

doi:10.3969/j.issn.1673-9833.2023.03.013

基于 TODIM 的多阶段三角模糊数双边匹配决策方法

刘超, 汪新凡, 隆丽兰

(湖南工业大学 理学院, 湖南 株洲 411007)

摘要: 针对多阶段情形下的三角模糊数双边匹配决策问题, 基于新型距离测度和 TODIM 方法提出一种考虑多阶段的匹配决策方法。首先, 针对现有三角模糊数距离测度的不足, 提出一种三角模糊数新型距离测度; 其次, 给出阶段属性权重未知、阶段时间权重未知的多阶段双边匹配决策问题的数学描述; 再次, 利用三角模糊数的新型距离计算得到期望水平与评价信息之间的损益矩阵, 利用三角模糊数的综合熵值构建优化模型求取阶段属性权重, 利用衰减法计算阶段时间权重, 利用 TODIM 方法构建综合优势度矩阵, 利用极差变化法构建满意度矩阵。通过最大化满意度构建双边匹配模型, 并通过求解模型得到匹配结果。最后, 以风险投资商和企业的投资为例, 验证了所提出匹配决策方法的可行性和有效性。

关键词: 双边匹配; 三角模糊数; 多阶段; 损益值; 衰减法; TODIM 方法

中图分类号: O221.6

文献标志码: A

文章编号: 1673-9833(2023)03-0089-12

引文格式: 刘超, 汪新凡, 隆丽兰. 基于 TODIM 的多阶段三角模糊数双边匹配决策方法 [J]. 湖南工业大学学报, 2023, 37(3): 89-100.

TODIM-Based Multi-Stage Triangular Fuzzy Number Bilateral Matching Decision Making Method

LIU Chao, WANG Xinfan, LONG Lilan

(College of Science, Hunan University of Technology, Zhuzhou Hunan 412007, China)

Abstract: In view of solving the multi-stage triangular fuzzy number bilateral matching decision problem, a multi-stage matching decision method has thus been proposed based on the new distance measure and TODIM method. Firstly, a new distance measure of triangular fuzzy numbers is adopted aimed at the shortcomings of the current distance measure of triangular fuzzy numbers. Secondly, the mathematical description has been made of the multi-stage lateral matching decision making problem with the unknown stage attribute weight and unknown stage time weight provided. Thirdly, the profit and loss matrices between the desired level and evaluation information can be obtained by calculating the new distance measure of triangular fuzzy numbers, followed by a construction of an optimization model by using the triangle fuzzy number comprehensive entropy, thus working out the stage attribute weights; the stage time weights are calculated by using attenuation method, with the comprehensive dominance matrices developed adopting the TODIM method, and with the satisfaction matrices built using the range variation method. Furthermore, a bilateral matching

收稿日期: 2022-07-30

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (71801090); 教育部人文社科规划基金资助项目 (19YJA631071); 湖南省哲学社会科学基金资助重点项目 (18ZDB009); 湖南省自然科学基金资助项目 (1020JJ1264, 1021JJ31225); 湖南省教育厅优秀青年基金资助项目 (20B180, 21B1553)

作者简介: 刘超 (1997-), 男, 江苏盐城人, 湖南工业大学硕士生, 主要研究方向为双边匹配决策,

E-mail: 2061151130@qq.com

通信作者: 汪新凡 (1966-), 男, 湖南安化人, 湖南工业大学教授, 博士, 硕士生导师, 主要研究方向为双边匹配决策,

E-mail: zzwxfydm@126.com

model is constructed by maximizing satisfaction degrees with the match results obtained by solving this model. Finally, the feasibility and effectiveness of the proposed matching decision method can be verified by taking the investment of venture capitalists and enterprises as an example.

Keywords: bilateral matching; triangular fuzzy number; multi-stage; profit and loss; attenuation method; TODIM method

0 引言

双边匹配是指两个离散主体集合依据双方给出的偏好信息,彼此间相互选择并进行匹配的过程。双边匹配研究始于 D. Gale 等^[1]对稳定匹配概念、存在性和匹配最优解等方面的探索。随后许多学者围绕双边匹配问题进行探索,取得了丰硕成果^[2-4]。近年来,随着社会经济发展,双边匹配的应用范围不断扩展,从男女婚姻匹配^[5]、高校招生匹配^[6]和医院实习生匹配^[7]等领域,再到商品交易匹配^[8]、风险投资匹配^[9]和技术知识供需匹配^[10]等。因此,双边匹配问题的研究有重要的理论意义和实际应用价值。

双边匹配决策过程中,双方主体间往往会相互给出评价信息^[11-12],如区间数^[13]、序值^[14-15]和语言集及其拓展形式^[16-17]等。由于三角模糊数既可反映评价信息的模糊性和不确定性,也可用于处理评价信息中的模糊语言术语,因而在表达评价信息时具有优势。目前,评价信息仅为三角模糊数的双边匹配决策问题鲜有研究,但评价信息为混合形式的双边匹配决策问题中多包含三角模糊数,如万树平等^[9]根据市场投资信息具多样化匹配特点,构建了有5种类型信息的多指标评价匹配模型;蒋忠中等^[18]利用4种类型隶属度描述商品交易中模糊信息的软约束,改进了基于模糊信息公理的交易匹配度计算方法;Miao Y. M. 等^[19]针对跨境电商供需交易问题,通过3种评价信息构建匹配满意度优化模型,提出了一种考虑多方主体满意度的双边匹配方法。这些研究为解决评价信息仅为三角模糊数的双边匹配决策问题提供了借鉴。

另外,已有匹配决策问题研究都是单阶段或静态情形,而实际决策过程的匹配往往具有时效性和阶段性特点。近年来,单阶段双边匹配已开始拓展至多阶段的情形, Li P. 等^[20]针对中国残疾老人的长期护理问题,提出了一种基于前景理论和证据推理的概率语言多阶段双边匹配方法;张笛等^[21]针对多阶段匹配中一方主体难以直接给出另一方主体偏好序值信息的情况,提出了一种基于多重偏好序的多阶段双边匹配方法;张笛^[22]还针对多阶段双边匹配中偏好序值难以区分偏好强度的问题,将直觉模糊偏好信息转化

成基本信任分配函数,基于信任度构建匹配满意度模型,并得到双边匹配结果。尽管学者们对多阶段的双边匹配问题进行了较多探索,但目前尚未见基于三角模糊数的多阶段双边匹配决策问题的研究。

TODIM (Tomada de Decisao Interactiva e Multi-criterio) 法^[23]是一种基于前景理论的交互式多属性决策方法。其核心思想是利用方案之间的两两比较,构造优势度函数,计算每个方案与所有方案相比的总体优势度,并以总体优势度的大小排序。与前景理论相比,其具有无需事先确定参考点、涉及的参数较少、计算简单等特点。进而学者们对 TODIM 方法的研究不断扩展,例如,方冰等^[24]将 TODIM 方法应用到属性值为概率犹豫模糊集的多属性群决策问题之中;马艳芳等^[25]提出了多粒度概率语言环境下一种基于前景理论的 TODIM 方法;王霞等^[26]基于随机占优理论和区间灰数信息,提出了一种改进的 TODIM 方法。然而,鲜有学者将 TODIM 法引入多阶段三角模糊数双边匹配决策问题中。

基于上述分析,本文拟针对阶段时间权重和阶段属性权重均未知的多阶段三角模糊数双边匹配决策问题,考虑决策者的期望水平,基于 TODIM 方法,提出一种多阶段三角模糊双边匹配决策方法,并将其应用于风险企业和投资商之间的多阶段匹配算例,以说明该方法的可行性和实用性。

1 预备知识

1.1 双边匹配

在双边匹配决策问题中,设甲方主体集合为 $A = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$, 其中 A_i 为第 i 个甲方主体, $i \in I = \{1, 2, \dots, m\}$; 乙方主体集合为 $B = \{B_1, B_2, \dots, B_n\}$, 其中 B_j 为第 j 个乙方主体, $j \in J = \{1, 2, \dots, n\}$ 。

定义 1^[4] 设 $\mu: A \cup B \rightarrow A \cup B$ 为一一映射, 若 $\forall A_i \in A, \forall B_j \in B$, 满足以下条件:

- 1) $\mu(A_i) \in B$;
- 2) $\mu(B_j) \in A \cup \{B_j\}$;
- 3) $\mu(A_i) = B_j$ 当且仅当 $\mu(B_j) = A_i$;

则称 μ 为双边匹配, 其中 $\mu(A_i) = B_j$ 表示 A_i 与 B_j 在 μ

中匹配, 记为 (A_i, B_j) ; $\mu(B_j)=B_j$ 表示 B_j 与自身匹配, 即 B_j 在 μ 中未匹配, 记为 (B_j, B_j) 。

1.2 三角模糊数

定义 2^[27] 设 $\tilde{a}=[a^l, a^m, a^u]$, 其中 $0 \leq a^l \leq a^m \leq a^u$, a^l 和 a^u 分别为 \tilde{a} 所支撑的上界和下界, a^m 为 \tilde{a} 的中值 (表示区间中取值可能性最大的数), 且隶属函数为

$$\mu_{\tilde{a}}(x) = \begin{cases} 0, & x < a^l, x > a^u; \\ \frac{x-a^l}{a^m-a^l}, & a^l \leq x < a^m; \\ \frac{a^u-x}{a^u-a^m}, & a^m \leq x < a^u; \end{cases} \quad (1)$$

