

doi:10.3969/j.issn.1673-9833.2023.03.012

# 一类流感模型的动力学分析与数值模拟

赵思远, 汤琼, 瞿民凯, 王美云

(湖南工业大学理学院, 湖南株洲 412007)

**摘要:** 研究了一种具有抗病性的 SEIR 流感模型, 利用求再生矩阵最大特征值的方法计算了模型的基本再生数, 并证明了当  $R_0 < 1$  时只有无病平衡点, 且无病平衡点局部渐近稳定; 当  $R_0 > 1$  时, 方程组存在唯一的地方病平衡点。构造了 Lyapunov 函数证明了地方病平衡点的全局稳定性, 且利用有限元法进行了数值模拟, 模拟结果与理论分析结果相吻合, 并与 Runge-Kutta 法进行了对比分析, 为传染病分析提供了一个新思路。

**关键词:** 流感模型; 基本再生数; 稳定性; 有限元法

**中图分类号:** O175

**文献标志码:** A

**文章编号:** 1673-9833(2023)03-0083-06

**引文格式:** 赵思远, 汤琼, 瞿民凯, 等. 一类流感模型的动力学分析与数值模拟 [J]. 湖南工业大学学报, 2023, 37(3): 83-88.

## A Dynamic Analysis and Numerical Simulation of a Certain Influenza Model

ZHAO Siyuan, TANG Qiong, QU Minkai, WANG Meiyun

(College of Science, Hunan University of Technology, Zhuzhou Hunan 412007, China)

**Abstract:** A study has been made of a SEIR influenza model with disease resistance in this paper, followed by a calculation of the basic reproduction number of the model by using the method of finding the maximum eigenvalue of the reproduction matrix. It is testified that under the condition of  $R_0 < 1$ , there is only a disease free equilibrium point, with the disease free equilibrium point locally asymptotically stable. When  $R_0 > 1$ , there is a unique endemic equilibrium point in the equation system, with Lyapunov function constructed to confirm the global stability of the endemic equilibrium point. For the first time, the finite element method is used for a numerical simulation, which is consistent with the theoretical analysis. Meanwhile, when compared with the Runge-Kutta method, the proposed process provides a new method for the analysis of infectious diseases.

**Keywords:** influenza model; basic reproduction number; stability; finite element method

流行性感是由流感病毒传播引起的一种常见的传染病, 从古至今未曾断绝, 20 世纪初出现的西班牙大流感所导致的病亡人数甚至远超第一次世界大战所致。尽管人们采取了各式各样的措施以预防或遏制

流感的传播, 但是每年仍有数以十万计的人因流感而死亡。不同于麻疹等传染病, 流感能够通过变异产生新的毒株, 这也使得流感一直未能被消灭, 因此, 流感病毒的传播动力学一直属于热门研究领域之一<sup>[1-8]</sup>。

**收稿日期:** 2022-03-20

**基金项目:** 国家自然科学基金资助项目 (11975094)

**作者简介:** 赵思远 (1995-), 男, 湖南郴州人, 湖南工业大学硕士生, 主要研究方向为微分方程与动力系统,

E-mail: 1720554510@qq.com

**通信作者:** 汤琼 (1972-), 女, 湖南浏阳人, 湖南工业大学教授, 博士, 主要研究方向为微分方程与动力系统,

E-mail: zgzxysx@163.com

2017年,崔玉美等<sup>[2]</sup>对传染病模型基本再生数的几种导出方法进行了综述,分别从基本再生数的定义、初始时刻染病者的单调性、正平衡点的存在性、无病平衡点的局部稳定性,以及数值模拟角度给出了基本再生数的导出方法。其中,定义法导出基本再生数仅适用较为简单的传染病模型,而以初始时刻染病者的单调性导出的基本再生数不是一个精确的结果,相较而言,以无病平衡点的局部稳定性导出的基本再生数简洁明了。

N. H. Khanh<sup>[1]</sup>在2016年提出了一类具抗病性的流感模型,在这个模型中,易感人群的输入值为一个不受外在影响的定值,但实际情况往往并非如此,基于此,本文拟对这一点进行改进,使其更符合实际情况。对于基本再生数的计算,通过求解无病平衡点处的基本再生矩阵<sup>[2]</sup>特征值的方法导出,本文在进行无病平衡点的稳定性分析时,根据其在无病平衡点处的Jacobian矩阵特征值进行判断<sup>[3-4]</sup>,而地方病平衡点的稳定性则通过构造合适的Lyapunov函数进行分析。对模型进行动力学行为分析时<sup>[5-8]</sup>,首次用有限元法进行数值模拟<sup>[9-10]</sup>,确定模板结果与理论分析结果一致,然后与Runge-Kutta法进行对比,判定有限元法的优越性。

