

doi:10.3969/j.issn.1673-9833.2023.01.006

带非线性项的积分器链嵌套饱和时滞控制

刘俊^{1,2}

(1. 湖南机电职业技术学院 信息工程学院, 湖南 长沙 410151; 2. 中南大学 自动化学院, 湖南 长沙 410083)

摘要: 针对带有高阶非线性项的四阶积分器链, 在输入包含时滞的情形下, 提出了一种嵌套饱和控制器, 实现系统的全局渐进稳定。稳定分析分为饱和退化分析和退饱和系统的渐进稳定分析两个阶段。该控制器利用平面转换构造标准型, 进行自然对消, 完成饱和退化分析; 然后, 利用一个重要矩阵不等式和李雅普诺夫定理, 完成渐进稳定分析; 最后, 通过一个惯性摆系统的仿真实验, 验证了控制器的有效性。

关键词: 饱和控制; 稳定性; 积分器链; 输入时滞

中图分类号: TP273

文献标志码: A

文章编号: 1673-9833(2023)01-0040-06

引文格式: 刘俊. 带非线性项的积分器链嵌套饱和时滞控制 [J]. 湖南工业大学学报, 2023, 37(1): 40-45.

Nested Saturation Delay Control of Integrator Chains with Nonlinear Terms

LIU Jun^{1,2}

(1. School of Information Engineering, Hunan College of Electrical and Mechanical Technology, Changsha 410151, China;
2. School of Automation, Central South University, Changsha 410083, China)

Abstract: In view of a fourth-order integrator chain with higher-order nonlinear terms, a nested saturation controller is proposed for a realization of the global asymptotic stability of the system with an input time delay. The stability analysis can be divided into two stages: saturation degradation analysis and asymptotic stability analysis of desaturated systems. The controller uses planar transformation to construct a standard type, followed by a natural cancellation, thus completing the saturation degradation analysis. Then, an important matrix inequality and Lyapunov theorem are used to complete the asymptotic stability analysis. Finally, the effectiveness of the controller is verified by a simulation experiment of an inertial pendulum system.

Keywords: saturation control; stability; integrator chain; input time delay

0 引言

1992年 A. R. Teel 对饱和控制做了开创性工作^[1], 后续国内外学者在饱和控制尤其是输入包含时滞方面做了大量的研究^[2-15], 至今仍然是控制领域的研究

热点之一^[16-19]。F. Mazenc 等^[7-8]首次使用有界和时滞控制解决了多积分器系统的全局稳定问题。随后, 这些成果被推广到前馈非线性系统。其整体思路是利用平面转换, 构造标准型进行自然对消, 完成饱和和退

收稿日期: 2021-12-01

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(61374024); 湖南省自然科学基金资助项目(2020JJ4755, 2021JJ60045); 湖南省教育厅科学研究基金资助项目(20C0712)

作者简介: 刘俊(1984-), 男, 湖南涟源人, 湖南机电职业技术学院高级工程师, 中南大学博士生, 主要研究方向为非线性控制, E-mail: liujun_cug@qq.com

化分析,解决了具有输入时滞的前馈系统全局稳定问题^[9-12]。其中, Ye H. W. 等^[9]提出了一种新的由级联饱和和函数组成的非线性控制器, Zhou B. 等^[6]提出了两种前馈非线性系统的有界时滞控制,包含级联饱和控制器和嵌套饱和控制器。

沿着文献[6]和[9]的思路,针对积分器链,本文提出了一种新的嵌套饱和时滞控制算法。与同类文献相较而言,本文与文献[9]的级联饱和控制不同,本文控制器为嵌套饱和控制,可以处理非线性高阶扰动和输入时滞;相对于文献[6],本文所提出的控制器在系统状态和饱和函数前面都包含了乘性系数,因而具有更强的灵活性;相对于文献[10-12],得益于系统状态和饱和函数都包含可调乘性系数,本文控制器可以处理输入包含较大时滞的情形。

本文首先针对带非线性项积分器链系统,设计坐标变换和控制器;然后进行系统稳定性分析,包括饱和退化分析和退化后系统的渐进稳定分析;最后通过对一个惯性摆实例进行仿真实验,验证所设计控制器的有效性。

1 系统和控制器介绍

带高阶非线性项的积分器链系统为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_3 + f(x_3), \\ \dot{x}_3 = x_4, \\ \dot{x}_4 = u(t-\tau). \end{cases} \quad (1)$$

式中: $x \in \mathbf{R}^4$ 为系统状态; $u(t)$ 为控制输入; $\tau > 0$ 为输入时滞; $f(x_3)$ 为高阶非线性项。