则称 \tilde{a} 为一个三角模糊数。若 \tilde{a} 满足 $0 \leq l \leq a^m \leq d' \leq 1$, 则称 \tilde{a} 为一个规范三角模糊数。如果 \tilde{a} 还满足 $a^l=a^m$ 或 $a^m=a^u$, 则 \tilde{a} 退化为区间数 $[a^l, a^m]$ 或 $[a^m, a^u]$; 特别地, 若 $a^l=a^m=a^u$, 则 \tilde{a} 退化为实数。

定义 3^[28] 设 $m(\tilde{a})$ 为三角模糊数 $\tilde{a}=[a^l, a^m, a^u]$ 的均值, 其计算公式如下:

$$m(\tilde{a}) = [\alpha a^l + a^m + (1-\alpha)a^u] / 2, \quad (2)$$

式中 $0 \leq \alpha \leq 1$, 且 α 值的选择取决于决策者的风险态度。当 $\alpha > 0.5$ 时, 表示决策者是厌恶风险的; 当 $\alpha < 0.5$ 时, 表示决策者是偏好风险的; 当 $\alpha = 0.5$ 时, 表示决策者是风险中立的。

一般地, 决策者持风险中立态度, 这时均值 $m(\tilde{a})$ 和方差 $\sigma^2(\tilde{a})$ 分别为

$$m(\tilde{a}) = (a^l + a^m + 2a^u) / 4, \quad (3)$$

$$\sigma^2(\tilde{a}) = [(a^l - a^m)^2 + 2(a^l - a^u)^2 + 2(a^m - a^u)^2] / 80. \quad (4)$$

定义 4^[29] 记 $\tilde{a}_1 = [a_1^l, a_1^m, a_1^u]$ 和 $\tilde{a}_2 = [a_2^l, a_2^m, a_2^u]$ 为任意两个三角模糊数, 则两者之间大小可按下列规则进行排序:

- 1) 若 $m(\tilde{a}_1) < m(\tilde{a}_2)$, 则 $\tilde{a}_1 < \tilde{a}_2$ 。
- 2) 若 $m(\tilde{a}_1) > m(\tilde{a}_2)$, 则 $\tilde{a}_1 > \tilde{a}_2$ 。
- 3) 若 $m(\tilde{a}_1) = m(\tilde{a}_2)$, 则有当 $\sigma(\tilde{a}_1) < \sigma(\tilde{a}_2)$, 则 $\tilde{a}_1 > \tilde{a}_2$; 当 $\sigma(\tilde{a}_1) > \sigma(\tilde{a}_2)$, 则 $\tilde{a}_1 < \tilde{a}_2$; 当 $\sigma(\tilde{a}_1) = \sigma(\tilde{a}_2)$, 则 $\tilde{a}_1 = \tilde{a}_2$ 。

定义 5^[30] 设 $\tilde{a}=[a^l, a^m, a^u]$ 为一个三角模糊数, 则称

$$h(\mu_{\tilde{a}}(x)) = \begin{cases} 0, & x \leq a^l, x > a^u; \\ 4 \left(\frac{x-a^l}{a^m-a^l} \right) \left(1 - \frac{x-a^l}{a^m-a^l} \right), & a^l \leq x \leq a^m; \\ 4 \left(\frac{a^u-x}{a^u-a^m} \right) \left(1 - \frac{a^u-x}{a^u-a^m} \right), & a^m \leq x \leq a^u; \end{cases} \quad (5)$$

为 \tilde{a} 的熵函数。其中 $\mu_{\tilde{a}}(x)$ 为三角模糊数的隶属函数。

依据文献 [31] 可知, $h(x): [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, $h(x)$ 是元素 x 的熵值函数, 且满足在定义域 $[0, 1/2]$ 上, 函数单调递增; 在定义域 $[1/2, 1]$ 上, 函数单调递减。一般地, 可取 $h(x)=4x(1-x)$ 为熵值函数。另外, 为了确定一个独立于 x 的全局熵度量, 熵函数需要在整个论域中聚合, 三角模糊数 \tilde{a} 的熵表示为 $H(\tilde{a}) = \int_{a^l}^{a^m} h(\mu_{\tilde{a}}(x))p(x)dx = 2p(x)(a^u - a^l)/3$, 其中, $p(x)$ 为区间 $[a^l, a^m]$ 中数据的概率密度函数, 当 $p(x)$ 为均匀概率密度函数时, 具有相同支持度的三角模糊数的隶属函数会使得熵均衡, 故通常假定 $p(x)$ 为常量 s , 于是三角模糊数的熵可简化为

$$H(\tilde{a}) = 2s(a^u - a^l)/3. \quad (6)$$

2 三角模糊数距离测度

2.1 传统三角模糊数距离测度

定义 6^[32] 设 $\tilde{a}_1 = [a_1^l, a_1^m, a_1^u]$ 和 $\tilde{a}_2 = [a_2^l, a_2^m, a_2^u]$ 为任意两个三角模糊数, 称

$$d_1(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2) = |a_1^l - a_2^l| + |a_1^m - a_2^m| + |a_1^u - a_2^u| \quad (7)$$

为三角模糊数 \tilde{a}_1 和 \tilde{a}_2 之间的海明距离。

定义 7^[33] 设 $\tilde{a}_1 = [a_1^l, a_1^m, a_1^u]$ 和 $\tilde{a}_2 = [a_2^l, a_2^m, a_2^u]$ 为任意两个三角模糊数, 称

$$d_2(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2) = \sqrt{\frac{1}{3} [(a_1^l - a_2^l)^2 + (a_1^m - a_2^m)^2 + (a_1^u - a_2^u)^2]} \quad (8)$$

为三角模糊数 \tilde{a}_1 和 \tilde{a}_2 之间的欧氏距离。

海明距离和欧氏距离作为经典的距离测度应用广泛, 但仍存在不足, 因为它们没有考虑决策者的风险偏好问题, 这跟式 (2) 是一样的道理, 但式 (2) 中增加了一个参数 α , 而 α 值的选择取决于决策者的风险态度。例如, 在投资商与风险企业的双边匹配过程中, 投资商与风险企业均具有风险意识, 存在风险规避型、风险偏好型和风险中立型的区别, 故在此类情形下需要对传统的三角模糊距离测度进行改进。鉴于此, 本文提出一种考虑风险偏好的新型三角模糊数距离测度方法。

2.2 新型三角模糊数距离测度

定义 8 设 $\tilde{a}_1 = [a_1^l, a_1^m, a_1^u]$ 和 $\tilde{a}_2 = [a_2^l, a_2^m, a_2^u]$ 为任意两个三角模糊数, 则称

$$d(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2) = \frac{2}{3} \left(\mu \frac{|a_1^l - a_2^l|}{1 + |a_1^l - a_2^l|} + \frac{|a_1^m - a_2^m|}{1 + |a_1^m - a_2^m|} + (1-\mu) \frac{|a_1^u - a_2^u|}{1 + |a_1^u - a_2^u|} \right) \quad (9)$$

为三角模糊数 \tilde{a}_1 和 \tilde{a}_2 之间的新型距离。

式 (9) 中, $\mu \in [0, 1]$ 为决策者的风险态度系数,

反映决策者对风险的偏好程度。当 $\mu > 0.5$ 时, 表明决策者类型为风险规避型, 即更侧重于以模糊数左端点衡量两者之间的距离; 当 $\mu < 0.5$ 时, 表明决策者类型为风险偏好型, 即更侧重于以模糊数右端点衡量两者之间的距离; 当 $\mu = 0.5$ 时, 表明决策者类型为风险中立型, 即决策者会均衡考虑左右端点来衡量两者之间的距离。

下面证明三角模糊数 \tilde{a}_1 和 \tilde{a}_2 之间的新型距离测度 $d(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2)$ 满足下面的公理性条件。

- 1) 非负性: $d(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2) \geq 0$, 当且仅当 $\tilde{a}_1 = \tilde{a}_2$ 、 $d(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2) = 0$;
- 2) 自反性: $d(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2) = d(\tilde{a}_2, \tilde{a}_1)$;
- 3) 三角不等式: $d(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2) \leq d(\tilde{a}_1, \tilde{a}_3) + d(\tilde{a}_3, \tilde{a}_2)$ 。

证明 非负性和自反性显然成立, 故只需证明三角不等式成立。

令函数 $f(x) = x/(1+x)$, 则其导函数 $f'(x) = 1/(1+x)^2 > 0$, 故 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增。

因不等式 $|x-y| \leq |x|+|y|$, 于是有 $f(|x-y|) \leq f(|x|+|y|)$

成立, 即有 $\frac{|x-y|}{1+|x-y|} \leq \frac{|x|+|y|}{1+|x|+|y|}$ 。

又因

$$\frac{|x|+|y|}{1+|x|+|y|} = \frac{|x|}{1+|x|+|y|} + \frac{|y|}{1+|x|+|y|} \leq \frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|},$$

故 $\frac{|x-y|}{1+|x-y|} \leq \frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|}$ 成立。

若令 $a_1^m - a_2^m = x$ 、 $a_2^m - a_3^m = y$, 则

$$\mu \frac{|a_1^m - a_2^m|}{1+|a_1^m - a_2^m|} = \mu \frac{|(a_1^m - a_3^m) - (a_2^m - a_3^m)|}{1+|(a_1^m - a_3^m) - (a_2^m - a_3^m)|} = \mu \frac{|x-y|}{1+|x-y|},$$