## 1 模型的建立

将人群分为4类,分别是易感者 $S$ 、潜伏者 $E$ 、传染者 $I$ 和康复者 $R$ ,并做如下假设:

- 1) 潜伏期的病人可以传染流感;
- 2) 人口输入由新生人口及外来人口组成,与总人口成比例;
- 3) 模型只考虑人口的自然死亡率,不考虑流感致死。

流感模型由如下常微分方程系统描述:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = \Lambda N - \frac{\beta S(E+I)}{N} - \mu S, \\ \frac{dE}{dt} = \frac{\beta S(E+I)}{N} - \varepsilon E - \mu E, \\ \frac{dI}{dt} = \varepsilon E - \gamma I - \mu I, \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I - \mu R, \\ N = S + E + I + R. \end{cases} \quad (1)$$

式中: $\Lambda$ 为人口输入率; $\beta$ 为流感病毒传播率; $\mu$ 为人口自然死亡率; $\varepsilon$ 为潜伏者变为传染者的转化率; $\gamma$ 为传染者康复的康复率;所有参数均为正。

将常微分方程组(1)左右相加有

$$\frac{dN}{dt} = (\Lambda - \mu)N。$$

此时将4种人口的比例 $s$ 、 $e$ 、 $i$ 、 $r$ 作为新变量,则有 $S=sN$ ,  $E=eN$ ,  $I=iN$ ,  $R=rN$ 。故有

$$\frac{dS}{dt} = \frac{dsN}{dt} = N \frac{ds}{dt} + s \frac{dN}{dt} = N \frac{ds}{dt} + s(\Lambda - \mu)N,$$

可得 $\frac{ds}{dt} = \Lambda - \Lambda s - \beta s(e+i)$ ,同理可得其他3个方程,

故新的常微分方程组为

$$\begin{cases} \frac{ds}{dt} = \Lambda - \Lambda s - \beta s(e+i), \\ \frac{de}{dt} = \beta s(e+i) - \varepsilon e - \Lambda e, \\ \frac{di}{dt} = \varepsilon e - \gamma i - \Lambda i, \\ \frac{dr}{dt} = \gamma i - \Lambda r. \end{cases} \quad (2)$$

由模型实际含义,仅在区域 $D = \{(s, e, i, r) | s \geq 0, e \geq 0, i \geq 0, r \geq 0, s + e + i + r = 1\}$ 中讨论上述模型的动力学行为。

## 2 模型的动力学分析

### 2.1 基本再生数

令 $i=0$ ,得模型的无病平衡点为 $P_0=(1, 0, 0, 0)$ ,根据无病平衡点的局部稳定性导出基本再生数<sup>[3]</sup>:

$$\tilde{F} = \begin{pmatrix} \beta s(e+i) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{V} = \begin{pmatrix} \varepsilon e + \Lambda e \\ -\varepsilon e + \gamma i + \Lambda i \end{pmatrix},$$

式中: $\tilde{F}$ 为新感染的个体比率矩阵; $\tilde{V}$ 为转移的个体比率矩阵。

从而有

$$F = \begin{pmatrix} \beta & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} \varepsilon + \Lambda & 0 \\ -\varepsilon & \gamma + \Lambda \end{pmatrix},$$

可得:

$$V^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon + \Lambda} & 0 \\ \frac{\varepsilon}{(\varepsilon + \Lambda)(\varepsilon + \Lambda)} & \varepsilon + \Lambda \end{pmatrix},$$

故基本再生数为

$$R_0 = \rho(FV^{-1}) = \frac{\beta(\varepsilon + \gamma + \Lambda)}{(\varepsilon + \Lambda)(\gamma + \Lambda)}。$$

### 2.2 稳定性分析

**定理1** 当 $R_0 < 1$ 时,模型(2)无地方病平衡点,且无病平衡点局部渐近稳定。

当流感未爆发时有 $e=0$ 、 $i=0$ 、 $r=0$ ,令模型的右边等于0则可得 $s=0$ ,故无病平衡点 $P_0=(1, 0, 0, 0)$ 。

地方病平衡点满足如下方程组:

$$\begin{cases} \frac{ds}{dt} = \Lambda - \Lambda s^* - \beta s^*(e^* + i^*) = 0, \\ \frac{de}{dt} = \beta s^*(e^* + i^*) - \varepsilon e^* - \Lambda e^* = 0, \\ \frac{di}{dt} = \varepsilon e^* - \gamma i^* - \Lambda i^* = 0, \\ \frac{dr}{dt} = \gamma i^* - \Lambda r^* = 0. \end{cases} \quad (3)$$