系统(1)满足假设1。

假设1

$$\begin{aligned} |x_3(t-2\tau)| &\leq m, \quad m > 0, \\ |f(x_3(t-2\tau))| &\leq k|x_3(t-2\tau)| \leq km, \quad k > 0. \end{aligned}$$

针对系统(1)设计如下坐标转换:

$$\begin{cases} y_1 = k_4^3 k_3^2 k_2 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 x_1(t-3\tau) + (k_4^2 k_3^2 k_2 \lambda_2 \lambda_3 + k_4^2 k_3 k_2 \lambda_2 \lambda_4 + k_4^2 k_3 \lambda_3 \lambda_4) x_2(t-2\tau) + (k_4 k_3 k_2 \lambda_2 + k_4 k_3 \lambda_3 + k_4 \lambda_4) x_3(t-\tau) + x_4, \\ y_2 = k_4^2 k_3 \lambda_3 \lambda_4 x_2(t-2\tau) + (k_4 k_3 \lambda_3 + k_4 \lambda_4) x_3(t-\tau) + x_4, \\ y_3 = k_4 \lambda_4 x_3(t-\tau) + x_4, \\ y_4 = x_4. \end{cases} \quad (2)$$

式中: $k_i > 0, \lambda_i > 0, i=1, 2, 3, 4$ 。

则系统转换成:

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) = k_4 k_3 k_2 \lambda_2 y_2(t-\tau) + k_4 k_3 \lambda_3 y_3(t-\tau) + k_4 \lambda_4 y_4(t-\tau) + u(t-\tau) + c_1 f(x_3(t-2\tau)), \\ \dot{y}_2(t) = k_4 k_3 \lambda_3 y_3(t-\tau) + k_4 \lambda_4 y_4(t-\tau) + u(t-\tau) + c_2 f(x_3(t-2\tau)), \\ \dot{y}_3(t) = k_4 \lambda_4 y_4(t-\tau) + u(t-\tau), \\ \dot{y}_4(t) = u(t-\tau). \end{cases} \quad (3)$$

式中: $c_1 = k_4^2 k_3^2 k_2 \lambda_2 \lambda_3 + k_4^2 k_3 k_2 \lambda_2 \lambda_4 + k_4^2 k_3 \lambda_3 \lambda_4 > 0$;

$$c_2 = k_4^2 k_3 \lambda_3 \lambda_4 > 0.$$

针对式(3),设计如下嵌套饱和控制器:

$$\begin{cases} u = -k_4 \text{sat}_{\varepsilon_4}(\lambda_4 y_4 + u_3) = -u_4, \\ u_3 = k_3 \text{sat}_{\varepsilon_3}(\lambda_3 y_3 + u_2), \\ u_2 = k_2 \text{sat}_{\varepsilon_2}(\lambda_2 y_2 + u_1), \\ u_1 = k_1 \text{sat}_{\varepsilon_1}(\lambda_1 y_1). \end{cases} \quad (4)$$

式中 sat 为标准饱和函数,且

$$\text{sat}_{\varepsilon} = \text{sgn}(s) \min\{|s|, \varepsilon\}, \quad \forall s \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0;$$

其中 ε 为饱和度。

控制器(4)的参数满足如下条件(5):

$$\begin{cases} \varepsilon_3 < \frac{1}{k_3} \left(\frac{1}{2} - k_4 \lambda_4 \tau \right) \varepsilon_4, \\ \varepsilon_2 < \frac{1}{k_2} \left(\frac{1}{2} - k_4 k_3 \lambda_3 \tau \right) \varepsilon_3, \\ \varepsilon_1 < \frac{1}{k_1} \left[\left(\frac{1}{2} - k_4 k_3 k_2 \lambda_2 \tau \right) \varepsilon_2 - \left(\frac{1}{2} + \lambda_2 \tau \right) c_2 km \right], \\ \varepsilon_1 > \frac{(2\lambda_1 \tau + 1)c_1 km}{1 - 2k_4 k_3 k_2 k_1 \lambda_1 \tau}. \end{cases} \quad (5)$$

引理1^[6] 设 $\gamma > 0, \varepsilon > 0, \beta_1 > 0, \beta_2 > 0$ 为4个给定的数,考虑标量系统:

$$\dot{x}(t) = v(t), \quad v(t) = -\text{sat}_{\varepsilon}(\gamma x(t) + b_1(t)) - b_2(t), \quad t \geq t_0,$$

其中 $b_i(t): [t_0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$, 满足

$$\begin{aligned} |b_i(t)| &\leq \beta_i, \quad i=1, 2, \quad \forall t \geq t_0, \quad \text{且} \\ \beta_1 + \beta_2 &< \varepsilon, \end{aligned} \quad (6)$$

