doi:10.3969/j.issn.1673-9833.2024.01.013

# 一类椭圆型 Dirichlet 边值问题的高精度 Richardson 外推法

李曹杰，张海湘，杨雪花

（湖南工业大学 理学院，湖南 株洲 412007）

**摘　要**：针对椭圆型偏微分方程，先建立四阶和六阶精度的紧致差分格式，在此基础上用 Richardson 外推法，得到其六阶和八阶精度的外推差分格式。并通过两个 Poisson 方程算例，验算已建立的差分格式。数值算例结果表明，基于紧致差分格式的 Richardson 外推法能够得到有效的、健壮的高精度数值解。

**关键词**：计算数学；椭圆型偏微分方程；紧致差分格式；Richardson 外推法；高阶精度

**中图分类号**：O242.2　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673-9833(2024)01-0091-07

**引文格式**：李曹杰，张海湘，杨雪花．一类椭圆型 Dirichlet 边值问题的高精度 Richardson 外推法 [J]. 湖南工业大学学报，2024，38(1)：91-97.

## A High-Precision Richardson Extrapolation Method for a Class of Elliptic Dirichlet Boundary Value Calculation

LI Caojie，ZHANG Haixiang，YANG Xuehua

（College of Science，Hunan University of Technology，Zhuzhou Hunan 412007，China）

**Abstract**：In view of the calculation of elliptic partial differential equations, compact difference schemes with fourth and sixth order precision are firstly established, followed by an adoption of the Richardson extrapolation method to obtain the extrapolation schemes with sixth and eighth order precision on this basis. The established difference scheme can be verified by two Poisson equation examples. The numerical example results show that the adoption of the Richardson extrapolation method based on the compact difference scheme is able to obtain effective and robust high-precision numerical solutions.

**Keywords**：computational mathematics；elliptic partial differential equation；compact difference scheme；Richardson extrapolation；high order accuracy

## 1　研究背景

椭圆型方程在流体力学、弹性力学、电磁学、几何学和变分法中都得到了广泛应用。随着椭圆型方程应用的不断深入，对其数值解的精度要求越来越高。对这类方程，常见的处理方式是，首先对区间进行网

**收稿日期**：2022-11-18

**基金项目**：国家自然科学基金资助项目（12226340，12226337，12126321）；湖南省自然科学基金资助项目（2022JJ50083）；湖南省教育厅优秀青年基金资助项目（21B0550）

**作者简介**：李曹杰，男，湖南工业大学硕士生，主要研究方向为计算数学，E-mail：alucey@163.com

**通信作者**：张海湘，男，湖南工业大学副教授，博士(后)，主要研究方向为大规模科学计算与应用，E-mail：hassenzhang@163.com

格剖分，然后对方程离散、建立差分格式，再解线性方程组 [1]。五点差分格式是最传统的差分格式，但它的精度只有二阶，难以得到高精度的解，不再满足目前的方程应用需要。Richardson 外推法是一种通过线性组合缩小误差的方法，因此，为了寻求高精度的解，采用外推法获取方程的高阶格式是一个不错的选择。在文献 [1−2] 中，作者基于五点差分格式外推，得到了椭圆型方程的四阶精度格式。文献 [1, 3−4] 发展了四阶紧致差分格式，可以直接求出椭圆型方程四阶精度的数值解。文献 [5] 提出了多项复合型黏弹性波问题的离散奇异卷积方法。文献 [6−8] 分别在不同条件下给出了椭圆型方程六阶精度的解，文献 [9] 通过引入新的变量来构建方程的紧致格式，文献 [10] 利用 Hopf-Cole 变换，将非线性方程变成线性方程。如此可以借助紧算子构建高阶差分格式。文献 [11] 提出了新的时空平衡的 Sinc 配点方法，求解四阶带奇异的积分微分方程。文献 [12] 提出了 ADI 配点方法求解二阶带奇异的积分微分方程。文献 [13] 提出了计算高维带弱奇异核发展型方程的交替方向隐式欧拉方法。文献 [14] 构造了二维带弱奇异核抛物型积分微分方程的交替方向隐式有限差分格式。

本文拟基于文献 [1] 中的四阶紧致差分格式和文献 [7] 中的六阶紧致差分格式，首先，给出相关引理，搭建四阶差分格式和极值原理，并证明差分格式的收敛阶，在此基础上建立四阶紧致差分格式；然后，用 Richardson 外推法，建立椭圆型方程的外推格式，分别得到其六阶与八阶的高阶精度格式；最后，以两个算例来验证高阶格式的有效性。

现讨论如下一类椭圆型 Dirichlet 边值问题：

$$-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=f\left(x, y\right),\ \left(x, y\right)\in \Omega\ 。\tag{1}$$

其边界条件为

$$u\,|_{\Gamma}=\varphi(x, y)\ 。\tag{2}$$

式（1）（2）中：$\Omega$ 为矩形区域 $[0, L_1]\times[0, L_2]$ 内部；$\Gamma$ 为边界。

将区间 $[0, L_1]$ 作 $m$ 等分，记 $h_1=L_1/m$；将区间 $[0, L_2]$ 作 $n$ 等分，记 $h_2=L_2/n$，则矩形区域被剖分成 $m\times n$ 个矩形小块。

为表示方便，本文引入如下记号：

$$\delta_x^2 v_{i,\,j}=\frac{1}{h_1^{\,2}}\left[v_{i-1,\,j}-2v_{i,\,j}+v_{i+1,\,j}\right],$$

$$\delta_y^2 v_{i,\,j}=\frac{1}{h_2^{\,2}}\left[v_{i,\,j-1}-2v_{i,\,j}+v_{i,\,j+1}\right]。$$