由方程组(3)中第4个方程有

$$r^* = \gamma i^* / \Lambda,$$

由方程组(3)中第3个方程有

$$e^* = (\gamma + \Lambda) i^* / \varepsilon,$$

将上式代入方程组(3)第2个方程有

$$s^* = (\varepsilon + \Lambda)(\gamma + \Lambda) / [\beta(\varepsilon + \gamma + \Lambda)],$$

将方程组(3)的前两个方程相加有

$$\Lambda - \Lambda s^* - \varepsilon e^* - \Lambda e^* = 0,$$

将  $s^*$  代入上式得:  $e^* = \frac{\Lambda}{\varepsilon + \Lambda} \left( 1 - \frac{(\varepsilon + \Lambda)(\gamma + \Lambda)}{\beta(\varepsilon + \gamma + \Lambda)} \right)$ 。

故当  $R_c < 1$  即  $\beta(\gamma + \varepsilon + \Lambda) < (\varepsilon + \Lambda)(\gamma + \Lambda)$  时,  $e^* < 0$ , 此时无地方病平衡点。

流感模型的微分方程组在无病平衡点  $P_0 = (1, 0, 0, 0)$  处的 Jacobian 矩阵为

$$J_0 = \begin{pmatrix} -\Lambda & -\beta & -\beta & 0 \\ 0 & \beta - (\varepsilon + \Lambda) & \beta & 0 \\ 0 & \varepsilon & -(\gamma + \Lambda) & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & -\Lambda \end{pmatrix}.$$

故 Jacobian 矩阵的特征方程行列式为

$$(\lambda + \Lambda)^2 [(\lambda - \beta + \varepsilon + \Lambda)(\lambda + \gamma + \Lambda) - \beta\varepsilon] = 0.$$

式中:  $\lambda_1 = \lambda_2 = -\Lambda < 0$ ;

$$\lambda_3 + \lambda_4 = \beta - (\varepsilon + \Lambda) - (\gamma + \Lambda);$$

$$\lambda_3 \lambda_4 = (\varepsilon + \Lambda)(\gamma + \Lambda) - \beta(\varepsilon + \gamma + \Lambda).$$

当  $R_c < 1$  即  $\beta(\gamma + \varepsilon + \Lambda) < (\varepsilon + \Lambda)(\gamma + \Lambda)$  时,  $\lambda_3 \lambda_4 > 0$ , 且

$$\beta < \frac{(\varepsilon + \Lambda)(\gamma + \Lambda)}{\varepsilon + \gamma + \Lambda} = (\varepsilon + \Lambda) \left( 1 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon + \gamma + \Lambda} \right).$$

不妨设此时  $\lambda_3 \lambda_4 \geq 0$ , 即  $\beta \geq (\varepsilon + \Lambda)(\gamma + \Lambda)$ , 则有

$$(\varepsilon + \Lambda) \left( 1 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon + \gamma + \Lambda} \right) > \beta^3 (\varepsilon + \Lambda) + (\gamma + \Lambda),$$

即  $(\varepsilon + \Lambda) \left( -\frac{\varepsilon}{\varepsilon + \gamma + \Lambda} \right) > \gamma + \Lambda$ 。

显然矛盾, 故  $\lambda_3 + \lambda_4 < 0$ 。故当  $R_c < 1$  时, 由  $\lambda_3 \lambda_4 > 0$  且  $\lambda_3 + \lambda_4 < 0$ , 可知  $\lambda_3 < 0, \lambda_4 < 0$ 。

故当  $R_c < 1$  时, 无病平衡点  $P_0$  局部渐近稳定。

**定理 2** 当  $R_c > 1$  时, 模型(2)有唯一一个地方

病平衡点, 且地方病平衡点全局渐进稳定。

当  $R_c > 1$  即  $\beta(\gamma + \varepsilon + \Lambda) > (\varepsilon + \Lambda)(\gamma + \Lambda)$  时,  $e^* > 0$ , 故此时有唯一一个地方病平衡点; 接下来在区域  $D$  内讨论流感模型的地方病平衡点稳定性, 因微分方程组中前3个方程与  $r$  无关, 故只需考虑如下子方程稳定性。

$$\begin{cases} \frac{ds}{dt} = \Lambda - \Lambda s - \beta s(e + i), \\ \frac{de}{dt} = \beta s(e + i) - \varepsilon e - \Lambda e, \\ \frac{di}{dt} = \varepsilon e - \gamma i - \Lambda i. \end{cases} \quad (4)$$