那么存在一个有限时间 $T > t_0$, 满足

$$|\gamma x(t) + b_1(t)| \leq \varepsilon, \quad \forall t \geq T.$$

此外, v 能被简化为

$$v(t) = -\gamma x(t) - b_1(t) - b_2(t), \quad \forall t \geq T.$$

2 渐进稳定性分析

渐进稳定性分析分为饱和退化分析和退饱和和系统的渐进稳定分析两个阶段。首先,针对控制器(4),利用平面转换构造标准型,进行自然对消,完成饱和退化分析;然后,利用一个重要矩阵不等式和李雅普诺夫定理,完成渐进稳定性分析。

2.1 系统饱和退化分析

事实 1 在满足假设 1 和条件 (5) 时, 控制器 (4) 饱和退化。

证明 分别考虑 y_4, y_3, y_2, y_1 子系统。

步骤 1 首先考虑 y_4 子系统

$$\dot{y}_4(t) = u(t-\tau) = -k_4 \text{sat}_{\varepsilon_4}(\lambda_4 y_4(t-\tau) + u_3) \quad (7)$$

式中 $t \geq t_0 + \tau$ 。

将上式两边从 $t-\tau$ 到 t 积分, 得

$$y_4(t-\tau) = y_4(t) + \int_{t-\tau}^t u_4(s-\tau) ds,$$

将其代入式 (7), 得

$$\dot{y}_4(t) = u(t-\tau) = -k_4 \text{sat}_{\varepsilon_4}(\lambda_4 y_4(t) + v_4(t)) \quad (8)$$

式中 $v_4(t) = \lambda_4 \int_{t-\tau}^t u_4(s-\tau) ds + u_3(t-\tau)$ 。

结合式 (4) 有

$$|v_4| = \lambda_4 \int_{t-\tau}^t |u_4(s-\tau)| ds + |u_3(t-\tau)| \leq k_4 \lambda_4 \tau \varepsilon_4 + k_3 \varepsilon_3 \quad (9)$$

由引理 1 可知当 $2(k_4 \lambda_4 \tau \varepsilon_4 + k_3 \varepsilon_3) \leq \varepsilon_4$ (根据条件 (5) 可得) 时, $\exists T_4, \forall t \geq T_4$ 后

$$|\lambda_4 y_4(t-\tau) + u_3(t-\tau)| = |\lambda_4 y_4(t) + v_3(t)| \leq \varepsilon_4,$$

即 $u_4(t-\tau) = k_4(\lambda_4 y_4(t-\tau) + u_3(t-\tau)), \forall t \geq T_4$, 所以 y_4 子系统饱和退化。

步骤 2 分析 y_3 子系统, 当 $t \geq T_4$ 时:

$$\dot{y}_3(t) = k_4 \lambda_4 y_4(t-\tau) + u(t-\tau) = -k_4 u_3(t-\tau) - k_4 k_3 \text{sat}_{\varepsilon_3}(\lambda_3 y_3(t-\tau) + u_2(t-\tau)) \quad (10)$$

将式 (8) 两边从 $t-\tau$ 到 t 积分, 得

$$y_3(t-\tau) = y_3(t) + k_4 \int_{t-\tau}^t u_3(s-\tau) ds,$$

将其代入式 (8), 有

$$\dot{y}_3(t) = -k_4 k_3 \text{sat}_{\varepsilon_3}(\lambda_3 y_3(t) + v_3(t)),$$

式中 $v_3 = k_4 \lambda_3 \int_{t-\tau}^t u_3(s-\tau) ds + u_2(t-\tau)$ 。

结合式 (4) 有

$$|v_3| = k_4 \lambda_3 \int_{t-\tau}^t |u_3(s-\tau)| ds + |u_2(t-\tau)| \leq k_4 k_3 \lambda_3 \tau \varepsilon_3 + k_2 \varepsilon_2 \quad (11)$$

由引理 1, 可知当 $2(k_4 k_3 \lambda_3 \tau \varepsilon_3 + k_2 \varepsilon_2) \leq \varepsilon_3$ (根据条件 (5) 可得) 时, $\exists T_3, \forall t \geq T_3$ 后

$$|\lambda_3 y_3(t-\tau) + u_2(t-\tau)| = |\lambda_3 y_3(t) + v_2(t)| \leq \varepsilon_3,$$