于是有

$$\mu \frac{|a_1^m - a_2^m|}{1+|a_1^m - a_2^m|} \leq \mu \frac{|a_1^m - a_3^m|}{1+|a_1^m - a_3^m|} + \mu \frac{|a_2^m - a_3^m|}{1+|a_2^m - a_3^m|}。$$

同理, 有

$$\frac{1-\mu}{2} \left(\frac{|a_1^l - a_2^l|}{1+|a_1^l - a_2^l|} + \frac{|a_1^u - a_2^u|}{1+|a_1^u - a_2^u|} \right) \leq \frac{1-\mu}{2} \left(\frac{|a_1^l - a_3^l|}{1+|a_1^l - a_3^l|} + \frac{|a_2^l - a_3^l|}{1+|a_2^l - a_3^l|} + \frac{|a_1^u - a_3^u|}{1+|a_1^u - a_3^u|} + \frac{|a_2^u - a_3^u|}{1+|a_2^u - a_3^u|} \right),$$

故 $d(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2) \leq d(\tilde{a}_1, \tilde{a}_3) + d(\tilde{a}_3, \tilde{a}_2)$ 得证。因此, 新型三角模糊距离测度满足基本公理性条件。

例 1 设现有两家投资商 A_1 和 A_2 对企业的某一属性具有相同的期望值 $\tilde{a} = [1, 3, 5]$, 但是他们的评价价值分别为 $\tilde{a}_1 = [2, 3, 4]$ 和 $\tilde{a}_2 = [2, 2, 5]$, 利用式 (7),

计算可得 $d_1(\tilde{a}_1, \tilde{a}) = d_1(\tilde{a}_2, \tilde{a}) = 2$, 利用式 (8), 计算可得 $d_2(\tilde{a}_1, \tilde{a}) = d_2(\tilde{a}_2, \tilde{a}) = \sqrt{6}/3$ 。如果考虑决策者的风险态度, 不妨设风险规避型投资商 A_1 的风险态度系数为 0.1, 风险偏好型投资商 A_2 的风险态度系数为 0.6, 则利用三角模糊数新型距离测度式 (9), 计算可得 $d(\tilde{a}_1, \tilde{a}) = 1/3$, $d(\tilde{a}_2, \tilde{a}) = 8/15$, 这时两者是不相同的。实际上, 在决策中考虑决策者的风险态度更加贴近现实。

3 问题描述

考虑三角模糊数信息下属性具有期望水平的多阶段双边匹配问题。设 t 表示决策阶段, $t = 1, 2, \dots, p$, 其相应的阶段权重为 ω_t , 满足 $0 \leq \omega_t \leq 1$, 且

$\sum_{t=1}^p \omega_t = 1$ 。设 $C = \{C_1, C_2, \dots, C_c\}$ 为甲方主体评价乙

方主体的属性集合, 其中 C_l 表示第 l 个评价属性,

$l = 1, 2, \dots, c$; 记 $\mathbf{X}^t = [x_{jl}^t]_{m \times c}$ 为甲方主体对乙方主

体关于属性集 C 在第 t 阶段的评价矩阵, 其中 $x_{jl}^t = [x_{jl}^{tL}, x_{jl}^{tM}, x_{jl}^{tU}]$ 表示甲方主体对乙方主体 B_j 关于属性 C_l 在第 t 阶段的评价值, $j \in J$;

$\mathbf{E}_A^t = [e_{il}^{At}]_{m \times c}$ 为甲方主体对乙方评价属性的阶段期望矩阵, 其中

$e_{il}^{At} = [e_{il}^{AtL}, e_{il}^{AtM}, e_{il}^{AtU}]$ 表示甲方主体 A_i 在第 t 阶段对乙方评价属性 C_l 的期望水平。设 $R = \{R_1, R_2, \dots, R_r\}$ 为乙方主体评价甲方主体的属性集合, 其中 R_s

表示第 s 个属性, $s = 1, 2, \dots, r$; 记 $\mathbf{Y}^t = [y_{is}^t]_{m \times r}$ 为乙

方主体对甲方主体关于属性集 R 在第 t 阶段的评价矩阵, 其中 $y_{is}^t = [y_{is}^{tL}, y_{is}^{tM}, y_{is}^{tU}]$ 表示乙方主体对甲方主体 A_i 关于属性 R_s 在第 t 阶段的评价值, $i \in I$;

$\mathbf{E}_B^t = [e_{js}^{Bt}]_{m \times r}$ 为乙方主体对甲方评价属性的阶段期望矩阵, 其中 e_{js}^{Bt} 表示乙方主体 B_j 在第 t 阶段对甲方评价属性 R_s 的期望水平。此外, $\mathbf{w}^t = \{w_1^t, w_2^t, \dots, w_c^t\}$ 和 $\mathbf{w}'' = \{w_1'', w_2'', \dots, w_r''\}$ 分别为乙方评价属性和甲方评价属性在第 t 阶段的权重向量, w_l^t 表示第 t 阶段乙方评价属性 C_l 的权重, w_s'' 表示第 t 阶段甲方评价属性 R_s 的权重, 且 $w_l^t, w_s'' \in [0, 1]$,

且 $w_l^t, w_s'' \in [0, 1]$,

且 $w_l^t, w_s'' \in [0, 1]$,

且 $w_l^t, w_s'' \in [0, 1]$,

且 $w_l^t, w_s'' \in [0, 1]$,

$$\sum_{l=1}^c w_l^t = 1, \sum_{s=1}^r w_s'' = 1。$$

本文要解决的问题是: 如何在阶段属性权重和阶段权重均未知的情况下, 依据匹配双方提供的三角模

糊数期望矩阵 $E'_A = [e^{At}_{il}]_{m \times c}$ 、 $E'_B = [e^{Bt}_{js}]_{n \times r}$ 及评价矩阵 $X^t = [x^t_{jl}]_{m \times c}$ 、 $Y^t = [y^t_{is}]_{m \times r}$ ，建立多阶段双边匹配模型，进而获得双边匹配结果。

4 匹配决策方法

针对上述问题，考虑决策者风险偏好和匹配阶段的变化，分别给出阶段属性权重和阶段权重的确定方法，在此基础上提出一种基于 TODIM 的多阶段双边匹配决策方法。

4.1 阶段损益值的计算

首先，将双边主体的期望水平和实际评价信息进行规范化。设 I_b 和 I_c 分别为效益型和成本型属性集合，为了解决不同量纲的不可公度性和矛盾性^[32]，利用式(10)和式(11)将甲方的三角模糊数评价信息矩阵 $X^t = [x^t_{jl}]_{m \times c}$ 转化为规范化的三角模糊数矩阵 $U^t = [u^t_{jl}]_{m \times c} = [(u^{tL}_{jl}, u^{tM}_{jl}, u^{tU}_{jl})]_{m \times c}$ 。同理，将乙方的三角模糊数评价信息矩阵 $Y^t = [y^t_{is}]_{m \times r}$ 规范化为 $V^t = [v^t_{is}]_{m \times r}$ ，双方主体阶段属性的期望矩阵 $E'_A = [e^{At}_{il}]_{m \times c}$ 和 $E'_B = [e^{Bt}_{js}]_{n \times r}$ 分别规范化为 $\tilde{E}'_A = [\tilde{e}^{At}_{il}]_{m \times c}$ 和 $\tilde{E}'_B = [\tilde{e}^{Bt}_{js}]_{n \times r}$ 。

$$\begin{cases} u^{tL}_{jl} = x^{tL}_{jl} / \sqrt{\sum_{j=1}^n (x^{tL}_{jl})^2}, \\ u^{tM}_{jl} = x^{tM}_{jl} / \sqrt{\sum_{j=1}^n (x^{tM}_{jl})^2}, C_l \in I_b, \\ u^{tU}_{jl} = x^{tU}_{jl} / \sqrt{\sum_{j=1}^n (x^{tU}_{jl})^2}, \end{cases} \quad (10)$$

$$\begin{cases} u^{tL}_{jl} = (1/x^{tL}_{jl}) / \sqrt{\sum_{j=1}^n (1/x^{tL}_{jl})^2}, \\ u^{tM}_{jl} = (1/x^{tM}_{jl}) / \sqrt{\sum_{j=1}^n (1/x^{tM}_{jl})^2}, C_l \in I_c, \\ u^{tU}_{jl} = (1/x^{tU}_{jl}) / \sqrt{\sum_{j=1}^n (1/x^{tU}_{jl})^2}, \end{cases} \quad (11)$$

其次，由于决策者的认知偏差和心理偏好等因素对利益和损失具有不同的主观态度^[34]，为了反映不同阶段决策者们的风险规避情况，单边决策者在区间 $[0, 1]$ 中给出根据不同阶段的风险态度系数，利用求取单边风险态度系数均值作为单边风险系数 μ ，并利用新型距离计算阶段损益值。

下面以第 t 阶段的 A_i 和 B_j 为例分别给出损益值计算方法。设 x'_{ijl} 是第 t 阶段甲方主体 A_i 对乙方主体

B_j 关于属性 C_l 的实际评价价值 μ'_{ijl} 相对于期望水平 \tilde{e}^{At}_{il} 的损益值，其计算公式为

$$x'_{ijl} = \begin{cases} d(\tilde{e}^{At}_{il}, u'_{ijl}), \tilde{e}^{At}_{il} \leq u'_{ijl}; \\ -d(\tilde{e}^{At}_{il}, u'_{ijl}), \tilde{e}^{At}_{il} > u'_{ijl}. \end{cases} \quad (12)$$