对结点表示如下：

$$\begin{cases}\omega\in\left\{(i,\,j)\middle|\left(x_i,\,y_j\right)\in\Omega\right\},\\ \gamma\in\left\{(i,\,j)\middle|\left(x_i,\,y_j\right)\in\Gamma\right\}。\end{cases}$$

在结点处考虑方程（1），有

$$-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left(x_i, y_j\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\left(x_i, y_j\right)\right)=f\left(x_i, y_j\right),(i,\,j)\in\omega\ 。\tag{3}$$

为了引入紧致差分法，定义如下 $x$ 和 $y$ 方向紧算子：

$$(Av)_{i,\,j}=\begin{cases}\dfrac{1}{12}\left(v_{i-1,\,j}+10v_{i,\,j}+v_{i+1,\,j}\right),1\leqslant i\leqslant m-1,\,0\leqslant j\leqslant n;\\ v_{i,\,j},\ i=0,\,m,\ 0\leqslant j\leqslant n。\end{cases}\tag{4}$$

$$(Bv)_{i,\,j}=\begin{cases}\dfrac{1}{12}\left(v_{i,\,j-1}+10v_{i,\,j}+v_{i,\,j+1}\right),1\leqslant j\leqslant n-1,\,0\leqslant i\leqslant m;\\ v_{i,\,j},\, i=0,\,n,\ 0\leqslant i\leqslant m。\end{cases}\tag{5}$$

## 2 理论基础

**引理 1** 如果函数 $g(x)$ 在区间 $[c-h, c+h]$ 有八阶连续偏导，则

$$\frac{1}{12}\left[g''(c-h)+10g''(c)+g''(c+h)\right]=\frac{1}{h^2}\left[g(c+h)-2g(c)+g(c-h)\right]+\frac{g^{(6)}(c)}{240}h^4-\frac{13}{960}h^6 g^{(8)}(\xi)。\tag{6}$$

**证明** 由带微分余项的 Taylor 公式，有

$$g(c+h)=\sum_{n=0}^{7}\frac{h^n}{n!}g^{(n)}(c)+\frac{h^8}{5\,040}\int_0^1 g^{(8)}(c+sh)(1-s)^7\mathrm{d}s。\tag{7}$$

$$g(c-h)=\sum_{n=0}^{7}(-1)^n\frac{h^n}{n!}g^{(n)}(c)+\frac{h^8}{5\,040}\int_0^1 g^{(8)}(c-sh)(1-s)^7\mathrm{d}s。\tag{8}$$

将式（7）和（8）相加，整理后有

$$\frac{1}{h^2}\left[g(c+h)-2g(c)+g(c-h)\right]=g''(c)+\frac{h^2}{12}g^{(4)}(c)+\frac{h^4}{360}g^{(6)}(c)+\frac{h^6}{5\,040}\int_0^1\left[g^{(8)}(c+sh)+g^{(8)}(c-sh)\right](1-s)^7\mathrm{d}s。\tag{9}$$

对 $g$ 的二阶导数应用 Taylor 公式求解，可得

$$g''(c+h)=\sum_{n=0}^{5}\frac{h^n}{n!}g^{(n+2)}(c)+\frac{h^6}{120}\int_0^1 g^{(8)}(c+sh)(1-s)^5\mathrm{d}s,\tag{10}$$

$$g''(c-h)=\sum_{n=0}^{5}(-1)^n\frac{h^n}{n!}g^{(n+2)}(c)+\frac{h^6}{120}\int_0^1 g^{(8)}(c-sh)(1-s)^5\mathrm{d}s。\tag{11}$$

由式（10）（11）可得：

$$\frac{1}{12}\left[g''(c-h)+10g''(c)+g''(c+h)\right]=g''(c)+\frac{h^2}{12}g^{(4)}(c)+\frac{h^4}{144}g^{(6)}(c)+\frac{h^6}{1\,440}\cdot\left(\int_0^1 g^{(8)}(c+sh)(1-s)^5\mathrm{d}s+\int_0^1 g^{(8)}(c-sh)(1-s)^5\mathrm{d}s\right)。\tag{12}$$

将式（12）减去式（9），并应用积分中值定理及介值定理，可得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{12}\left[g''(c-h)+10g''(c)+g''(c+h)\right]-\\&\frac{1}{h^2}\left[g(c+h)-2g(c)+g(c-h)\right]=\frac{g^{(6)}(c)}{240}h^4+\frac{h^6}{240}\cdot\\&\int_0^1\left[g^{(8)}(c+sh)+g^{(8)}(c-sh)\right](1-s)^5\left[6-21(1-s)^2\right]\mathrm{d}s=\\&\frac{g^{(6)}(c)}{240}h^4+\frac{h^6}{240}\left[g^{(8)}(c+sh)+g^{(8)}(c-sh)\right]\cdot\\&\int_0^1(1-s)^5\left[6-21(1-s)^2\right]\mathrm{d}s=\\&\frac{g^{(6)}(c)}{240}h^4-\frac{13}{960}h^6g^{(8)}(\xi)。\end{aligned}\tag{13}$$

引理 1 证毕。

**引理 2**　设

$$v=\left\{v_{i,j}\middle|(i,j)\in\omega\cup\gamma\right\}\tag{14}$$

为 $\Omega$ 上的网格函数，记

$$\left(L_h v\right)_{i,j}\equiv-\left(B\delta_x^2 v_{i,j}+A\delta_y^2 v_{i,j}\right)\leqslant 0\,,\tag{15}$$