于是有

$$u_3(t-\tau) = k_3(\lambda_3 y_3(t-\tau) + u_2(t-\tau)), \forall t \geq T_3,$$

即 y_3 子系统饱和退化。

步骤 3 分析 y_2 子系统, 当 $t \geq T_3$ 时:

$$\begin{aligned} \dot{y}_2(t) &= -k_4 k_3 u_2(t-\tau) + c_2 f(x_3(t-2\tau)) = \\ &= -k_4 k_3 u_2(t-\tau) + \Delta_2 \triangleq \\ &= -k_4 k_3 k_2 \text{sat}_{\varepsilon_2}(\lambda_2 y_2(t-\tau) + u_1(t-\tau)) + \Delta_2. \end{aligned} \quad (12)$$

式中, $\Delta_2 = c_2 f(x_3(t-2\tau))$, 且由假设 1 可知 $|\Delta_2| = c_2 k m_0$ 。

类似步骤 1 和步骤 2 的分析, 在满足条件 (5) 时, y_2 子系统饱和退化。

步骤 4 分析 y_1 子系统, 当 $t \geq T_2$ 时,

$$\begin{aligned} \dot{y}_1(t) &= -k_4 k_3 k_2 u_1(t-\tau) + c_1 f(x_3(t-2\tau)) \triangleq \\ &= -k_4 k_3 k_2 k_1 \text{sat}_{\varepsilon_1}(\lambda_1 y_1(t-\tau)) + \Delta_1. \end{aligned}$$

类似步骤 1 和步骤 2, 由引理 1, 可知当满足条件 (5) 时, y_1 子系统饱和退化, 证毕。

经上述 4 个步骤后, 系统 (3) 的状态进入区域:

$\Omega = \{y \in \mathbf{R}^4 : |\lambda_4 y_4(t-\tau) + u_3| \leq \varepsilon_4, |\lambda_3 y_3(t-\tau) + u_2| \leq \varepsilon_3, |\lambda_2 y_2(t-\tau) + u_1| \leq \varepsilon_2, |\lambda_1 y_1(t-\tau)| \leq \varepsilon_1\}$, 且退化后的整个系统为

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) = -k_4 k_3 k_2 k_1 \lambda_1 y_1(t-\tau) + c_1 f(x_3(t-2\tau)), \\ \dot{y}_2(t) = -k_4 k_3 k_2 k_1 \lambda_1 y_1(t-\tau) - k_4 k_3 k_2 \lambda_2 y_2(t-\tau) + \\ \quad c_2 f(x_3(t-2\tau)), \\ \dot{y}_3(t) = -k_4 k_3 k_2 k_1 \lambda_1 y_1(t-\tau) - k_4 k_3 k_2 \lambda_2 y_2(t-\tau) - \\ \quad k_4 k_3 \lambda_3 y_3(t-\tau), \\ \dot{y}_4(t) = -k_4 k_3 k_2 k_1 \lambda_1 y_1(t-\tau) - k_4 k_3 k_2 \lambda_2 y_2(t-\tau) - \\ \quad k_4 k_3 \lambda_3 y_3(t-\tau) - k_4 \lambda_4 y_4(t-\tau). \end{cases} \quad (13)$$

由式 (2) 得到

$$f(x_3(t-2\tau)) = (k_4 \lambda_4)^{-1} (y_3(t-\tau) - y_4(t-\tau)),$$

则有

$$\begin{cases} c_1 f(x_3(t-2\tau)) = c_1 \Delta(x_3) x_3(t-2\tau) = \\ \quad \frac{c_1 \Delta(x_3)}{k_4 \lambda_4} (y_3(t-\tau) - y_4(t-\tau)) \triangleq \\ \quad c_3 (y_3(t-\tau) - y_4(t-\tau)), \\ c_2 f(x_3(t-2\tau)) = c_2 \Delta(x_3) x_3(t-2\tau) = \\ \quad \frac{c_2 \Delta(x_3)}{k_4 \lambda_4} (y_3(t-\tau) - y_4(t-\tau)) \triangleq \\ \quad c_4 (y_3(t-\tau) - y_4(t-\tau)), \end{cases} \quad (14)$$

$$\begin{cases} c_3 = \frac{c_1 \Delta(x_3)}{k_4 \lambda_4}, \\ c_4 = \frac{c_2 \Delta(x_3)}{k_4 \lambda_4}, \\ |c_3| \leq \frac{c_1 k}{k_4 \lambda_4}, \\ |c_4| \leq \frac{c_2 k}{k_4 \lambda_4}. \end{cases}$$