式中： $i=1, 2, \dots, m, j=1, 2, \dots, n, l=1, 2, \dots, c, t=1, 2, \dots, p$ 。

式(12)中，对于主体 A_i 而言，当 $\tilde{e}^{At}_{il} \leq u'_{ijl}$ 时， x'_{ijl} 表示收益；当 $\tilde{e}^{At}_{il} > u'_{ijl}$ 时， x'_{ijl} 表示损失。

记 y'_{ijs} 为在第 t 阶段乙方主体 B_j 对甲方主体 A_i 关于属性 R_s 的实际评价价值 v'_{ijs} 相对于期望水平 \tilde{e}^{Bt}_{js} 的损益值，其计算公式为

$$y'_{ijs} = \begin{cases} d(v'_{ijs}, \tilde{e}^{Bt}_{js}), v'_{ijs} \geq \tilde{e}^{Bt}_{js}; \\ -d(v'_{ijs}, \tilde{e}^{Bt}_{js}), v'_{ijs} < \tilde{e}^{Bt}_{js}. \end{cases} \quad (13)$$

式中： $i=1, 2, \dots, m, j=1, 2, \dots, n, l=1, 2, \dots, c, t=1, 2, \dots, p$ 。

式(13)中，对于主体 B_j 而言，当 $\tilde{e}^{Bt}_{js} \leq v'_{ijs}$ 时， y'_{ijs} 表示收益；当 $\tilde{e}^{Bt}_{js} > v'_{ijs}$ 时， y'_{ijs} 表示损失。

4.2 阶段加权损益值的计算

4.2.1 利用综合熵值确定阶段属性权重

在不同阶段的匹配过程中，对于匹配主体而言匹配目标的属性重要性程度是存在差异的，应赋予不同的阶段属性权重。下面基于 TOPSIS (technique for order preference by similarity to an ideal solution) 法思想和极差变换法，考虑不同主体和不同阶段对属性的影响，结合综合熵值信息，给出阶段属性权重的具体计算过程。

首先，从主体角度来看，第 t 阶段内的主体熵值正负理想点 $H^+(u'_i)$ 和 $H^-(u'_i)$ 如下：

$$H^+(u'_i) = \min\{H(u'_{1l}), H(u'_{2l}), \dots, H(u'_{nl})\}, \quad (14)$$

$$H^-(u'_i) = \max\{H(u'_{1l}), H(u'_{2l}), \dots, H(u'_{nl})\}, \quad (15)$$

则利用极差变换法，计算主体角度上在不同阶段的属性 C_l 的信息确定程度，为

$$C^t_{jl} = \frac{H(u'_{ijl}) - H^-(u'_i)}{H^+(u'_i) - H^-(u'_i)}. \quad (16)$$

另外，从阶段角度来看，第 j 个匹配主体的阶段熵值正负理想点 $H^+(u_{ijl})$ 和 $H^-(u_{ijl})$ 如下：

$$H^+(u_{ijl}) = \min\{H(u^1_{ijl}), H(u^2_{ijl}), \dots, H(u^p_{ijl})\}, \quad (17)$$

$$H^-(u_{ijl}) = \max\{H(u^1_{ijl}), H(u^2_{ijl}), \dots, H(u^p_{ijl})\}, \quad (18)$$

则利用极差变化法, 计算阶段角度上在不同阶段的属性 C_l 的信息确定程度, 为

$$\bar{C}_{jl}^t = [H(u_{jl}^t) - H^-(u_{jl})] / [H^+(u_{jl}) - H^-(u_{jl})]. \quad (19)$$

由式(16)和式(19)可以得知, 规范化后的熵值越高, 阶段角度或者主体角度在不同阶段中的信息确定程度越低; 反之, 规范化后的熵值越低, 阶段角度或者主体角度在不同阶段中的信息确定程度越高。此时同时考虑所评价属性在阶段角度和主体角度的变化情况, 在两者的基础上构建综合熵值 H_{jl}^t , 即第 t 阶段甲方主体对乙方主体 B_j 关于匹配属性 C_l 的综合信息熵为

$$H_{jl}^t = 1 - [\sigma C_{jl}^t + (1 - \sigma) \bar{C}_{jl}^t], \quad (20)$$

式中: 系数 σ 和 $(1 - \sigma)$ 为相对重要程度, 可以用来调节阶段角度和主体角度对阶段属性的影响。当 $\sigma \geq 0.5$ 时, 侧重匹配主体维度上的变化对阶段属性的影响。当 $0 \leq \sigma \leq 0.5$ 时, 侧重阶段维度上的变化对阶段属性的影响。在实际匹配中, 根据不同的现实需求和条件, 给出不同的 σ 值, 本文取 $\sigma = 0.5$ 。

然后, 乙方阶段属性权重 w_l^t 的确定应尽可能使得综合熵值最小, 因此建立如下非线性阶段属性权重优化模型:

$$\begin{cases} \min \sum_{l=1}^c (w_l^t)^2 H_l^t = \sum_{l=1}^c (w_l^t)^2 \left(\sum_j^n H_{jl}^t \right), \\ \text{s.t. } \sum_{l=1}^c w_l^t = 1. \end{cases} \quad (21)$$

构建如下拉格朗日函数:

$$L(w_l^t, \eta) = \sum_{l=1}^c (w_l^t)^2 H_l^t + 2\eta \left(\sum_{l=1}^c w_l^t - 1 \right), \quad (22)$$

令

$$\begin{cases} \frac{\partial L(w_l^t, \eta)}{\partial w_l^t} = 2w_l^t H_l^t + 2\eta = 0, \\ \frac{\partial L(w_l^t, \eta)}{\partial \eta} = 2 \left(\sum_{l=1}^c w_l^t - 1 \right) = 0, \end{cases} \quad (23)$$

解方程组, 得到乙方阶段属性权重 w_l^t ($l=1, 2, \dots, c, t=1, 2, \dots, p$):

$$w_l^t = (H_l^t)^{-1} / \sum_{l=1}^c (H_l^t)^{-1} = \left(\sum_{j=1}^n H_{jl}^t \right)^{-1} / \sum_{l=1}^c \left(\sum_{j=1}^n H_{jl}^t \right)^{-1}. \quad (24)$$

类似地, 求解甲方评价信息的综合熵值 H_s^t , 得到甲方阶段属性权重 w_s^t ($s=1, 2, \dots, r, t=1, 2, \dots, p$), 即有

$$w_s^t = \left(\sum_{i=1}^m H_{is}^t \right)^{-1} / \sum_{s=1}^r \left(\sum_{i=1}^m H_{is}^t \right)^{-1}. \quad (25)$$

4.2.2 利用阶段属性权重计算阶段加权损益值

多阶段双边匹配中, 由于决策者对不同阶段的属性偏好存在差异, 可使用加权损益值融合决策者的偏好差异^[35]。设第 t 阶段甲方主体 A_i 对乙方主体 B_j 关于属性 C_l 的实际评价值 μ_{ij}^t 相对于期望水平 \tilde{e}_{ij}^{dt} 的加权损益值为 x_{ij}^t , 利用公式

$$x_{ij}^t = \sum_{l=1}^c w_l^t x_{ijl}^t \quad (26)$$

计算甲方加权损益值, 并构造甲方加权损益矩阵 $D_A^t = [x_{ij}^t]_{m \times n}$ 。式(26)中, w_l^t 为第 t 阶段甲方主体对乙方主体关于属性 C_l 的阶段属性权重, x_{ijl}^t 为式(12)计算的甲方损益值。

类似地, 记第 t 阶段乙方主体 B_j 对甲方主体 A_i 关于属性 R_s 的实际评价值 v_{js}^t 相对于期望水平 \tilde{e}_{js}^{bt} 的加权损益值为 y_{ij}^t , 利用公式

$$y_{ij}^t = \sum_{s=1}^r w_s^t y_{ijs}^t \quad (27)$$

计算乙方加权损益值, 并构造乙方加权损益矩阵 $D_B^t = [y_{ij}^t]_{m \times n}$ 。式(27)中, w_s^t 为第 t 阶段乙方主体对甲方主体关于属性 R_s 的阶段属性权重, y_{ijs}^t 为式(13)计算的乙方损益值。

4.3 总体优势度矩阵的构建

首先, 通过一方主体将另一方中的主体两两对比, 构造优势度函数, 计算每个主体相对于其他主体的总体优势度。设第 t 阶段时, 乙方主体 B_j 将甲方主体 A_i 相对于 A_h 进行比较, 则 A_i 相对于 A_h 的优势度 $\phi_j^t(A_i, A_h)$ 为

$$\phi_j^t(A_i, A_h) = \begin{cases} \sqrt{x_{ij}^t - x_{ih}^t}, & x_{ij}^t \geq x_{ih}^t; \\ -\frac{1}{\theta_j} \sqrt{x_{ih}^t - x_{ij}^t}, & x_{ij}^t < x_{ih}^t. \end{cases} \quad (28)$$

式中, θ_j ($\theta_j > 0$) 为损失衰减系数, 表示乙方主体 B_j 的损失规避程度, θ_j 越小则乙方主体的损失规避程度越大。

类似地, 在第 t 阶段时, 甲方主体 A_i 将乙方主体 B_j 相对于 $B_{h'}$ 进行比较, B_j 相对于 $B_{h'}$ 的总体优势度 $\phi_i^t(B_j, B_{h'})$ 为

$$\phi_i^t(B_j, B_{h'}) = \begin{cases} \sqrt{y_{ij}^t - y_{ih'}^t}, & y_{ij}^t \geq y_{ih'}^t; \\ -\frac{1}{\theta_i'} \sqrt{y_{ih'}^t - y_{ij}^t}, & y_{ij}^t < y_{ih'}^t. \end{cases} \quad (29)$$