当步长 $h_1$、$h_2$ 满足

$$1/\sqrt{5}\leqslant h_1/h_2\leqslant\sqrt{5}\,,\tag{16}$$

则有

$$\max_{(i,j)\in\omega}v_{i,j}\leqslant\max_{(i,j)\in\gamma}v_{i,j}。\tag{17}$$

**证明**　采用反证法，若

$$\max_{(i,j)\in\omega}v_{i,j}\geqslant\max_{(i,j)\in\gamma}v_{i,j}\,,\tag{18}$$

记

$$\max_{(i,j)\in\omega}v_{i,j}=M\,,\tag{19}$$

则一定存在内部结点 $(i_0, j_0)$ 使得 $v_{i0,\,j0}=M$，且其周围结点至少有一个的值严格小于 $M$，因此当步长满足上述关系时，有

$$\begin{aligned}(L_h v)_{i,j}=&-\frac{h_1^2+h_2^2}{12h_1^2h_2^2}v_{i-1,j-1}-\frac{5h_2^2-h_1^2}{6h_1^2h_2^2}v_{i-1,j}-\\&\frac{h_1^2+h_2^2}{12h_1^2h_2^2}v_{i-1,j+1}-\frac{5h_1^2-h_2^2}{6h_1^2h_2^2}v_{i,j-1}+\frac{5h_1^2+5h_2^2}{3h_1^2h_2^2}v_{ij}-\\&\frac{5h_1^2-h_2^2}{6h_1^2h_2^2}v_{i,j+1}-\frac{h_1^2+h_2^2}{12h_1^2h_2^2}v_{i+1,j-1}-\frac{5h_2^2-h_1^2}{6h_1^2h_2^2}v_{i+1,j}-\\&\frac{h_1^2+h_2^2}{12h_1^2h_2^2}v_{i+1,j+1}>0,\ (i,j)\in\omega。\end{aligned}\tag{20}$$

这与题设矛盾，故假设不成立。引理 2 证毕。

**引理 3**　紧算子 $A$、$B$ 定义如式（4）（5）所示，有如下差分格式

$$\begin{cases}-(B\delta_x^2 v_{i,j}+A\delta_y^2 v_{i,j})=g(x_i,y_j),\ (i,j)\in\omega;\\ v_{i,j}=\varphi(x_i,y_j),\ (i,j)\in\gamma。\end{cases}\tag{21}$$

这里 $g(x_i, y_j)\leqslant 0$，若步长满足如下关系：

$$1/\sqrt{5}\leqslant h_1/h_2\leqslant\sqrt{5},\tag{22}$$

记

$$\left\{v_{i,j}\middle|(i,j)\in\omega\cup\gamma\right\}\tag{23}$$

为上述差分格式（21）的解，则有

$$\max_{(i,j)\in\omega}\left|v_{i,j}\right|\leqslant\max_{(i,j)\in\gamma}\left|\varphi_{i,j}\right|+\frac{1}{16}\left(L_1^2+L_2^2\right)\max_{(i,j)\in\gamma}\left|g_{i,j}\right|。\tag{24}$$

**证明**　由 $g(x_i, y_j)\leqslant 0$，有

$$\left(L_h v\right)_{i,j}=-\left(B\delta_x^2 v_{i,j}+A\delta_y^2 v_{i,j}\right)=g\left(x_i,y_j\right)\leqslant 0,\tag{25}$$

简记 $g(x_i, y_j)$ 为 $g_{i,j}$，再记

$$C=\max_{(i,j)\in\omega}\left|g_{i,j}\right|,\ P(x,y)=x\left(L_1-x\right)+y\left(L_2-y\right)。\tag{26}$$

定义网格函数

$$w_{i,j}=\frac{1}{4}CP\left(x_i,y_j\right),\ (i,j)\in\omega\cup\gamma,\tag{27}$$

则有

$$w_{i,j}\geqslant 0,\ (i,j)\in\omega\cup\gamma,\tag{28}$$

$$\left(L_h w\right)_{i,j}=C,\ (i,j)\in\omega。\tag{29}$$

因此有

$$L_h\left(\pm v-w\right)_{i,j}=\pm\left(L_h v\right)_{i,j}-\left(L_h w\right)_{i,j}=\pm g_{i,j}-C\leqslant 0,\ (i,j)\in\omega。\tag{30}$$

由引理 2，有

$$\max_{(i,j)\in\omega}(\pm v-w)_{i,j}\leqslant\max_{(i,j)\in\gamma}(\pm v-w)_{i,j}\leqslant\max_{(i,j)\in\gamma}\left|\pm v_{i,j}\right|+\max_{(i,j)\in\gamma}(-w_{i,j})\leqslant\max_{(i,j)\in\gamma}\left|v_{i,j}\right|,\tag{31}$$

于是

$$\begin{aligned}\max_{(i,j)\in\omega}(\pm v)_{i,j}&=\max_{(i,j)\in\omega}(\pm v-w+w)_{i,j}\leqslant\max_{(i,j)\in\omega}(\pm v-w)_{i,j}+\\&\max_{(i,j)\in\omega}w_{i,j}\leqslant\max_{(i,j)\in\gamma}\left|v_{i,j}\right|+\max_{(i,j)\in\omega}w_{i,j}\leqslant\\&\max_{(i,j)\in\gamma}\left|\varphi_{i,j}\right|+\frac{1}{16}\left(L_1^2+L_2^2\right)\max_{(i,j)\in\omega}\left|g_{i,j}\right|。\end{aligned}\tag{32}$$