2.2 退饱和系统渐进稳定分析

通过上述饱和退化分析, 退化后的系统可以被表述为

$$\dot{y}(t) = \mathbf{A}y(t-\tau) + \Delta \mathbf{A}y(t-\tau). \quad (15)$$

式中:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -k_4 k_3 k_2 k_1 \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ -k_4 k_3 k_2 k_1 \lambda_1 & -k_4 k_3 k_2 \lambda_2 & 0 & 0 \\ -k_4 k_3 k_2 k_1 \lambda_1 & -k_4 k_3 k_2 \lambda_2 & -k_4 k_3 \lambda_3 & 0 \\ -k_4 k_3 k_2 k_1 \lambda_1 & -k_4 k_3 k_2 \lambda_2 & -k_4 k_3 \lambda_3 & -k_4 \lambda_4 \end{pmatrix}; \quad (13)$$

$$\Delta \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c_3 & -c_3 \\ 0 & 0 & c_4 & -c_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (14)$$

因为 $c_3(t)$ 和 $c_4(t)$ 有界, 可以假定:

$$\|\Delta \mathbf{A}(t) \mathbf{y}(t-\tau)\| \leq \alpha \|\mathbf{y}(t-\tau)\|. \quad (15)$$

根据牛顿-莱布尼茨公式, 有

$$\mathbf{y}(t) - \mathbf{y}(t-\tau) = \int_{t-\tau}^t \dot{\mathbf{y}}(s) ds,$$

将其代入式(12)得到:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{y}}(t) &= \mathbf{A} \mathbf{y}(t) - \mathbf{A} \int_{t-\tau}^t \dot{\mathbf{y}}(s) ds + \Delta \mathbf{A}(t) \mathbf{y}(t-\tau) = \\ &= \mathbf{A} \mathbf{y}(t) + \Delta \mathbf{A}(t) \mathbf{y}(t-\tau) - \\ &= \mathbf{A} \int_{t-\tau}^t \mathbf{A} \mathbf{y}(s-\tau) + \Delta \mathbf{A}(s) \mathbf{y}(s-\tau) ds. \end{aligned} \quad (16)$$

然后集中处理系统(16)。

定义矩阵:

$$\mathbf{D} = (0, \sqrt{1/L} \mathbf{A} \mathbf{A}, 0, \sqrt{1/L} \mathbf{A}) \in \mathbf{R}^{4 \times 16}, L > 0 \quad (17)$$

和一个矩阵不等式:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{P} \mathbf{D} \mathbf{D}^T \mathbf{P} + \beta \mathbf{I}_4 \leq 0. \quad (18)$$

式中: $\beta > 0$; $\mathbf{I}_4 \in \mathbf{R}^{4 \times 4}$ 为单位矩阵。

注意到 \mathbf{A} 是一个稳定矩阵, 通过调节 L 和 β , 总是存在一个正定矩阵 \mathbf{P} 满足不等式(18)。

假设 2

$$\tau \leq \sqrt{\frac{\beta - 2\alpha \|\mathbf{P}\|}{L + L\alpha}}. \quad (19)$$

式中 L, β 在(17)(18)中给定; \mathbf{P} 在(18)中定义。

事实 2 在假设 2 前提下, 系统(16)是渐进稳定的。

证明 定义系统(16)的候选李雅普诺夫函数:

$$V(\mathbf{y}) = V_1(\mathbf{y}) + V_2(\mathbf{y}) + V_3(\mathbf{y}). \quad (20)$$

式中: $V_1(\mathbf{y}) \triangleq \mathbf{y}^T \mathbf{P} \mathbf{y}$;

$$V_2(\mathbf{y}) \triangleq L\tau \int_{-2\tau}^t \int_{t+s}^t \mathbf{y}^T(\theta) \mathbf{y}(\theta) d\theta ds;$$

$$\begin{aligned} V_3(\mathbf{y}) &\triangleq L\tau\alpha \int_{-2\tau}^t \int_{t+s}^t \mathbf{y}^T(\theta) \mathbf{y}(\theta) d\theta ds + \\ &\alpha \|\mathbf{P}\| \int_{t-\tau}^t \mathbf{y}^T(s) \mathbf{y}(s) ds. \end{aligned}$$

沿着系统(16)对 $V_1(\mathbf{y})$ 求导:

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(\mathbf{y}) &\leq \mathbf{y}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}) \mathbf{y} + 2\alpha \|\mathbf{P}\| \|\mathbf{y}\| \|\mathbf{y}(s-\tau)\| + \\ &\int_{t-\tau}^t 2 \left[\|\mathbf{y}^T(t) \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{A}\| \|\mathbf{y}(s-\tau)\| + \alpha \|\mathbf{y}^T(t) \mathbf{P} \mathbf{A}\| \|\mathbf{y}(s-\tau)\| \right] ds. \end{aligned}$$