式中, θ_i' ($\theta_i' > 0$) 为损失衰减系数, 表示甲方主体 A_i

的损失规避程度, θ'_i 越小, 甲方主体的损失规避程度越大。

其次, 确定阶段时间权重。与单阶段静态匹配决策相比, 多阶段双边匹配决策问题需考虑多个阶段匹配主体的期望水平及评价信息, 不同阶段匹配主体掌握的信息量存在差异, 这也导致不同阶段具有不同的时间权重。现有确定时间权重的主要方法有 BUM (basic unit-interval monotonic function) 法^[36]、衰减法^[37]和厚古薄今法^[38]等。由于匹配主体掌握的信息量随着时间阶段的后移而增加, 匹配阶段具有随着时间的前移对最终匹配阶段的影响不断衰减的特点, 因此毛军军等^[37]在指数衰减模型的基础上提出了一种衰减法, 本文采用这种方法确定时间阶段权重, 具体的方法如下。

设 $T=\{T_1, T_2, \dots, T_p\}$ 为多阶段双边匹配的不同时段 ($T_1 < T_2 < \dots < T_p$), ω_t 为第 T_t 阶段的权重, 则

$$\omega_t = C_0 e^{\lambda(T_t - T_p)}, \quad (30)$$

式中: C_0 为大于 0 的常数; λ 为衰减系数, 并且满足 $0 < \lambda < 1$ 。

由于阶段时间权重 $\sum_{t=1}^p \omega_t = \sum_{t=1}^p C_0 e^{\lambda(T_t - T_p)} = 1$, 解得

$$C_0 = 1 / \sum_{t=1}^p e^{\lambda(T_t - T_p)}, \text{ 代入式 (30), 得}$$

$$\omega_t = e^{\lambda(T_t - T_p)} / \sum_{t=1}^p e^{\lambda(T_t - T_p)}, \quad t = 1, 2, \dots, p. \quad (31)$$

特别地, 当 $T=\{1, 2, \dots, p\}$ 时, 式 (31) 可以转化为式 (32):

$$\omega_t = [e^{\lambda t} (1 - e^{-\lambda})] / [e^{\lambda} (1 - e^{-\lambda p})]. \quad (32)$$

在实际的多阶段双边匹配决策过程中, 衰减系数 λ 反映了决策者掌握的信息量随着时间变化的累积速率, 故决策者可以依据不同时段的信息变化情况确定衰减系数, 本文 λ 取 0.5^[37]。

再次, 利用阶段时间权重对双边信息进行集结。设 δ_{ij} 表示 t 个阶段中甲方主体 A_i 与乙方主体 B_j 匹配时相对于与甲方其他主体的总体优势度, 其计算式为

$$\delta_{ij} = \sum_{t=1}^p \sum_{h=1, h \neq i}^m \varphi'_j(A_i, A_h) \omega_t, \quad (33)$$

从而得到甲方主体 A_i 与乙方主体 B_j 匹配的总优势度矩阵 $\delta = [\delta_{ij}]_{m \times n}$ 。其中, ω_t 表示第 t 阶段的阶段权重, 满足 $\omega_t \in [0, 1]$, 且 $\sum_{t=1}^p \omega_t = 1$ 。

设 γ_{ij} 为 t 个阶段中乙方主体 B_j 与甲方主体 A_i 相匹配时, 相对于甲方其他主体的总体优势度, 其计算公

式如下:

$$\gamma_{ij} = \sum_{t=1}^p \sum_{h'=1, h' \neq j}^n \phi'_i(B_j, B_{h'}) \omega_t, \quad (34)$$

从而得到乙方主体 B_j 与甲方主体 A_i 匹配的总优势度矩阵 $\gamma = [\gamma_{ij}]_{m \times n}$ 。

4.4 满意度矩阵的构建

根据极差变化法, 利用式 (35) 和式 (36) 将综合优势度矩阵 $\delta = [\delta_{ij}]_{m \times n}$ 和 $\gamma = [\gamma_{ij}]_{m \times n}$ 分别转化为满意度矩阵 $\alpha = [\alpha_{ij}]_{m \times n}$ 和 $\beta = [\beta_{ij}]_{m \times n}$ 。

$$\alpha_{ij} = \frac{\delta_{ij} - \min_{i \in I, j \in J} \{\delta_{ij}\}}{\max_{i \in I, j \in J} \{\delta_{ij}\} - \min_{i \in I, j \in J} \{\delta_{ij}\}}, \quad i \in I, j \in J, \quad (35)$$

$$\beta_{ij} = \frac{\gamma_{ij} - \min_{i \in I, j \in J} \{\gamma_{ij}\}}{\max_{i \in I, j \in J} \{\gamma_{ij}\} - \min_{i \in I, j \in J} \{\gamma_{ij}\}}, \quad i \in I, j \in J, \quad (36)$$

式 (35) (36) 中: α_{ij} 是主体 A_i 对于主体 B_j 多阶段匹配的总满意度; β_{ij} 是主体 B_j 对于主体 A_i 多阶段匹配的总满意度, $\alpha_{ij}, \beta_{ij} \in [0, 1]$ 。

4.5 匹配模型的构建与求解

首先, 根据双边主体综合满意度矩阵考虑建立多阶段多属性双边匹配的多目标优化模型。设 X_{ij} 为 0~1 变量, 当 $X_{ij}=1$ 时, 主体 A_i 和 B_j 达成匹配; 当 $X_{ij}=0$ 时, 主体 A_i 和 B_j 未达成匹配, 以双方满意度最大化为目标, 建立下列多目标优化模型:

$$\max Z_1 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} X_{ij}. \quad (37)$$

$$\max Z_2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \beta_{ij} X_{ij}, \quad (38)$$

$$\text{s.t. } \sum_{i=1}^m X_{ij} \leq 1, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (39)$$

$$\sum_{j=1}^n X_{ij} \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (40)$$

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n X_{ij} = \min\{m, n\}. \quad (41)$$

在上方模型中, 式 (37) 表示甲方主体满意度总和最大, 式 (38) 表示乙方主体满意度总和最大; 式 (39) 表示主体 A_i 至多与乙方中一个主体匹配, 式 (40) 表示主体 B_j 至多与甲方中的一个主体匹配; 式 (41) 为双边匹配的成功匹配数量约束条件。模型中目标函数的量纲量级相同, 利用线性加权法将多目标模型转化为下列单目标模型:

$$\max Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (\alpha_{ij} w_1 + \beta_{ij} w_2) X_{ij}, \quad (42)$$

s.t. (39) ~ (41)。

式(42)中, w_1 和 w_2 分别为目标函数 Z_1 和 Z_2 的权系数, 且满足 $w_1+w_2=1, 0 \leq w_1, w_2 \leq 1$ 。

4.6 匹配方法的具体步骤

综上所述, 基于 TODIM 方法的多阶段双边匹配方法的具体步骤如下。

步骤 1 利用式 (10) 和 (11) 将双方期望和评价规范化, 得到矩阵 $U^t = [u'_{ij}]_{m \times c}$ 、 $V^t = [v'_{is}]_{m \times r}$ 、 $\tilde{E}'_A = [\tilde{e}'_{il}]_{m \times c}$ 和 $\tilde{E}'_B = [\tilde{e}'_{js}]_{m \times r}$ 。

步骤 2 利用式 (12) 和 (13), 考虑不同阶段甲乙双方的风险态度系数, 分别计算甲、乙双方的损益值。

步骤 3 利用式 (14) ~ (20) 计算出综合熵值 H'_i 和 H'_s , 再利用式 (24) 和 (25) 分别求得甲、乙双方在每个阶段中的属性权重 w'_i 和 w'_s 。

步骤 4 根据式 (26) 和 (27), 结合阶段属性权重构建加权损益矩阵 $D'_A = [x'_{ij}]_{m \times n}$ 和 $D'_B = [y'_{ij}]_{m \times n}$ 。

步骤 5 利用式 (30) ~ (32), 本文衰减系数取 0.5, 计算得到阶段权重 $\omega_t (t=1, 2, \dots, p)$ 。

步骤 6 利用式 (33) 和 (34) 分别构建甲、乙双方主体的综合优势度矩阵 $\delta = [\delta_{ij}]_{m \times n}$ 和 $\gamma = [\gamma_{ij}]_{m \times n}$ 。

步骤 7 利用式 (35) 和 (36) 构建甲、乙各方满意度矩阵 $\alpha = [\alpha_{ij}]_{m \times n}$ 和 $\beta = [\beta_{ij}]_{m \times n}$ 。