引理 3 证毕。

## 3 数值离散格式

### 3.1 紧致差分格式

现设 $u(x, y)$ 有八阶连续偏导，在式（3）两端同时作用紧算子 $AB$，因为 $AB=BA$，可得

$$-BA\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left(x_i, y_j\right)-AB\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\left(x_i, y_j\right)=AB\,f\left(x_i, y_j\right),\ (i, j)\in\omega。\tag{33}$$

由引理1，记 $U_{i,j}=u(x_i, y_j)$，整理得：

$$-B\left[\delta_x^2 u_{i,j}+\frac{h_1^4}{240}\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}\left(x_i, y_j\right)-\frac{13}{960}h_1^6\frac{\partial^8 u}{\partial x^8}\left(\xi_{i,j}, y_j\right)\right]-A\left[\delta_y^2 u_{i,j}+\frac{h_2^4}{240}\frac{\partial^6 u}{\partial y^6}\left(x_i, y_j\right)-\frac{13}{960}h_2^6\frac{\partial^8 u}{\partial y^8}\left(x_i, \eta_{i,j}\right)\right]=AB\,f\left(x_i, y_j\right),\ (i, j)\in\omega,\tag{34}$$

为使算式简洁，记误差项

$$P_{i,j}=\left[\frac{h_1^4}{240}\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}\left(x_i, y_j\right)-\frac{13}{960}h_1^6\frac{\partial^8 u}{\partial x^8}\left(\xi_{i,j}, y_j\right)\right],1\leqslant i\leqslant m-1, 0\leqslant j\leqslant n,\tag{35}$$

$$Q_{i,j}=\left[\frac{h_2^4}{240}\frac{\partial^6 u}{\partial y^6}\left(x_i,\ y_j\right)-\frac{13}{960}h_2^6\frac{\partial^8 u}{\partial y^8}\left(x_i,\ \eta_{i,j}\right)\right],\ 0\leqslant i\leqslant m,\ 1\leqslant j\leqslant n-1,\tag{36}$$

将式（35）（36）代入方程（34），整理得到

$$-\left(B\delta_x^2 U_{i,j}+A\delta_y^2 U_{i,j}\right)=ABf\left(x_i, y_j\right)+BP_{i,j}+AQ_{i,j},\quad (i, j)\in\omega。\tag{37}$$

省去误差项，用数值解 $u_{i,j}$ 代替真解 $U_{i,j}$，得到如下紧致差分格式：

$$\begin{cases}-\left(B\delta_x^2 u_{i,j}+A\delta_y^2 u_{i,j}\right)=AB\,f\left(x_i, y_j\right),\quad (i, j)\in\omega;\\ u_{i,j}=\varphi\left(x_i,\ y_j\right),\quad (i, j)\in\gamma。\end{cases}\tag{38}$$

### 3.2 高阶 Richardson 外推差分格式

若 $p(h)$ 可近似表示为

$$p(h)=p+\alpha h^4+O\left(h^6\right),\tag{39}$$

用 $h/2$ 代替 $h$，得

$$p\left(\frac{h}{2}\right)=p+\frac{\alpha}{16}h^4+O\left(\frac{h}{2}\right)^6。\tag{40}$$

结合式（39）（40），有

$$\frac{16}{15}p\left(\frac{h}{2}\right)-\frac{1}{15}p\left(h\right)=p+O\left(\frac{h}{2}\right)^6。\tag{41}$$

**定理1** 设定解问题

$$\begin{cases}-\left(BA\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-AB\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)=\frac{1}{240}B\frac{\partial^6 u(x, y)}{\partial x^6},\quad (x, y)\in\Omega;\\ v=0,\quad (x, y)\in\Gamma;\end{cases}\tag{42}$$

$$\begin{cases}-\left(BA\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-AB\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)=\frac{1}{240}A\frac{\partial^6 u(x, y)}{\partial y^6},\quad (x, y)\in\Omega;\\ w=0,\quad (x, y)\in\Gamma;\end{cases}\tag{43}$$

存在光滑解，则有

$$\max_{(i, j)\in\omega}\left|u\left(x_i, y_j\right)-\left[\frac{16}{15}u_{2i,2j}\left(\frac{h_1}{2},\frac{h_2}{2}\right)-\frac{1}{15}u_{ij}\left(h_1, h_2\right)\right]\right|=O\left(h_1^6+h_2^6\right)。\tag{44}$$

**证明** 记

$$e_{i,j}=u\left(x_i, y_j\right)-u_{i,j}\left(h_1, h_2\right)。\tag{45}$$

差分格式（38）的误差方程组为

$$\begin{cases}-\left(B\delta_x^2 e_{i,j}-A\delta_y^2 e_{i,j}\right)=B\frac{h_1^4}{240}\frac{\partial^6 u\left(x_i, y_j\right)}{\partial x^6}+A\frac{h_2^4}{240}\frac{\partial^6 u\left(x_i, y_j\right)}{\partial y^6}-B\frac{13}{960}h_1^6\frac{\partial^8 u}{\partial x^8}\left(\xi_{i,j}, y_j\right)-\frac{13}{960}h_2^6\frac{\partial^8 u}{\partial y^8}\left(x_i, \eta_{i,j}\right),\quad (i, j)\in\omega;\\ e_{i,j}=0,\quad (i, j)\in\gamma。\end{cases}\tag{46}$$