由方程组(3)可得:

$$\begin{cases} \Lambda = \frac{\beta s^*(e^* + i^*)}{1 - s^*}, \\ \varepsilon + \Lambda = \beta s^* \left( 1 + \frac{i^*}{e^*} \right), \\ \gamma + \Lambda = \varepsilon \frac{e^*}{i^*}. \end{cases} \quad (5)$$

令  $x = \frac{s}{s^*}, y = \frac{e}{e^*}, z = \frac{i}{i^*}$ , 代入方程组(4)可得:

$$\begin{cases} \frac{ds}{dt} = \beta s^* e^* x(1 - y) + \beta s^* i^* x(1 - z), \\ \frac{de}{dt} = \beta s^* e^* y(x - 1) + \beta s^* i^* (xz - y), \\ \frac{di}{dt} = \varepsilon e^* (y - z), \end{cases} \quad (6)$$

此时可以构造如下 Lyapunov 函数:

$$V(x, y, z) = s^*(x - 1 - \ln x) + e^*(y - 1 - \ln y) + i^*(z - 1 - \ln z),$$

$V$  函数为正定函数。对  $V$  函数求导, 有

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \left( 1 - \frac{1}{x} \right) (\beta s^* e^* x(1 - y) + \beta s^* i^* x(1 - z)) + \left( 1 - \frac{1}{y} \right) (\beta s^* e^* y(x - 1) + \beta s^* i^* (xz - y)) \\ &\quad + \left( 1 - \frac{1}{z} \right) \theta \varepsilon e^* (y - z) = \beta s^* i^* \left( -\frac{1}{x} + z - y - \frac{xz}{y} \right) + \theta \varepsilon e^* \left( y - z - \frac{y}{z} + 1 \right) \\ &\quad - y(\beta s^* i^* - \theta \varepsilon e^*) + z(\beta s^* i^* - \theta \varepsilon e^*) + \beta s^* i^* \left( -\frac{1}{x} - \frac{xz}{y} \right) \\ &\quad + \theta \varepsilon e^* \left( 1 - \frac{y}{z} \right). \end{aligned}$$

令  $\beta s^* i^* - \theta \varepsilon e^* = 0$ , 即  $\theta = \frac{\beta s^* i^*}{\varepsilon e^*}$ , 则有

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \beta s^* i^* \left( -\frac{1}{x} - \frac{xz}{y} \right) - \frac{y}{z} \beta s^* i^* + \beta s^* i^* = \beta s^* i^* \left( -\frac{1}{x} - \frac{xz}{y} - \frac{y}{z} + 1 \right) \\ &= \beta s^* i^* \left( 1 - \left( \frac{1}{x} + \frac{xz}{y} + \frac{y}{z} \right) \right). \end{aligned}$$

由几何平均数与算数平均数的关系可知:

$$1 - \left( \frac{1}{x} + \frac{xz}{y} + \frac{y}{z} \right) < 0.$$

故  $\dot{V} < 0$ , 由 Lyapunov 稳定性定理可知地方病平衡点全局渐进稳定。

### 3 有限元法求数值解

对式 (2) 用连续有限元法<sup>[10]</sup>, 在区间  $(t_j, t_{j+1})$  上考虑一次元  $s = \frac{t_{j+1}-t_j}{h}s_j + \frac{t-t_j}{h}s_{j+1}$ , 其中  $h=t_{j+1}-t_j$ 。

记  $s(t_j) = s_j$ , 再令

$$t = \frac{t_{j+1}-t_j}{2}x + \frac{t_{j+1}+t_j}{2} = \frac{h}{2}x + \frac{t_{j+1}+t_j}{2},$$

则有

$$\begin{cases} s = \frac{1-x}{2}s_j + \frac{1+x}{2}s_{j+1}, \\ e = \frac{1-x}{2}e_j + \frac{1+x}{2}e_{j+1}, \\ i = \frac{1-x}{2}i_j + \frac{1+x}{2}i_{j+1}, \\ r = \frac{1-x}{2}r_j + \frac{1+x}{2}r_{j+1}. \end{cases} \quad (7)$$