步骤 8 构建多目标匹配优化模型 (37) ~ (41)。

继而利用线性加权的方法将多目标模型转化为单目标优化模型 (42), 并通过 Lingo11.0 软件求解, 获得最优的多阶段匹配方案。

5 算例分析

5.1 算例

考虑一个风险投资商和风险企业之间的多阶段匹配问题。深圳某商务交易所所有 3 家风险投资商 A_1, A_2, A_3 想要招标为期 3 a 的企业进行投资 ($t=1, 2, 3$), 交易所内现有 4 家风险企业 B_1, B_2, B_3, B_4 可以竞选投资, 且每家企业仅能接受一家投资商。投资商所考虑的投资属性包括投资回报率 C_1 、风险规避能力 C_2 、市场的可进入性 C_3 和企业家素质 C_4 , 并给出相应的期望水平 $E'_A = [e'_{il}]_{3 \times 3}$ (见表 1) 和具体的客观属性评价 $X^t = [x'_{ij}]_{4 \times 3}$ (见表 2)。风险企业考虑的属性包括投资额度 R_1 、投资成功率 R_2 、信誉 R_3 、投资实力 R_4 , 企业的期望水平为 $E'_B = [e'_{js}]_{4 \times 3}$ (见表 3), 基于企业考虑的评价属性对投资商进行客观评价, 评价矩阵为 $Y^t = [y'_{is}]_{3 \times 3}$ (见表 4)。根据以上属性对 2018—2020 年度投资商和风险企业的运作双方进行综合评价和数据统计, 并给出彼此主体三角模糊评价及期望信息。本文采用的三角模糊数范围为 0~1, 表 1 和表 3 为风险企业和投资商在多阶段匹配过程中的阶段属性期望值, 表 2 和表 4 所示为风险企业和投资商之间的阶段属性评价。

表 1 投资商对风险企业的属性期望矩阵 $E'_A = [e'_{il}]_{3 \times 3}$

Table 1 Investor attribute expectation matrix for venture enterprises with $E'_A = [e'_{il}]_{3 \times 3}$

阶段 属性	T_1			T_2			T_2		
	C_1	C_2	C_3	C_1	C_2	C_3	C_1	C_2	C_3
A_1	[0.8, 0.8, 1]	[0.1, 0.4, 0.6]	[0.1, 0.3, 0.3]	[0.7, 0.8, 1]	[0.4, 0.4, 0.7]	[0.2, 0.3, 0.3]	[0.8, 0.8, 0.8]	[0.3, 0.4, 0.6]	[0.5, 0.5, 0.7]
A_2	[0.2, 0.3, 0.5]	[0.6, 0.9, 1]	[0.7, 0.7, 0.9]	[0.1, 0.2, 0.2]	[0.9, 0.9, 1]	[0.2, 0.5, 0.5]	[0.2, 0.2, 0.3]	[0.5, 0.7, 0.7]	[0.3, 0.4, 0.4]
A_3	[0.8, 0.9, 0.9]	[0.3, 0.5, 0.7]	[0.2, 0.5, 0.7]	[0.2, 0.6, 0.6]	[0.4, 0.5, 0.7]	[0.3, 0.3, 0.5]	[0.7, 0.7, 0.9]	[0.5, 0.6, 0.8]	[0.3, 0.3, 0.5]

表 2 投资商对风险企业的属性评价矩阵 $X^t = [x'_{ij}]_{4 \times 3}$

Table 2 Investor attribute evaluation matrix for venture enterprises with $X^t = [x'_{ij}]_{4 \times 3}$

阶段 属性	T_1			T_2			T_2		
	C_1	C_2	C_3	C_1	C_2	C_3	C_1	C_2	C_3
B_1	[0.5, 0.5, 0.6]	[0.1, 0.4, 0.4]	[0.3, 0.3, 0.3]	[0.4, 0.5, 0.6]	[0.3, 0.6, 0.6]	[0.2, 0.2, 0.3]	[0.2, 0.3, 0.4]	[0.2, 0.2, 0.3]	[0.5, 0.7, 0.8]
B_2	[0.2, 0.3, 0.4]	[0.4, 0.6, 0.6]	[0.5, 0.8, 0.9]	[0.5, 0.6, 0.7]	[0.2, 0.4, 0.5]	[0.7, 0.7, 0.8]	[0.5, 0.6, 0.6]	[0.3, 0.5, 0.6]	[0.2, 0.3, 0.3]
B_3	[0.1, 0.1, 0.1]	[0.2, 0.4, 0.5]	[0.7, 0.7, 0.9]	[0.8, 0.9, 1]	[0.5, 0.6, 0.7]	[0.2, 0.5, 0.8]	[0.4, 0.4, 0.7]	[0.1, 0.3, 0.4]	[0.2, 0.5, 0.5]
B_4	[0.3, 0.5, 0.6]	[0.5, 0.5, 0.6]	[0.4, 0.5, 0.6]	[0.3, 0.6, 0.6]	[0.4, 0.4, 0.4]	[0.5, 0.5, 0.6]	[0.6, 0.8, 0.8]	[0.7, 0.7, 0.7]	[0.3, 0.4, 0.4]

表3 风险企业对投资商的属性期望矩阵 $E'_B = [e^{B'_j}]_{4 \times 3}$

Table 3 Investor attribute expectation matrix for venture enterprises with $E'_B = [e^{B'_j}]_{4 \times 3}$

阶段 属性	T_1			T_2			T_2		
	R_1	R_2	R_3	R_1	R_2	R_3	R_1	R_2	R_3
B_1	[0.2, 0.2, 0.2]	[0.3, 0.4, 0.6]	[0.6, 0.7, 0.8]	[0.1, 0.1, 0.3]	[0.5, 0.5, 0.6]	[0.1, 0.4, 0.7]	[0.3, 0.3, 0.6]	[0.5, 0.6, 0.7]	[0.3, 0.6, 0.6]
B_2	[0.5, 0.7, 0.7]	[0.2, 0.2, 0.3]	[0.3, 0.5, 0.6]	[0.5, 0.6, 0.6]	[0.2, 0.5, 0.6]	[0.2, 0.2, 0.2]	[0.2, 0.3, 0.3]	[0.4, 0.5, 0.6]	[0.4, 0.4, 0.6]
B_3	[0.3, 0.4, 0.5]	[0.4, 0.5, 0.7]	[0.1, 0.1, 0.2]	[0.4, 0.7, 0.8]	[0.3, 0.4, 0.5]	[0.4, 0.5, 0.6]	[0.4, 0.4, 0.4]	[0.2, 0.5, 0.6]	[0.4, 0.5, 0.5]
B_4	[0.6, 0.6, 0.8]	[0.2, 0.4, 0.6]	[0.1, 0.1, 0.5]	[0.5, 0.5, 0.5]	[0.7, 0.8, 0.9]	[0.5, 0.5, 0.5]	[0.5, 0.6, 0.6]	[0.3, 0.6, 0.6]	[0.6, 0.6, 0.7]

表4 风险企业对投资商的属性评价矩阵 $Y' = [y'_{is}]_{3 \times 3}$

Table 4 Investor attribute evaluation matrix for venture enterprises with $Y' = [y'_{is}]_{3 \times 3}$

阶段 属性	T_1			T_2			T_2		
	R_1	R_2	R_3	R_1	R_2	R_3	R_1	R_2	R_3
A_1	[0.2, 0.4, 0.4]	[0.5, 0.5, 0.6]	[0.2, 0.6, 0.6]	[0.7, 0.7, 0.8]	[0.7, 0.8, 0.9]	[0.4, 0.5, 0.6]	[0.2, 0.4, 0.5]	[0.4, 0.5, 0.6]	[0.5, 0.5, 0.6]
A_2	[0.4, 0.5, 0.5]	[0.4, 0.5, 0.6]	[0.5, 0.6, 0.7]	[0.4, 0.4, 0.6]	[0.4, 0.5, 0.7]	[0.2, 0.5, 0.5]	[0.3, 0.4, 0.5]	[0.7, 0.8, 0.9]	[0.1, 0.2, 0.3]
A_3	[0.3, 0.6, 0.6]	[0.5, 0.6, 0.7]	[0.2, 0.5, 0.5]	[0.5, 0.6, 0.6]	[0.5, 0.6, 0.6]	[0.4, 0.5, 0.6]	[0.5, 0.6, 0.6]	[0.6, 0.6, 0.7]	[0.2, 0.3, 0.4]

采用本文所提多阶段双边匹配决策方法进行求解。首先，由于算例中所有属性都是效益型且评价范围在 0 和 1 之间，因此不需规范化处理；然后，根据步骤 2 确定阶段属性权重（见表 5 和 6），依据步骤 3 考虑不同阶段下决策者的风险态度（投资商 3 a 的风险态度系数分别为 0.6, 0.2, 0.4；企业 3 a 的风险态度系数分别为 0.2, 0.5, 0.8）计算损益值，并构建加权损益矩阵；根据步骤 4 计算阶段权重（ $w_1=0.1863$ 、 $w_2=0.3072$ 、 $w_3=0.5065$ ）；根据步骤 5 构建投资商和风险企业的综合优势度（见表 7 和 8），其中， $\theta_j = \theta'_j = 2.25$ ^[39]。根据步骤 6 计算双方综合满意度（见表 9 和 10），依据式 (37)~(41) 构建投资双方满意度最大的多目标优化匹配模型，并利用式 (42) 进一步转化为单目标模型（为保证公平，取权重系数 $w_1=w_2=0.5$ ），运用 Lingo11.0 软件求解得 $X_{13}=X_{22}=X_{34}=1$ ，剩余 $X_{ij}=0$ 。

表5 投资商的阶段属性权重 $[w'_s]_{3 \times 3}$

Table 5 Investor stage attribute weight value of $[w'_s]_{3 \times 3}$

阶段属性权重	T_1	T_2	T_3
R_1	0.163 6	0.121 7	0.155 3
R_2	0.163 6	0.141 0	0.197 9
R_3	0.172 7	0.137 3	0.146 8