将式（42）（43）离散后有

$$\begin{cases}-\left(B\delta_x^2 v_{i,j}-A\delta_y^2 v_{i,j}\right)=\frac{1}{240}B\frac{\partial^6 u(x, y)}{\partial x^6}+B\frac{h_1^4}{240}\frac{\partial^6 v}{\partial x^6}\left(\xi_{i,j}, y_j\right)+A\frac{h_2^4}{240}\frac{\partial^6 v}{\partial y^6}\left(x_i, \eta_{i,j}\right),\ (x, y)\in\Omega;\\ v=0,\quad (x, y)\in\Gamma。\end{cases}\tag{47}$$

$$\begin{cases}-\left(B\delta_x^2 w_{i,j}-A\delta_y^2 w_{i,j}\right)=\frac{1}{240}A\frac{\partial^6 u\left(x_i, y_j\right)}{\partial y^6}+B\frac{h_1^4}{240}\frac{\partial^6 w}{\partial x^6}\left(\zeta_{i,j}, y_j\right)+A\frac{h_2^4}{240}\frac{\partial^6 w}{\partial y^6}\left(x_i, \theta_{i,j}\right),\ (x, y)\in\Omega;\\ w=0,\quad (x, y)\in\Gamma。\end{cases}\tag{48}$$

记

$$r_{i,j}=e_{i,j}-h_1^4 v_{i,j}-h_2^4 w_{i,j}。\tag{49}$$

将式（47）乘以 $-h_1^4$ 与式（48）乘以 $-h_2^4$ 后加到式（46），

可得

$$\begin{cases} -\left(B\delta_x^2 r_{i,j} - A\delta_y^2 r_{i,j}\right) = -B\dfrac{h_1^8}{240}\dfrac{\partial^6 v\left(x_i, y_j\right)}{\partial x^6} - \\ \quad A\dfrac{h_1^4 h_2^4}{240}\dfrac{\partial^6 v\left(x_i, y_j\right)}{\partial y^6} - B\dfrac{h_1^4 h_2^4}{240}\dfrac{\partial^6 w\left(x_i, y_j\right)}{\partial x^6} - \\ \quad A\dfrac{h_2^8}{240}\dfrac{\partial^6 w\left(x_i, y_j\right)}{\partial y^6} - B\dfrac{13}{960}h_1^6\dfrac{\partial^8 u}{\partial x^8}\left(\xi_{i,j}, y_j\right) - \\ \quad A\dfrac{13}{960}h_2^6\dfrac{\partial^8 u}{\partial y^8}\left(x_i, \eta_{i,j}\right),\quad (i,j)\in\omega; \\ r_{i,j} = 0,\quad (i,j)\in\gamma。 \end{cases} \tag{50}$$

记

$$g\left(x_i, y_j\right) = -B\frac{h_1^8}{240}\frac{\partial^6 v\left(x_i, y_j\right)}{\partial x^6} - A\frac{h_1^4 h_2^4}{240}\frac{\partial^6 v\left(x_i, y_j\right)}{\partial y^6} - B\frac{h_1^4 h_2^4}{240}\frac{\partial^6 w\left(x_i, y_j\right)}{\partial x^6} - A\frac{h_2^8}{240}\frac{\partial^6 w\left(x_i, y_j\right)}{\partial y^6} - B\frac{13}{960}h_1^6\frac{\partial^8 u}{\partial x^8}\left(\xi_{i,j}, y_j\right) - A\frac{13}{960}h_2^6\frac{\partial^8 u}{\partial y^8}\left(x_i, \eta_{i,j}\right), (i,j)\in\omega。 \tag{51}$$

由引理 3，且 $\varphi=0$，有

$$r_{i,j} \leqslant \frac{1}{16}\left(L_1^2 + L_2^2\right)\max|g_{i,j}| = O(h_1^6 + h_2^6),\ (i,j)\in\omega。 \tag{52}$$

$$u_{i,j}\left(h_1, h_2\right) = u\left(x_i, y_j\right) - h_1^4 v\left(x_i, y_j\right) - h_2^4 w\left(x_i, y_j\right) - O\left(h_1^6 + h_2^6\right)。 \tag{53}$$

用（$h_1/2, h_2/2$）代替（$h_1, h_2$），得到

$$u_{2i,2j}\left(\frac{h_1}{2}, \frac{h_2}{2}\right) = u\left(x_i, y_j\right) - \frac{h_1^4}{16}v\left(x_i, y_j\right) - \frac{h_2^4}{16}w\left(x_i, y_j\right) - O\left(\left(\frac{h_1}{2}\right)^6 + \left(\frac{h_2}{2}\right)^6\right)。 \tag{54}$$

结合式（53）与（54），再根据式（41），可得

$$\max_{(i,j)\in\omega}\left|u\left(x_i, y_j\right) - \left[\frac{16}{15}u_{2i,2j}\left(\frac{h_1}{2}, \frac{h_2}{2}\right) - \frac{1}{15}u_{i,j}\left(h_1, h_2\right)\right]\right| = O\left(h_1^6 + h_2^6\right)。 \tag{55}$$

定理 1 证毕。

利用文献 [7]，可得一个具有六阶截断误差的差分格式：

$$-\left(\delta_x^2 + \delta_y^2 + \frac{h^2}{6}\delta_x^2\delta_y^2\right)u = f + \frac{h^2}{12}\nabla^2 f + \frac{h^4}{360}\nabla^4 f + \frac{h^4}{90}\partial_x^2\partial_y^2 f + O\left(h^6\right)。 \tag{56}$$