对式 (2) 两边积分得:

$$\begin{cases} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{ds}{dt} dt = \frac{h}{2} \int_{-1}^1 (\Lambda - \Lambda s - \beta s(e+i)) dx, \\ \int_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{de}{dt} dt = \frac{h}{2} \int_{-1}^1 (\beta s(e+i) - \epsilon e - \Lambda e) dx, \\ \int_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{di}{dt} dt = \frac{h}{2} \int_{-1}^1 (\epsilon e - \gamma i - \Lambda i) dx, \\ \int_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{dr}{dt} dt = \frac{h}{2} \int_{-1}^1 (\gamma i - \Lambda r) dx, \end{cases}$$

再将式 (7) 代入上式得:

$$\begin{cases} s_{j+1} - s_j = \Lambda h - \frac{\Lambda h}{2}(s_j + s_{j+1}) - \frac{\beta h}{2} \left( \frac{4}{3}s_j(e_j + i_j) + \frac{2}{3}s_j(e_{j+1} + i_{j+1}) + \frac{2}{3}s_{j+1}(e_j + i_j) + \frac{4}{3}s_{j+1}(e_{j+1} + i_{j+1}) \right), \\ e_{j+1} - e_j = \frac{\beta h}{2} \left( \frac{4}{3}s_j(e_j + i_j) + \frac{2}{3}s_j(e_{j+1} + i_{j+1}) + \frac{2}{3}s_{j+1}(e_j + i_j) + \frac{4}{3}s_{j+1}(e_{j+1} + i_{j+1}) \right) - \frac{h}{2}(\epsilon + \Lambda)(e_j + e_{j+1}), \\ i_{j+1} - i_j = \frac{\epsilon h}{2}(e_j + e_{j+1}) - \frac{(\gamma + \Lambda)h}{2}(i_j + i_{j+1}), \\ r_{j+1} - r_j = \frac{\gamma h}{2}(i_j + i_{j+1}) - \frac{\Lambda h}{2}(r_j + r_{j+1}). \end{cases} \quad (8)$$

由方程组 (8) 第 4 个方程得:

$$r_{j+1} = \frac{\gamma h}{\Lambda h + 2}i_{j+1} + \frac{\gamma h}{\Lambda h + 2}i_j + \frac{2 - \Lambda h}{\Lambda h + 2}r_j;$$

由方程组 (8) 第 3 个方程得:

$$e_{j+1} = \frac{(\gamma + \Lambda)h + 2}{\epsilon h}i_{j+1} + \frac{(\gamma + \Lambda)h - 2}{\epsilon h}i_j - e_j;$$

将方程组 (8) 第 1、2 个方程左右分别相加, 再将上两式代入得:

$$s_{j+1} = -\frac{((\epsilon + \Lambda)h + 2)((\gamma + \Lambda)h + 2)}{\epsilon h(\Lambda h + 2)}i_{j+1} + \frac{2 - \Lambda h}{\Lambda h + 2}s_j + \frac{4}{\Lambda h + 2}e_j - \frac{((\epsilon + \Lambda)h + 2)((\gamma + \Lambda)h - 2)}{\epsilon h(\Lambda h + 2)}i_j + \frac{2\Lambda h}{\Lambda h + 2}.$$

将第二个式子代入方程组 (8) 中第二个方程得

$$\begin{aligned} & \left( \frac{((\epsilon + \Lambda)h + 2)((\gamma + \Lambda)h + 2)}{2\epsilon h} - \frac{\beta h((\epsilon + \gamma + \Lambda)h + 2)}{3\epsilon h} \right) i_{j+1} + \\ & \frac{((\epsilon + \Lambda)h + 2)((\gamma + \Lambda)h - 2)}{2\epsilon h} i_j - 2e_j - \frac{2\beta h}{3}s_j(e_j + i_j) - \\ & \frac{\beta h((\gamma + \Lambda)h - 2)}{3\epsilon h} s_j i_j + \frac{\beta h}{3} s_j e_j = \\ & \left( \frac{2\beta h((\epsilon + \gamma + \Lambda)h + 2)}{3\epsilon h} i_{j+1} + \frac{2\beta h((\gamma + \Lambda)h - 2)}{3\epsilon h} i_j + \right. \\ & \left. \frac{\beta h}{3}(i_j - e_j) \right) s_{j+1}. \end{aligned}$$

$$\text{令 } u = \frac{\gamma h}{\Lambda h + 2}, \quad w = \frac{\gamma h}{\Lambda h + 2}i_j + \frac{2 - \Lambda h}{\Lambda h + 2}r_j,$$

$$m = \frac{(\gamma + \Lambda)h + 2}{\epsilon h}, \quad q = \frac{(\gamma + \Lambda)h - 2}{\epsilon h}i_j - e_j,$$