利用不等式

$$2a_1 a_2 \leq (1/l) a_1^2 + l a_2^2, \forall a_1, a_2 \in \mathbf{R}, l > 0,$$

得到

$$\begin{aligned} \int_{t-\tau}^t 2\alpha \|\mathbf{y}^T(t) \mathbf{P} \mathbf{A}\| \|\mathbf{y}(s-\tau)\| ds &\leq \\ &(\alpha/L)\tau \mathbf{y}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{y} + \alpha L\tau \int_{t-2\tau}^{t-\tau} \mathbf{y}^T(s) \mathbf{y}(s) ds \end{aligned}$$

和

$$2\alpha \|\mathbf{P}\| \|\mathbf{y}\| \|\mathbf{y}(s-\tau)\| \leq \alpha \|\mathbf{P}\| \mathbf{y}^T \mathbf{y} + \alpha \|\mathbf{P}\| \mathbf{y}^T(t-\tau) \mathbf{y}(t-\tau).$$

利用公式

$$\frac{d}{dt} \int_{r_2}^{r_1} \int_{t+\lambda}^{t_1} h(\theta) d\theta d\lambda = (r_1 - r_2) h(t) - \int_{t+r_2}^{t+r_1} h(\lambda) d\lambda, r_1 > r_2$$

求 $\dot{V}_2(\mathbf{y})$ 和 $\dot{V}_3(\mathbf{y})$:

$$\dot{V}_2(\mathbf{y}) = L\tau^2 \mathbf{y}^T \mathbf{y} - L\tau \int_{t-2\tau}^{t-\tau} \mathbf{y}^T(s) \mathbf{y}(s) ds;$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_3(\mathbf{y}) &= L\alpha\tau^2 \mathbf{y}^T \mathbf{y} - L\alpha\tau \int_{t-2\tau}^{t-\tau} \mathbf{y}^T(s) \mathbf{y}(s) ds + \\ &\alpha \|\mathbf{P}\| \mathbf{y}^T \mathbf{y} - \alpha \|\mathbf{P}\| \mathbf{y}^T(t-\tau) \mathbf{y}(t-\tau). \end{aligned}$$

因此, $\dot{V}(\mathbf{y})$ 满足:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{y}) &\leq \mathbf{y}^T [\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} + (1/L) \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{A}^T \mathbf{P} + \\ &(\alpha/L) \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{A}^T \mathbf{P} + 2\alpha \|\mathbf{P}\| \mathbf{I}_4 + \tau^2 (L + L\alpha)] \mathbf{y}. \end{aligned} \quad (21)$$

由式(17)和(18), 最终得到

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{y}) &\leq \mathbf{y}^T [\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{P} \mathbf{D} \mathbf{D}^T \mathbf{P}] \mathbf{y} + \\ &\mathbf{y}^T [2\alpha \|\mathbf{P}\| \mathbf{I}_4 + \tau^2 (L + L\alpha)] \mathbf{y} \leq \\ &-\mathbf{y}^T (\beta \mathbf{I}_4) \mathbf{y} + \mathbf{y}^T [2\alpha \|\mathbf{P}\| \mathbf{I}_4 + \tau^2 (L + L\alpha)] \mathbf{y} \leq \\ &-\left[\beta - 2\alpha \|\mathbf{P}\| - \tau^2 (L + L\alpha) \right] \|\mathbf{y}\|^2. \end{aligned}$$

因此, 根据假设 2, 有 $\dot{V}(\mathbf{y}) < 0, \mathbf{y} \neq 0$ 。根据李雅普诺夫定理, 式(16)是渐进稳定的, 证毕。

根据事实 1 和事实 2, 可得本文的重要结论:

定理 1 当假设 1、假设 2 和条件(5)满足时, 系统(3)(4)全局渐进稳定。

注: 本文提出的控制器参数条件较为简单, 且可以同时系统状态和饱和函数前配置系数, 具有较大的灵活性。后续仿真实验说明控制器(4)可以处理较大时滞。

3 仿真实验

考虑惯性摆系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = x_3 + (\sin x_3(t) - x_3(t)), \\ \dot{x}_3(t) = x_4(t), \\ \dot{x}_4(t) = u(t-\tau). \end{cases} \quad (22)$$

式中 $\tau > 0$ 为输入时滞。

令 $f(x_3) = (\sin x_3(t) - x_3(t))$ 作为高阶非线性项, 满足

$$|\sin x_3(t) - x_3(t)| \leq \frac{1}{2} m x_3^2, \forall |x_3| \leq m.$$

根据定理 1 选择控制器 (4) 的参数。

取 $m=0.2$, 则 $|\sin x_3 - x_3| \leq k|x_3|$, $k=0.02$ 。取 $k_1=k_2=k_3=1$, $k_4=0.1$, $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=0.1$, 根据式 (11) 和 (14) 得到 $\|\Delta A\| \leq \alpha = 0.045$ 。设 $L=1$, $\beta=5$, 通过求解方程 (18), 得到 $\|P\|=71.14$, 然后通过式 (19), 计算得到 $\tau \leq 1.966$, 取 $\tau=1.4$, 再根据式 (5) 取 $\varepsilon_1=0.1$, $\varepsilon_2=0.3$, $\varepsilon_3=0.7$, $\varepsilon_4=2$ 。