表6 企业的阶段属性权重 $[w'_f]_{3 \times 3}$

Table 6 Corporate stage attribute weight value of $[w'_f]_{3 \times 3}$

阶段属性权重	T_1	T_2	T_3
C_1	0.366 7	0.250 0	0.317 1
C_2	0.266 7	0.250 0	0.292 7
C_3	0.166 7	0.500 0	0.390 2

表7 企业相对优势度 $[\phi'_i(B_j, B'_j)]_{3 \times 6 \times 3}$

Table 7 Corporate relative dominance value of $[\phi'_i(B_j, B'_j)]_{3 \times 6 \times 3}$

T_1	(B_1, B_2)	(B_1, B_3)	(B_1, B_4)	(B_2, B_3)	(B_2, B_4)	(B_3, B_4)
A_1	-0.170 3	-0.122 4	-0.151 5	0.266 3	0.174 9	-0.089 2
A_2	-0.101 1	0.095 4	-0.118 8	0.246 6	-0.062 4	-0.126 1
A_3	-0.207 6	-0.150 3	-0.185 9	0.322 3	0.208 1	-0.109 4
T_2	(B_1, B_2)	(B_1, B_3)	(B_1, B_4)	(B_2, B_3)	(B_2, B_4)	(B_3, B_4)
A_1	-0.101 1	0.095 4	-0.118 8	0.246 6	-0.062 4	-0.126 1
A_2	-0.214 1	-0.222 5	-0.166 5	-0.060 6	0.302 7	0.332 0
A_3	-0.219 1	-0.251 7	-0.165 3	-0.123 9	0.323 6	0.427 1
T_3	(B_1, B_2)	(B_1, B_3)	(B_1, B_4)	(B_2, B_3)	(B_2, B_4)	(B_3, B_4)
A_1	0.150 3	0.221 1	-0.162 9	0.162 2	-0.176 1	-0.190 3
A_2	0.174 9	0.009 2	-0.155 5	-0.066 1	-0.173 8	-0.160 8
A_3	0.180 0	0.146 6	-0.175 9	-0.046 4	-0.193 3	-0.187 6

表8 投资商相对优势度 $[\phi'_j(A_i, A'_i)]_{4 \times 3 \times 3}$

Table 8 Investor relative dominance value of $[\phi'_j(A_i, A'_i)]_{4 \times 3 \times 3}$

T_1	(A_1, A_2)	(A_1, A_3)	(A_2, A_3)
B_1	-0.099 8	-0.116 9	-0.060 9
B_2	-0.131 2	-0.134 4	-0.028 8
B_3	-0.067 1	-0.115 7	-0.094 3
B_4	-0.099 2	-0.125 9	-0.077 6
T_2	(A_1, A_2)	(A_1, A_3)	(A_2, A_3)
B_1	-0.131 2	-0.134 4	-0.028 8
B_2	0.467 5	0.348 7	-0.138 4
B_3	0.454 1	0.372 2	-0.115 6
B_4	0.505 3	0.350 9	-0.160 5
T_3	(A_1, A_2)	(A_1, A_3)	(A_2, A_3)
B_1	0.301 2	0.153 9	-0.115 0
B_2	0.251 2	0.141 1	-0.092 4
B_3	0.262 7	0.095 4	-0.108 8
B_4	0.252 0	0.160 6	-0.186 3

表 9 投资商综合满意度矩阵 $\alpha = [\alpha_{ij}]_{3 \times 4}$
Table 9 Investor comprehensive satisfaction matrix

with $\alpha = [\alpha_{ij}]_{3 \times 4}$

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	0.654 5	0.946 8	1.000 0	0
A_2	0.405 8	0.666 5	0.658 8	0.388 0
A_3	0.281 1	0.726 0	0.651 9	0.466 7

表 10 企业综合满意度矩阵 $\beta = [\beta_{ij}]_{3 \times 4}$
Table 10 Corporate comprehensive satisfaction matrix

with $\beta = [\beta_{ij}]_{3 \times 4}$

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	0.349 0	0.940 2	0.942 4	1.000 0
A_2	0.159 8	0.436 6	0.437 0	0.446 2
A_3	0	0.248 4	0.195 7	0.247 0

通过求解，确定最优的多阶段匹配方案如下：投资商 A_1 与企业 B_3 匹配，投资商 A_2 与企业 B_2 匹配，投资商 A_3 与企业 B_4 匹配。

5.2 比较分析

为了突出本文所提出的双边匹配方法的有效性和合理性，使用文献 [40] 的方法对上述双边匹配的第一阶段进行求解。为保证信息一致，使用三角模糊数及其欧式距离进行计算。其中，由于对比的是单阶段的双边匹配，不考虑阶段变化的影响，因此忽略阶段权重，且属性权重与第一阶段属性权重保持一致。其次，本文算例为一对一匹配，故匹配数目约束条件与本文保持一致。当不考虑匹配公平性时，匹配结果为 $\{(A_1, B_3), (A_2, B_2), (A_3, B_4)\}$ ，与本文不考虑阶段权重的单阶段双边匹配结果完全相同，验证了本文所提方法的合理性。进一步分析可知，文献 [40] 只能应用于单阶段的双边匹配之中，无法解决多阶段的双边匹配问题，证明本文方法的适用性更加广泛。

6 结论

本文针对多阶段情形下的三角模糊数双边匹配决策问题，考虑主体损失规避和匹配阶段变化，提出了一种基于 TODIM 的多阶段双边匹配方法。首先，定义了三角模糊数的新型距离测度。在此基础上，利用三角模糊数的新型距离计算期望水平与评价信息之间的损益矩阵，利用三角模糊数的综合熵值构建优化模型求取阶段属性权重，利用衰减法计算阶段时间权重，利用 TODIM 方法构建综合优势度矩阵，利用极差变化法构建满意度矩阵。进一步，通过构建匹配优化模型得到双边匹配结果。最后，利用投资商和企业为期 3 a 的招标算例分析，说明了所提出匹配决策

方法的有效性和合理性。综合来看，本文贡献如下：

- 1) 本文方法思路清晰，操作方便，易于实现，为匹配决策问题提供了一条新途径。
- 2) 所定义的三角模糊数的新型距离测度考虑了决策者的风险态度，适应面广，为决策者提供了更多选择。
- 3) 综合考虑不同主体和阶段对匹配属性的影响，在三角模糊熵、TOPSIS 思想和极差变换法方法融合的基础上构建优化模型，进而确定阶段属性权重，思路合理，避免了权重求取的主观性。
- 4) 考虑不同阶段情形，并依据衰减法计算阶段时间权重，体现了新信息优先原则，更符合实际。
- 5) 利用 TODIM 方法计算优势度，发挥了两两比较的优势，避免了选取参照点，为同类问题提供了一种新思路。

参考文献:

- [1] GALE D, SHAPLEY L S. College Admissions and the Stability of Marriage[J]. American Mathematical Monthly, 1962, 69(1): 9-15.
- [2] FAN Z P, LI M Y, ZHANG X. Satisfied Two-Sided Matching: A Method Considering Elation and Disappointment of Agents[J]. Soft Computing, 2018, 22(21): 7227-7241.
- [3] LI B, ZHANG Y X, XU Z S. The Aviation Technology Two-Sided Matching with the Expected Time Based on the Probabilistic Linguistic Preference Relations[J]. Journal of the Operations Research Society of China, 2020, 8(1): 45-77.
- [4] CHEN X, WANG J, LIANG H M, et al. Hesitant Multi-Attribute Two-Sided Matching: A Perspective Based on Prospect Theory[J]. Journal of Intelligent & Fuzzy Systems, 2019, 36(6): 6343-6358.
- [5] FLEINER T, IRVING R W, MANLOVE D F. Efficient Algorithms for Generalized Stable Marriage and Roommates Problems[J]. Theoretical Computer Science, 2007, 381(1/2/3): 162-176.
- [6] KLAUS B, KLIJN F. Median Stable Matching for College Admissions[J]. International Journal of Game Theory, 2006, 34(1): 1-11.
- [7] ROTH A E. On the Allocation of Residents to Rural Hospitals: A General Property of Two-Sided Matching Markets[J]. Econometrica, 1986, 54(2): 425-427.
- [8] LI M Y, FAN Z P, LI B, et al. A Matching Method for Second-Hand Goods Exchange Considering Loss Aversion of Buyer and Seller in E-Brokerage[J]. Soft Computing, 2021, 25(10): 7041-7057.
- [9] 万树平, 李登峰. 具有不同类型信息的风险投资商与