$$a = -\frac{((\epsilon + \Lambda)h + 2)((\gamma + \Lambda)h + 2)}{\epsilon h(\Lambda h + 2)},$$

$$d = \frac{2 - \Lambda h}{\Lambda h + 2}s_j + \frac{4}{\Lambda h + 2}e_j -$$

$$\frac{((\epsilon + \Lambda)h + 2)((\gamma + \Lambda)h - 2)}{\epsilon h(\Lambda h + 2)}i_j + \frac{2\Lambda h}{\Lambda h + 2},$$

$$f = \frac{((\epsilon + \Lambda)h + 2)((\gamma + \Lambda)h + 2)}{2\epsilon h} - \frac{\beta h((\epsilon + \gamma + \Lambda)h + 2)}{3\epsilon h} s_j,$$

$$g = \frac{((\epsilon + \Lambda)h + 2)((\gamma + \Lambda)h - 2)}{2\epsilon h} i_j - 2e_j - \frac{2\beta h}{3}s_j(e_j + i_j) -$$

$$\frac{\beta h((\gamma + \Lambda)h - 2)}{3\epsilon h} s_j i_j + \frac{\beta h}{3} s_j e_j,$$

$$k = \frac{2\beta h((\epsilon + \gamma + \Lambda)h + 2)}{3\epsilon h},$$

$$l = \frac{2\beta h((\gamma + \Lambda)h - 2)}{3\epsilon h} i_j + \frac{\beta h}{3}(i_j - e_j),$$

则有

$$\begin{cases} s_{j+1} = ai_{j+1} + d, \\ e_{j+1} = mi_{j+1} + q, \\ r_{j+1} = ui_{j+1} + w, \\ fi_{j+1} + g = (ki_{j+1} + l)(ai_{j+1} + d). \end{cases} \quad (9)$$

可得  $aki_{j+1}^2 + (al + kd - f)i_{j+1} + ld - g = 0$ ,

根据式 (9) 得:

$$\begin{cases} i_{j+1} = \frac{(f - al - kd) + \sqrt{(al + kd - f)^2 - 4ak(ld - g)}}{2ak}, \\ s_{j+1} = \frac{(f - al + kd) + \sqrt{(al + kd - f)^2 - 4ak(ld - g)}}{2k}, \\ e_{j+1} = m \frac{(f - al - kd) + \sqrt{(al + kd - f)^2 - 4ak(ld - g)}}{2ak} + q, \\ r_{j+1} = u \frac{(f - al - kd) + \sqrt{(al + kd - f)^2 - 4ak(ld - g)}}{2ak} + w. \end{cases} \quad (10)$$

选取  $\lambda=0.015$ 、 $\beta=0.22$ 、 $\varepsilon=0.15$ 、 $\gamma=0.1$ 、 $h=0.1$ , 此时  $R_c=3.072>1$ 。在这种情况下, 通过数值模拟, 可得如图 1 所示的有限元法潜伏者与传染者曲线。

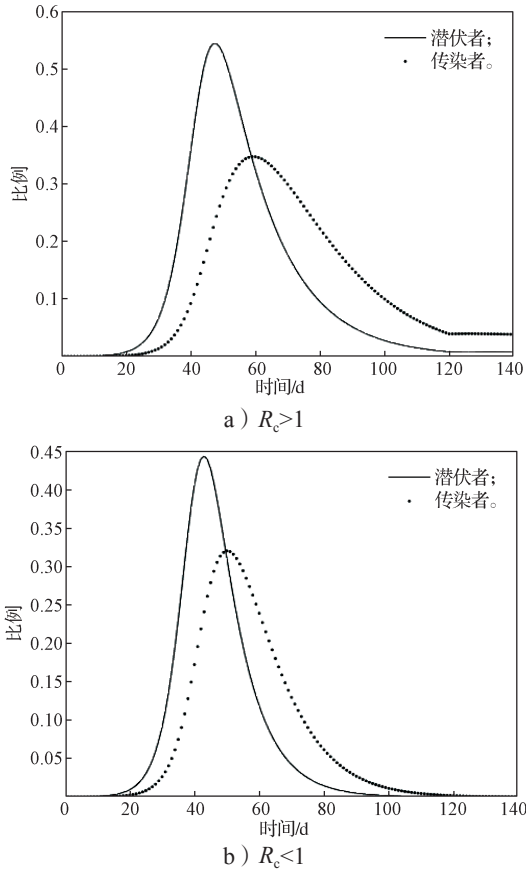


图 1 有限元法模拟潜伏者与传染者曲线

Fig. 1 A simulation of the curves of latent person and infectious person by using finite element and methods