其中 $\nabla^n f = \partial_x^n f + \partial_y^n f$。

通过定理 1 类似证明，容易得到如下八阶外推格式：

$$\max_{(i,j)\in\omega}\left|u\left(x_i, y_j\right) - \left[\frac{64}{63}u_{2i,2j}\left(\frac{h_1}{2}, \frac{h_2}{2}\right) - \frac{1}{63}u_{i,j}\left(h_1, h_2\right)\right]\right| = O\left(h_1^8 + h_2^8\right)。 \tag{57}$$

同样，通过外推原理，可以对四阶格式（38）进行两次外推，得到如下两次外推八阶格式：

$$\frac{1}{945}p(h) - \frac{16}{189}p\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{1\,024}{945}p\left(\frac{h}{4}\right)。 \tag{58}$$

## 4　数值算例

本节将给出数值算例，以验证本研究所建立方法的有效性，以及在数值求解椭圆型 Dirichlet 边值问题时的高效性。表 1 和表 2 中列出了算例 1 与算例 2 在四阶格式（38）、六阶格式（55）（56）、八阶格式（57）（58）下的数值结果。其中，$E(h_1, h_2)$ 表示在步长 $h_1$、$h_2$ 下网格结点的最大误差，且 $Rate=\log_2(E(2h_1, 2h_2)/E(h_1, h_2))$，CPU time（s）是差分格式算该步长数值解的时间，总 CPU 是程序连续运行完各步长结果的总时间。

**算例 1**

$$-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = -2\pi^2 e^{-\pi(x+y)},\ 0<x<1,\ 0<y<1;$$

$$u(0,\ y) = e^{-\pi y},\quad u(1,\ y) = e^{-\pi-\pi y},\quad 0\leqslant y\leqslant 1;$$

$$u(x,0) = e^{-\pi x},\quad u(x,1) = e^{-\pi x-\pi},\ 0<x<1;$$

精确解为 $u(x,y) = e^{-\pi(x+y)}$

**表 1　算例 1 数值结果**

Table 1　Numerical results of example 1

| 差分格式 | $(h_1, h_2)$ | $E(h_1, h_2)$ | *Rate* | CPU time/s | 总 CPU/s |
|---|---|---|---|---|---|
| 四阶紧致差分格式 | (1/8, 1/8) | 1.269e−05 | * | 0.04 | 2.84 |
| | (1/16, 1/16) | 7.958e−07 | 3.99 | 0.28 | |
| | (1/32, 1/32) | 5.015e−08 | 3.99 | 2.40 | |
| 外推六阶差分格式 | (1/8, 1/8) | 1.435e−07 | * | 0.09 | 2.87 |
| | (1/16, 1/16) | 3.328e−09 | 5.43 | 0.32 | |
| | (1/32, 1/32) | 5.903e−11 | 5.82 | 2.43 | |
| 六阶紧致差分格式 | (1/8, 1/8) | 5.057e−07 | * | 0.06 | 3.32 |
| | (1/16, 1/16) | 8.010e−09 | 5.98 | 0.29 | |
| | (1/32, 1/32) | 1.265e−10 | 5.98 | 2.97 | |
| 两次外推八阶差分格式 | (1/16, 1/16) | 2.215e−09 | * | 0.35 | 2.72 |
| | (1/32, 1/32) | 3.473e−11 | 5.99 | 2.44 | |
| 一次外推八阶差分格式 | (1/8, 1/8) | 2.240e−08 | * | 0.08 | 3.46 |
| | (1/16, 1/16) | 1.093e−10 | 7.68 | 0.358 | |
| | (1/32, 1/32) | 4.478e−13 | 7.93 | 3.26 | |

**算例 2**

$$-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=\left(\pi^2-1\right)\mathrm{e}^{-x}\cos(\pi y),\ 0<x<2, 0<y<1;$$

$$u(0, y)=\cos(\pi y),\ u(2, y)=\mathrm{e}^{-2}\cos(\pi y),\ 0\leqslant y\leqslant 1;$$

$$u(x, 0)=\mathrm{e}^{-x},\ u(x, 1)=-\mathrm{e}^{-x},\ 0<x<2\ ;$$

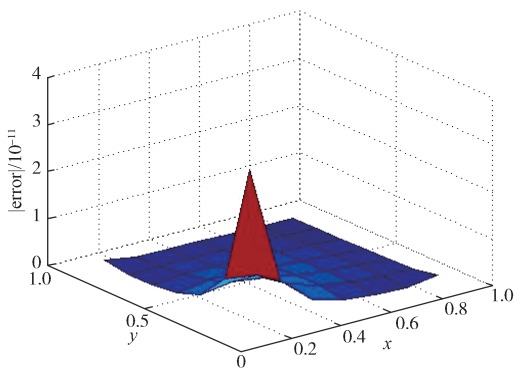
精确解为 $u(x, y)=\mathrm{e}^{-x}\cos(\pi y)$。