- 投资企业多指标双边匹配决策方法[J]. 中国管理科学, 2014, 22(2): 40-47.
- WAN Shuping, LI Dengfeng. Decision Making Method for Multi-Attribute Two-Sided Matching Problem Between Venture Capitalists and Investment Enterprises with Different Kinds of Information[J]. Chinese Journal of Management Science, 2014, 22(2): 40-47.
- [10] LIU Y, LI K W. A Two-Sided Matching Decision Method for Supply and Demand of Technological Knowledge[J]. Journal of Knowledge Management, 2017, 21(3): 592-606.
- [11] 陈希, 韩菁, 张晓. 考虑心理期望与感知的多属性匹配决策方法[J]. 控制与决策, 2014, 29(11): 2027-2033.
- CHEN Xi, HAN Jing, ZHANG Xiao. Method for Multiple Attribute Matching Decision Making Considering Matching Body's Psychological Aspiration and Perception[J]. Control and Decision, 2014, 29(11): 2027-2033.
- [12] 汪新凡, 周浪, 朱远芳, 等. 基于后悔理论的概率犹豫模糊双边匹配决策方法[J]. 控制与决策, 2022, 37(9): 2380-2388.
- WANG Xinfan, ZHOU Lang, ZHU Yuanfang, et al. Two-Sided Matching Decision Making Method with Probabilistic Hesitant Fuzzy Information Based on Regret Theory[J]. Control and Decision, 2022, 37(9): 2380-2388.
- [13] 马仁杰, 陈军, 郭钢. 基于区间和灰色关联度的云制造服务匹配方法[J]. 计算机集成制造系统, 2022, 28(3): 918-926.
- MA Renjie, CHEN Jun, GUO Gang. Cloud Manufacturing Service Matching Method Based on Interval Numbers and Grey Correlation Degree[J]. Computer Integrated Manufacturing Systems, 2022, 28(3): 918-926.
- [14] 乐琦, 樊治平. 基于不完全序值信息的双边匹配决策方法[J]. 管理科学学报, 2015, 18(2): 23-35.
- YUE Qi, FAN Zhiping. Decision Method for Two-Sided Matching Based on Incomplete Ordinal Number Information[J]. Journal of Management Sciences in China, 2015, 18(2): 23-35.
- [15] 姜艳萍, 孔德财, 袁铎宁. 具有序区间偏好信息的双边稳定匹配决策方法[J]. 系统工程理论与实践, 2017, 37(8): 2152-2161.
- JIANG Yanping, KONG Decai, YUAN Duoning. Two-Sided Stable Matching Decision-Making Method with Ordinal Interval Preference[J]. Systems Engineering-Theory & Practice, 2017, 37(8): 2152-2161.
- [16] ZHAO N. Hesitant Fuzzy Linguistic Prioritized Superiority and Inferiority Ranking Method and Its Application in Sustainable Energy Technology Evaluation[J]. Information Sciences, 2019, 478: 239-257.
- [17] LI B, ZHANG Y X, XU Z S. The Medical Treatment Service Matching Based on the Probabilistic Linguistic Term Sets with Unknown Attribute Weights[J]. International Journal of Fuzzy Systems, 2020, 22(5): 1487-1505.
- [18] 蒋忠中, 樊治平, 汪定伟. 电子中介中具有模糊信息且需求不可分的多属性商品交易匹配问题[J]. 系统工程理论与实践, 2011, 31(12): 2355-2366.
- JIANG Zhongzhong, FAN Zhiping, WANG Dingwei. Trade Matching for Multi-Attribute Exchanges with Fuzzy Information and Indivisible Demand in E-Brokerage[J]. Systems Engineering-Theory & Practice, 2011, 31(12): 2355-2366.
- [19] MIAO Y M, DU R, LI J, et al. A Two-Sided Matching Model in the Context of B2B Export Cross-Border E-Commerce[J]. Electronic Commerce Research, 2019, 19(4): 841-861.
- [20] LI P, WANG N N. A Novel Multi-Period Two-Sided Matching Method on Solving Long-Term Care Problem for Disabled Elders with Probabilistic Linguistic Information[J]. IEEE Access, 2020, 8: 149497-149509.
- [21] 张笛, 孙涛, 高明美, 等. 多重偏好序下的复杂产品主制造商: 供应商多阶段双边匹配方法[J]. 计算机集成制造系统, 2018, 24(3): 804-812.
- ZHANG Di, SUN Tao, GAO Mingmei, et al. Multi-Stage Two-Sided Matching Method for Main Manufacturer and Suppliers of Complex Products with Multi-Form Preference Ordinal[J]. Computer Integrated Manufacturing Systems, 2018, 24(3): 804-812.
- [22] 张笛. 基于直觉模糊偏好信息的多阶段双边匹配方法[J]. 模糊系统与数学, 2019, 33(5): 80-88.
- ZHANG Di. Intuitionistic Fuzzy Preference Information for Two-Sided Matching Method with Multi-Stage[J]. Fuzzy Systems and Mathematics, 2019, 33(5): 80-88.
- [23] GOMES L F A M, LIMA M. Todim: Basic and Application to Multicriteria Ranking of Projects with Environmental Impacts[J]. Foundations of Computing and Decision Sciences, 1991, 16(3): 113-127.
- [24] 方冰, 韩冰, 闻传花. 基于新型距离测度的概率犹豫模糊多属性群决策方法[J]. 控制与决策, 2022, 37(3): 729-736.
- FANG Bing, HAN Bing, WEN Chuanhua. Probabilistic Hesitant Fuzzy Group Decision-Making Based on New Distance Measure[J]. Control and Decision, 2022, 37(3): 729-736.
- [25] 马艳芳, 赵媛媛, 冯翠英, 等. 多粒度概率语言 TODIM 方法在垃圾回收 APP 评价中的应用[J]. 系统科学与数学, 2021, 41(12): 3530-3547.
- MA Yanfang, ZHAO Yuanyuan, FENG Cuiying, et al. Applying Multi-Granularity Probabilistic Linguistic TODIM Method for Evaluating Waste Recycling APP[J].

- Journal of Systems Science and Mathematical Sciences, 2021, 41(12): 3530-3547.
- [26] 王霞, 党耀国. 基于改进的 TODIM 方法的区间灰数多属性决策模型 [J]. 控制与决策, 2016, 31(2): 261-266.
WANG Xia, DANG Yaoguo. Multiple Attribute Decision-Making Model with Interval Grey Number Based on Improved TODIM Method[J]. Control and Decision, 2016, 31(2): 261-266.
- [27] VAN LAARHOVEN P J M, PEDRYCZ W. A Fuzzy Extension of Saaty's Priority Theory[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1983, 11(1/2/3): 229-241.
- [28] 李登峰. 模糊多目标多人决策与对策 [M]. 北京: 国防工业出版社, 2003: 54-57.
LI Dengfeng. Fuzzy Multiobjective Many-Person Decision Makings and Games[M]. Beijing: National Defence Industry Press, 2003: 54-57.
- [29] 李荣钧. 模糊多准则决策理论与应用 [M]. 北京: 科学出版社, 2002: 100-102.
LI Rongjun. Theory and Application of Fuzzy Multi-Criteria Decision Making[M]. Beijing: Science Press, 2002: 100-102.
- [30] PEDRYCZ W. Why Triangular Membership Functions?[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1994, 64(1): 21-30.
- [31] DE LUCA A, TERMINI S. A Definition of a Non-probabilistic Entropy in the Setting of Fuzzy Sets Theory[J]. Information and Control, 1972, 20(4): 301-312.
- [32] 黄智力, 罗键. 属性值为三角模糊数的决策对象可能度关系模型 [J]. 控制与决策, 2018, 33(11): 1931-1940.
HUANG Zhili, LUO Jian. Possibility Degree Relation Model for Decision Making Objects with Multiple Criteria Values as Triangular Fuzzy Number[J]. Control and Decision, 2018, 33(11): 1931-1940.
- [33] 杨静, 邱苑华. 基于投影技术的三角模糊数型多属性决策方法研究 [J]. 控制与决策, 2009, 24(4): 637-640.
YANG Jing, QIU Wanhua. Method for Multi-Attribute Decision-Making Based on Projection[J]. Control and Decision, 2009, 24(4): 637-640.
- [34] STARMER C. Developments in Non-Expected Utility Theory: The Hunt for a Descriptive Theory of Choice Under Risk[J]. Journal of Economic Literature, 2000, 38(2): 332-382.
- [35] 林杨, 王应明. 基于感知效用的多阶段多属性匹配决策途径 [J]. 计算机应用, 2015, 35(6): 1628-1648.
LIN Yang, WANG Yingming. Approach for Multi-Period and Multi-Attribute Matching Decision Based on Perceived Expectation[J]. Journal of Computer Applications, 2015, 35(6): 1628-1648.
- [36] YAGER R R. Quantifier Guided Aggregation Using OWA Operators[J]. International Journal of Intelligent Systems, 1996, 11(1): 49-73.
- [37] 毛军军, 姚登宝, 王翠翠, 等. 基于时序模糊软集的群决策方法 [J]. 系统工程理论与实践, 2014, 34(1): 182-189.
MAO Junjun, YAO Dengbao, WANG Cuicui, et al. Group Decision-Making Method Based on Time-Series Fuzzy Soft Sets[J]. Systems Engineering-Theory & Practice, 2014, 34(1): 182-189.
- [38] 郭亚军, 姚远, 易平涛. 一种动态综合评价方法及应用 [J]. 系统工程理论与实践, 2007, 27(10): 154-158.
GUO Yajun, YAO Yuan, YI Pingtao. A Method and Application of Dynamic Comprehensive Evaluation[J]. Systems Engineering-Theory & Practice, 2007, 27(10): 154-158.
- [39] KAHNEMAN D, TVERSKY A. Prospect Theory: An Analysis of Decision Under Risk[J]. Econometrica, 1979, 47(2): 263-292.
- [40] 张笛, 孙涛, 耿成轩, 等. 基于 TODIM 的直觉模糊双边公平满意匹配方法 [J]. 控制与决策, 2019, 34(6): 1338-1344.
ZHANG Di, SUN Tao, GENG Chengxuan, et al. Method for Intuitionistic Fuzzy Two-Sided Fair and Satisfied Matching Based on TODIM [J]. Control and Decision, 2019, 34(6): 1338-1344.

(责任编辑: 廖友媛)