最终得到系统 (22) 的控制器方程:

$$\begin{cases} u = -0.1 \text{sat}_2(0.1y_4 + u_3) = -u_4, \\ u_3 = \text{sat}_{0.7}(0.1y_3 + u_2), \\ u_2 = \text{sat}_{0.3}(0.1y_2 + u_1), \\ u_1 = \text{sat}_{0.1}(0.1y_1). \end{cases} \quad (23)$$

选取初始条件:

$$(x_1(0), x_2(0), x_3(0), x_4(0)) = (10.14, -0.3, -0.1, 0),$$

对系统 (22) 在控制器方程 (23) 下进行仿真实验得到的仿真结果如图 1 所示。从图 1 可以看出, 在时滞较大的情形下, 系统 (22) 在控制器方程 (23) 下依然可以全局渐进稳定, 说明嵌套饱和时滞控制器 (23) 具有较好的鲁棒性。

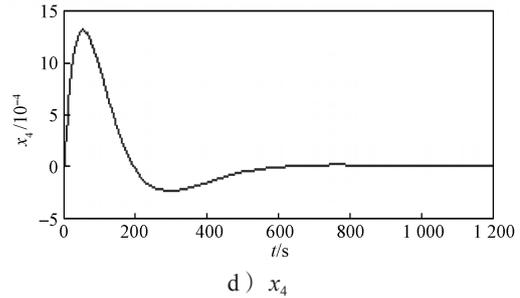
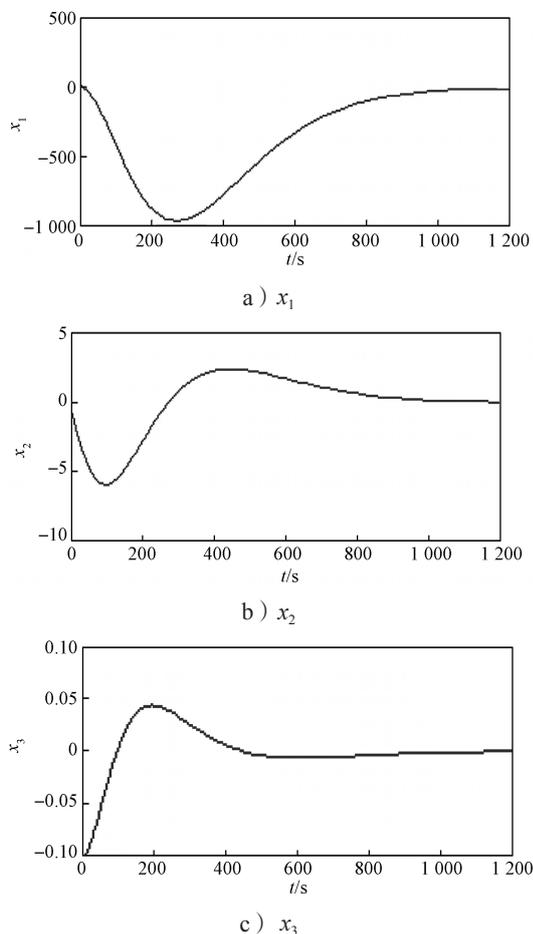


图 1 系统 (22) 在控制器方程 (23) 下的系统状态轨迹
Fig. 1 System state trajectory of system (22) under controller (23)

4 结语

本文提出了一种嵌套饱和时滞控制器, 实现带高阶非线性项四阶积分器系统的全局渐进稳定。系统的稳定分析分为饱和退化分析和退饱和系统两个阶段。首先, 利用平面转换构造标准型, 进行自然对消, 完成饱和和退化分析; 然后, 利用一个重要矩阵不等式和李雅普诺夫定理, 完成渐进稳定分析。最后, 通过一个惯性摆系统的仿真实验, 验证了控制器的有效性。本文的控制器参数条件较为简单, 可以同时在该系统状态和饱和函数前配置乘性系数, 能处理较大时滞, 具备一定的工程价值。后续主要工作是把控制器推广到低阶前馈系统, 并能处理状态系数不确定问题。

参考文献:

