stage Inverted Pendulum[J]. Science in China (Series E), 2002, 32(1): 65-75.
- [8] 宁一高, 岳明, 许媛, 等. 基于 IMU/UWB 的两

- 轮自平衡车轨迹跟踪控制器设计与实现 [J]. 控制与决策, 2019, 34(12): 2635-2641.
- NING Yigao, YUE Ming, XU Yuan, et al. Design and Implementation of Trajectory Tracking Controller for Two-Wheeled Self-Balancing Vehicles Based on IMU/UWB[J]. Control and Decision, 2019, 34(12): 2635-2641.
- [9] ZHANG X L, FAN H M, ZANG J Y, et al. The Stabilization and 3D Visual Simulation of the Triple Inverted Pendulum Based on CGA-PIDNN[J]. International Journal of Control, Automation and Systems, 2015, 13(4): 1010-1019.
- [10] 薛 晗, 邵哲平, 方琼林, 等. 具有输入时滞的二轮自平衡车自适应滑模控制 [J]. 交通运输工程学报, 2020, 20(2): 219-228.
- XUE Han, SHAO Zheping, FANG Qionglin, et al. Adaptive Sliding Mode Control for Two-Wheeled Self-Balancing Vehicle with Input Delay[J]. Journal of Traffic and Transportation Engineering, 2020, 20(2): 219-228.
- [11] 许立平. 基于稳定域划分与输入时滞的平衡重式叉车防侧翻控制研究 [D]. 合肥: 合肥工业大学, 2021.
- XU Liping. Research on Anti-Rollover Control of Counterbalanced Forklift Based on Stability Region Division and Input Time Delay[D]. Hefei: Hefei University of Technology, 2021.
- [12] 周宇生. 时滞最优控制及其在轮式倒立摆中的应用 [D]. 南京: 南京航空航天大学, 2016.
- ZHOU Yusheng. Optimal Control of Delayed Systems and Its Applications to Wheeled Inverted Pendulum[D]. Nanjing: Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2016.
- [13] ZENG H B, HE Y, WU M, et al. Free-Matrix-Based Integral Inequality for Stability Analysis of Systems with Time-Varying Delay[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2015, 60(10): 2768-2772.
- [14] ZHANG X M, HAN Q L, SEURET A, et al. Overview of Recent Advances in Stability of Linear Systems with Time-Varying Delays[J]. IET Control Theory & Applications, 2019, 13(1): 1-16.
- [15] 张传科. 时滞电力系统的小扰动稳定分析与负荷频率控制 [D]. 长沙: 中南大学, 2013.
- ZHANG Chuanke. Small-Signal Stability Analysis and Load Frequency Control for Delayed Power Systems[D]. Changsha: Central South University, 2013.
- [16] ZENG H B, LIU X G, WANG W. A Generalized Free-Matrix-Based Integral Inequality for Stability Analysis of Time-Varying Delay Systems[J]. Applied Mathematics and Computation, 2019, 354: 1-8.
- [17] 潘二伟. 基于 STM32 的两轮自平衡车设计与实现 [D]. 哈尔滨: 黑龙江大学, 2018.
- PAN Erwei. Design and Implementation of Two-Wheeled Self-Balancing Vehicle Based on STM32[D]. Harbin: Helongjiang University, 2018.
- [18] 高 旺. 基于 STM32 双轮自平衡车的设计与实现 [D]. 重庆: 西南大学, 2021.
- GAO Wang. Design and Implementation of Double-Wheeled Self-Balancing Vehicle Based on STM32[D]. Chongqing: Southwest University, 2021.
- [19] 肖 乐. 两轮自平衡机器人建模及智能控制研究 [D]. 哈尔滨: 哈尔滨理工大学, 2011.
- XIAO Le. Two-Wheel Self-Balancing Robot Modeling and Intelligent Control[D]. Harbin: Harbin University of Science and Technology, 2011.
- [20] LIN H C, ZENG H B, WANG W. New Lyapunov-Krasovskii Functional for Stability Analysis of Linear Systems with Time-Varying Delay[J]. Journal of Systems Science and Complexity, 2021, 34(2): 632-641.

(责任编辑: 廖友媛)