**表 2　算例 2 的数值结果**

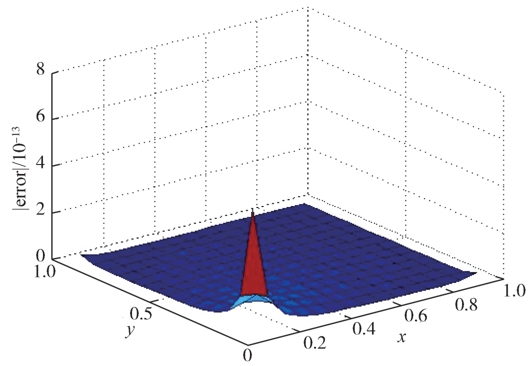
Table 2　Numerical results of examples 2

| 差分格式 | $(h_1, h_2)$ | $E(h_1, h_2)$ | *Rate* | CPU time/s | 总 CPU/s |
|---|---|---|---|---|---|
| 四阶紧致差分格式 | (1/8, 1/8) | 1.250e−05 | * | 0.16 | 7.23 |
| | (1/16, 1/16) | 7.827e−07 | 4.00 | 0.67 | |
| | (1/32, 1/32) | 4.967e−08 | 3.98 | 6.64 | |
| 一次外推六阶差分格式 | (1/8, 1/8) | 3.271e−07 | * | 0.17 | 7.79 |
| | (1/16, 1/16) | 3.988e−09 | 6.36 | 0.81 | |
| | (1/32, 1/32) | 6.092e−11 | 6.03 | 7.12 | |
| 六阶紧致差分格式 | (1/8, 1/8) | 6.561e−09 | * | 0.13 | 9.35 |
| | (1/16, 1/16) | 1.023e−10 | 6.00 | 0.76 | |
| | (1/32, 1/32) | 1.625e−12 | 5.98 | 8.49 | |
| 两次外推八阶差分格式 | (1/16, 1/16) | 1.141e−09 | * | 0.78 | 7.56 |
| | (1/32, 1/32) | 1.768e−11 | 6.01 | 6.47 | |
| 一次外推八阶差分格式 | (1/8, 1/8) | 2.560e−10 | * | 0.14 | 9.45 |
| | (1/16, 1/16) | 8.600e−13 | 8.22 | 0.78 | |
| | (1/32, 1/32) | 5.884e−15 | 7.19 | 7.98 | |

两个算例中，一次外推六阶差分格式与一次外推八阶差分格式分别建立在四阶、六阶紧致差分格式上。从表 1 和表 2 中，可以看到一次外推能将收敛率提高两阶。在相同步长下这能得到更高精度的数值解，且解的收敛速度更快。两次外推八阶差分格式建立在四阶紧致格式上，其 $L_\infty$ 误差值均低于理论预期值，因此，绘出其误差曲面并求出部分结点值，以进一步探究其原因。算例 1 在步长为 1/32 和 1/64 时的误差曲面如图 1 所示，其不同结点处的误差值与最大误差值具体见表 3。




a）步长为 1/32




b）步长为 1/64

**图 1　算例 1 在不同步长下的误差曲面**

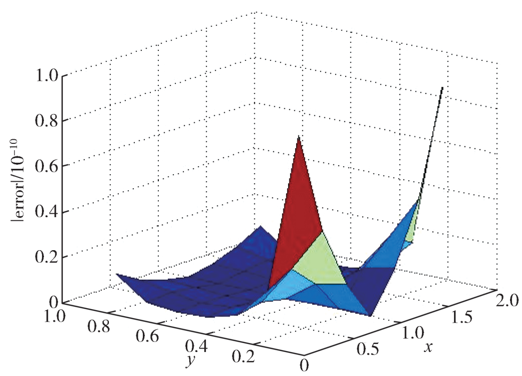
Fig. 1　Error surface of example 1 with different step lengths

**表 3　算例 1 不同结点处的误差值与最大误差**

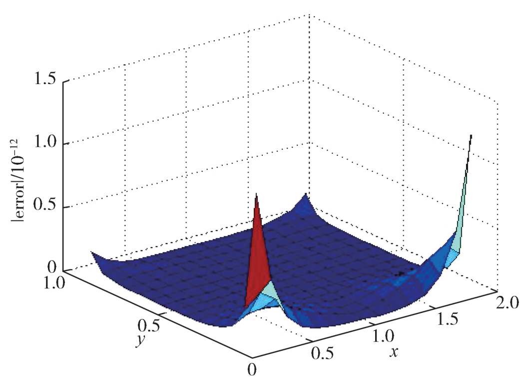
Table 3　Error values and maximum errors of example 1 at different nodes

| $(h_1, h_2)$ | (1/4, 1/4) | (3/4, 1/4) | (1/2, 3/4) | max $E(h_1, h_2)$ |
|---|---|---|---|---|
| (1/16, 1/16) | 2.215e−09 | 2.748e−10 | 2.315e−10 | 2.215e−09 |
| (1/32, 1/32) | 8.321e−12 | 1.133e−12 | 9.256e−13 | 3.473e−11 |
| (1/64, 1/64) | 4.502e−14 | 1.002e−14 | 8.993e−15 | 5.472e−13 |

算例 2 在步长为 1/32 和 1/64 时的误差曲面如图 2 所示，其不同结点处的误差值与最大误差值见表 4。




a）步长为 1/32




b）步长为 1/64

**图 2　算例 2 在不同步长下的误差曲面**

Fig. 2　Error surface of example 2 with different step lengths

**表 4　算例 2 不同结点处的误差值与最大误差**

Table 4　Error values and maximum errors of example 2 at different nodes

| $(h_1, h_2)$ | (1/2, 1/4) | (3/2, 1/4) | (1, 3/4) | max $E(h_1, h_2)$ |
|---|---|---|---|---|
| (1/16, 1/16) | 2.718e−10 | 6.246e−11 | 6.946e−11 | 1.141e−09 |
| (1/32, 1/32) | 1.154e−12 | 2.553e−13 | 2.806e−13 | 1.768e−11 |
| (1/64, 1/64) | 1.943e−15 | 9.714e−16 | 2.082e−14 | 2.693e−13 |