- [1] TEEL A R. Global Stabilization and Restricted Tracking for Multiple Integrators with Bounded Controls[J]. Systems & Control Letters, 1992, 18(3): 165-171.
- [2] YE H W. Saturated Delayed Controls for Feedforward Nonlinear Systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2014, 59(6): 1646-1653.
- [3] YE H W, LI M, YANG C H, et al. Finite-Time Stabilization of the Double Integrator Subject to Input Saturation and Input Delay[J]. IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica, 2018, 5(5): 1017-1024.
- [4] LI M, YE H W, KANG J L, et al. New Saturated Delayed Control for a Chain of Integrators with Nonlinear Terms[J]. Asian Journal of Control, 2018, 20(5): 1907-1916.
- [5] ZHOU B, YANG X F. Global Stabilization of the Multiple Integrators System by Delayed and Bounded Controls[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2016, 61(12): 4222-4228.
- [6] ZHOU B, YANG X F. Global Stabilization of Feedforward Nonlinear Time-Delay Systems by Bounded Controls[J]. Automatica, 2018, 88: 21-30.

- [7] MAZENC F, MONDIE S, NICULESCU S I. Global Asymptotic Stabilization for Chains of Integrators with a Delay in the Input[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2003, 48(1): 57–63.
- [8] MAZENC F, MONDIE S, FRANCISCO R. Global Asymptotic Stabilization of Feedforward Systems with Delay in the Input[J]. 42nd IEEE International Conference on Decision and Control (IEEE Cat No 03CH37475), 2003, 4: 4020–4025.
- [9] YE H W, JIANG Z P, GUI W H, et al. Decentralized Stabilization of Large-Scale Feedforward Systems Using Saturated Delayed Controls[J]. Automatica, 2012, 48(1): 89–94.
- [10] KRSTIC M. Input Delay Compensation for Forward Complete and Strict-Feedforward Nonlinear Systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2010, 55(2): 287–303.
- [11] ZHANG X, GAO H, ZHANG C. Global Asymptotic Stabilization of Feedforward Nonlinear Systems with a Delay in the Input[J]. International Journal of Systems Science, 2006, 37: 141–148.
- [12] ZHANG X F, BOUKAS E K, LIU Y G, et al. Asymptotic Stabilization of High-Order Feedforward Systems with Delays in the Input[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2010, 20(12): 1395–1406.
- [13] MOULAY E, DAMBRINE M, YEGANEFAR N, et al. Finite-Time Stability and Stabilization of Time-Delay Systems[J]. Systems & Control Letters, 2008, 57(7): 561–566.
- [14] YAKOUBI K, CHITOUR Y. Linear Systems Subject to Input Saturation and Time Delay: Global Asymptotic Stabilization[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2007, 52(5): 874–879.
- [15] LI M, DING S H, YE H W, et al. Parameterisation of a Special Class of Saturated Controllers and Application to Mechanical Systems[J]. IET Control Theory & Applications, 2017, 11(17): 3146–3155.
- [16] LIU J, YE H W, QI X T. Stabilization of a Class of Uncertain Feedforward Nonlinear Systems Subject to Input Delay[J]. International Journal of Systems Science, 2021, 52(7): 1466–1478.
- [17] 李延波, 陈超洋, 张晶华, 等. 分布时滞随机偏微分系统的均方指数稳定性 [J/OL]. 控制理论与应用, [2021–12–27]. <http://kns.cnki.net/kcms/detail/44.1240.tp.20210930.1857.012.html>.
LI Yanbo, CHEN Chaoyang, ZHANG Jinghua, et al. Mean Square Exponential Stability of Stochastic Partial Differential Systems with Distributed Delays[J/OL]. Control Theory & Applications, [2021–12–27]. <http://kns.cnki.net/kcms/detail/44.1240.tp.20210930.1857.012.html>.
- [18] 彭思源, 肖会芹, 林惠潮. 时变时滞广域电力系统稳定性分析 [J]. 湖南工业大学学报, 2021, 35(3): 62–67.
PENG Siyuan, XIAO Huiqin, LIN Huichao. Stability Analysis of the Wide-Area Power System with Time-Varying Delay[J]. Journal of Hunan University of Technology, 2021, 35(3): 62–67.
- [19] ZHAO Dong, LI Tingting, YIN Hao. Stability and Stabilization of a Class of Fractional-Order Nonlinear Delayed Systems[J]. 工程数学学报, 2020, 37(5): 642–650.
ZHAO Dong, LI Tingting, YIN Hao. Stability and Stabilization of a Class of Fractional-Order Nonlinear Delayed Systems[J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics, 2020, 37(5): 642–650.

(责任编辑: 申 剑)