由图 1 可以看到潜伏者与传染者最终趋于某个正数(见图 1a), 这意味着疾病将持续存在, 形成地方病, 与定理 2 结果一致, 即  $R_c>1$  时存在唯一的 地方病平衡点且其全局渐进稳定。若将流感病毒的传播率减少为  $\beta=0.6$ , 其它的不变, 则  $R_c=0.873<1$ , 在这种情况下, 通过数值模拟, 可以看到潜伏者与传染者随时间增大而逐渐趋于 0 (见图 1b), 这意味着疾病消亡,

与定理 1 结果一致, 即当  $R_c<1$  时, 无地方病平衡点, 无病平衡点局部渐近稳定。这也表明可以通过减少传染率来控制疾病传播。

图 2 为利用 Runge-Kutta 法画出来的当  $R_c>1$  和  $R_c<1$  时的潜伏者与传染者随时间的变化曲线, 图 3 为不同步长下两种方法的偏差图像, 由图 2 和 3 的模拟结果可明显看出, 有限元法随着步长增大无多大偏差, 结果较为稳定, 而 Runge-Kutta 法在步长增大以后结果出现了较大偏差, 说明在较大步长情况下有限元法更具优越性。

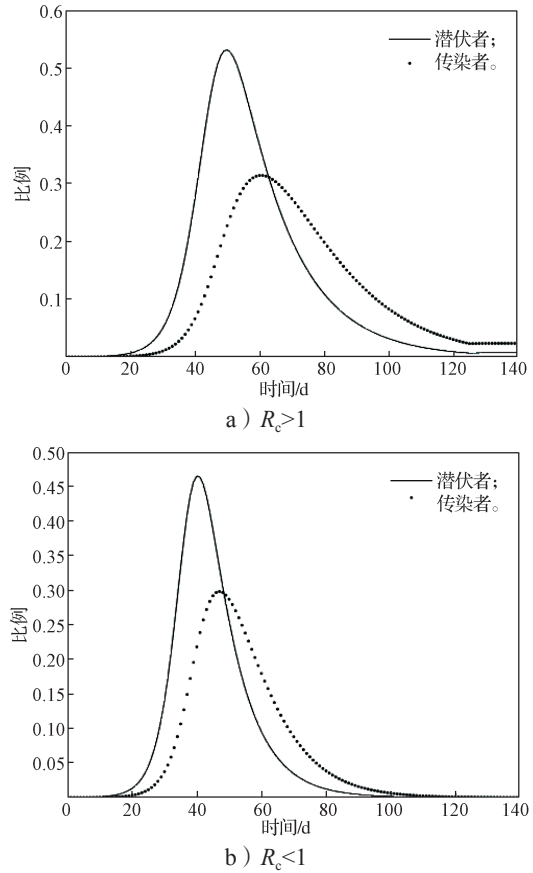
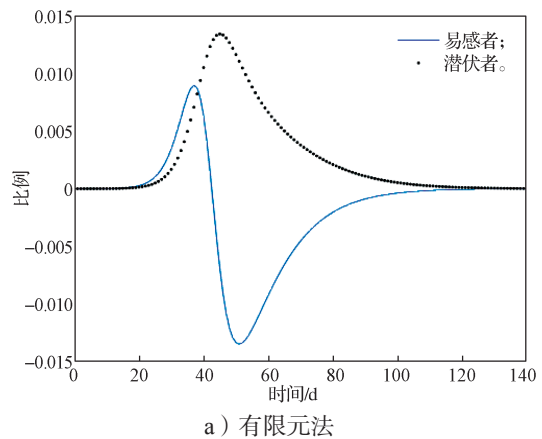


图 2 Runge-Kutta 法模拟潜伏者与传染者曲线

Fig. 2 A simulation of the curves of latent person and infectious person by using Runge-Kutta methods



a) 有限元法

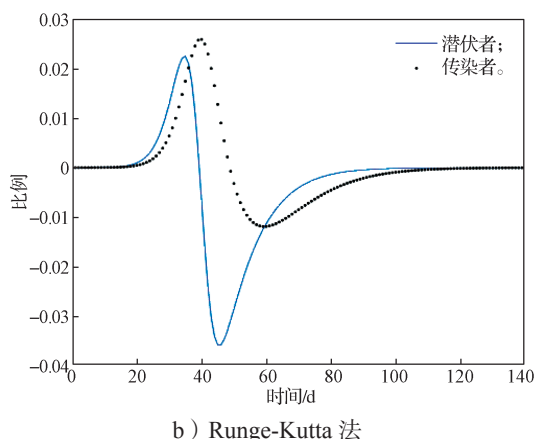


图3 不同步长下有限元法和 Runge-Kutta 法的偏差图像  
Fig. 3 Deviation image of finite element method and Runge-Kutta method at various steps