从图 1 和图 2、表 3 和表 4 中的数据可以看出，对比某一固定结点时，例如表 4，在结点 (1/2, 1/4) 处，其收敛率分别约为 8 和 9，由此可见算例收敛率符合理论预期。从图 1 和图 2 中可以看到，同一步长下，有些结点的误差值相对较大，并且可以发现当步长不同时，其误差最大值在不同结点处取得，$Rate=\log_2(E(2h_1, 2h_2)/E(h_1, h_2))$ 约为 6，因此在前文的表 1 与表 2 中，二次外推格式的整体收敛率只达到了 6 阶。接下来计算二次外推格式的 $L_2$ 误差收敛阶，两个算例的 $L_2$ 误差及收敛率结果如表 5 所示，表中的 $Rate=\log_2(L_2(2h_1, 2h_2)/L_2(h_1, h_2))$。

**表 5　两个算例的 $L_2$ 误差及收敛率**

Table 5　$L_2$ error and convergence rate of two examples

| 算例 | $(h_1, h_2)$ | $L_2(h_1, h_2)$ | *Rate* |
|---|---|---|---|
| 算例 1 两次外推格式 | (1/16, 1/16) | 6.224e−10 | * |
| | (1/32, 1/32) | 4.996e−12 | 6.96 |
| | (1/64, 1/64) | 4.162e−14 | 6.91 |
| 算例 2 两次外推格式 | (1/16, 1/16) | 2.987e−10 | * |
| | (1/32, 1/32) | 2.499e−12 | 6.90 |
| | (1/64, 1/64) | 2.122e−14 | 6.88 |

表 5 显示，两个算例在不同步长下的 $L_2$ 收敛率都约为 7 阶收敛，即数值方法得到的收敛率略小于理论的 8 阶收敛。可能的原因是：每一次步长的计算结果需要由 3 种不同步长的数值解通过线性关系得出。而 3 种不同步长的数值解本身就会产生舍入误差，在高精度下三者叠加会影响到截断误差的收敛率。由此多次外推法有一定的局限性。

## 5　结语

本文研究了以基于紧致差分格式的高精度 Richardson 外推格式来求椭圆型偏微分方程的数值解，理论显示一次外推能将精度提升两阶。算例对比了原紧致差分格式、外推高阶差分分格式和同阶紧致差分格式的数值结果。结果表明，外推高阶差分格式虽然比原格式要花费更长的时间进行运算，但同步长下得到解的精度大大提升。且外推差分格式运算时间不一定比同阶紧致差分格式更长，总 CPU 时间甚至可能会更短，外推格式时间主要取决于原格式程序的运算简易程度。两次外推八阶差分格式理论上能达到八阶，但由于结果会受到多次舍入误差的影响，使得计算结果受到影响。$L_\infty$ 误差只达到了六阶收敛；$L_2$ 误差收敛率在七阶左右。两个算例的结果均显示，外推八阶格式精度符合理论预期。总的来说，Richardson 外推法对于提高差分格式的精度有显著作用，且易于理解与使用，便于在差分格式中广泛利用。

**参考文献：**

[1]　孙志忠 . 偏微分方程数值解法 [M]. 3 版 . 北京：科学出版社，2022：44−61.
SUN Zhizhong. Numerical Solution of Partial Differential Equation[M]. 3rd ed. Beijing：Science Press，2022：44−61.

[2]　朱爱玲，刘兴华 . 泊松方程的五点差分外推法 [J]. 山东师范大学学报 ( 自然科学版 )，2016，31(2)：57−59.
ZHU Ailing，LIU Xinghua. Five-Point Difference Extrapolation Method for Poisson Equation[J]. Journal of Shandong Normal University(Natural Science)，2016，31(2)：57−59.

[3]　WANG H，ZHANG Y，MA X，et al. An Efficient Implementation of Fourth-Order Compact Finite Difference Scheme for Poisson Equation with Dirichlet Boundary Conditions[J]. Computers & Mathematics with Applications，2016，71：1843−1860.

[4]　杜书德 . 基于有限差分法的泊松方程第一类边值问题求解 [J]. 科技通，2018，34(4)：21−24，30.
DU Shude. The First Boundary Value Problem of Poisson Equation Based on Finite Difference Method[J]. Bulletin of Science and Technology，2018，34(4)：21−24，30.

[5]　张海湘，杨雪花，汤　琼，等 . 多项复合型黏弹性波问题的离散奇异卷积方法 [J]. 湖南工业大学学报，2019，33(3)：1−5，103.
ZHANG Haixiang，YANG Xuehua，TANG Qiong，et al. Discrete Singular Convolution Scheme for Multiple Compound Viscoelastic Wave Flaws[J]. Journal of Hunan University of Technology，2019，33(3)：1−5，103.

[6]　MANOHAR R，STEPHENSON M. Hign Order Difference Schemes for Linear Partial Differential Equations[J]. SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing，1984，5：69−77.

[7]　SPOTZ W F. High-Order Compact Finite Difference Schemes for Computational Mechanics[M]. Texas：The University of Texas at Austin，1995：6−30.

[8]　DAI R，LIN P，ZHANG J. An Efficient Sixth-Order Solution　for Anisotropic Poisson Equation with Completed Richardson Extrapolation and Multiscale Multigrid Method[J].Computers & Mathematics with Applications，2017，73(8)：1865−1877.

（下转第 104 页）