## 4 结论

本文研究了一类具有抗病性的流感模型,并对流感模型进行了动力学分析和数值模拟,得到以下结论:

1) 当基本再生数  $R_c < 1$  时,模型(2)无地方病平衡点,且无病平衡点是局部渐近稳定的,流感疾病将消亡。

2) 当基本再生数  $R_c > 1$  时,模型(2)有唯一一个地方病平衡点,且地方病平衡点全局渐进稳定,流感将持续存在并形成地方病。

3) 首次利用有限元法求解流感模型的数值解,数值模拟结果与理论分析结果相吻合,与 Runge-Kutta 法对比后证实本文所提方法的优越性,为传染病的分析提供了一个好方法。

### 参考文献:

- [1] KHANH N H. Stability Analysis of an Influenza Virus Model with Disease Resistance[J]. Journal of the Egyptian Mathematical Society, 2016, 24(2): 193-199.
- [2] 崔玉美,陈姗姗,傅新楚.几类传染病模型中基本再生数的计算[J].复杂系统与复杂性科学,2017,14(4):14-31.  
CUI Yumei, CHEN Shanshan, FU Xinchu. The Thresholds of some Epidemic Models[J]. Complex Systems and Complexity Science, 2017, 14(4): 14-31.
- [3] 赵 媛.百日咳传染病的动力学模型分析[D].武汉:华中师范大学,2019.  
ZHAO Yuan. The Dynamics Models Analysis of Pertussis[D]. Wuhan: Central China Normal University, 2019.
- [4] 辛明振.两类随机传染病模型的动力学行为研究[D].兰州:兰州大学,2020.  
XIN Mingzhen. The Dynamics of Two Stochastic Epidemic Models[D]. Lanzhou: Lanzhou University, 2020.
- [5] 马知恩,周义仓.常微分方程定性方法与稳定性方法[M].北京:科学出版社,2001:55.  
MA Zhi'en, ZHOU Yicang. Methods for Qualitative and Stability of Ordinary Differential Equations[M]. Beijing: Science Press, 2001: 55.
- [6] 申 梅,薛博文,李毅伟.一类具有饱和传染率的SEIR传染病模型的动力学行为[J].山西师范大学学报(自然科学版),2021,35(2):1-5.  
SHEN Mei, XUE Bowen, LI Yiwei. Dynamic Behavior of a SEIR Epidemic Model with Saturated Contact Rate[J]. Journal of Shanxi Normal University (Natural Science Edition), 2021, 35(2): 1-5.
- [7] 钱 蓉,肖 敏,王 璐.不同阶次下分数阶SIR传染病模型的稳定性分析[J].吉林大学学报(理学版),2021,59(4):796-806.  
QIAN Rong, XIAO Min, WANG Lu. Stability Analysis of Fractional-Order SIR Epidemic Models with Different Orders[J]. Journal of Jilin University (Science Edition), 2021, 59(4): 796-806.
- [8] 王晓静,白玉珍,安 迪,等.一类具有预防和治疗措施的丙型肝炎传染病模型的动力学分析[J].信阳师范学院学报(自然科学版),2021,34(3):356-361.  
WANG Xiaojing, BAI Yuzhen, AN Di, et al. Dynamic Analyses on a Kind of Hepatitis C Transmission Model Incorporating Prevention and Treatment Interventions[J]. Journal of Xinyang Normal University (Natural Science Edition), 2021, 34(3): 356-361.
- [9] 李庆扬,王能超,易大义.数值分析[M].5版.北京:清华大学出版社,2008:286-289.  
LI Qingyang, WANG Nengchao, YI Dayi. Numerical Analysis[M]. 5<sup>th</sup> ed. Beijing: Tsinghua University Press, 2008: 286-289.
- [10] 汤 琼.哈密尔顿系统有限元的守恒性和辛性质[D].长沙:湖南师范大学,2007.  
TANG Qiong. Conservation and Symplectic Properties of Continuous Finite Element Methods for Hamiltonian Systems[D]. Changsha: Hunan Normal University, 2007.

(责任编辑:申 剑)