doi:10.3969/j.issn.1673-9833.2022.05.003

地基附加应力改进计算方法及其规律分析

贺　敏[1]，仰宗宝[1]，徐卓君[1]，曹文贵[2]，张　超[3]，徐　赞[4]

（1. 湖南工业大学 土木工程学院，湖南 株洲 412007；2. 湖南大学 岩土工程研究所，湖南 长沙 410082；
3. 湖南科技大学 岩土工程稳定控制与健康监测湖南省重点实验室，湖南 湘潭 411201；
4. 湖南城市学院 土木工程学院，湖南 益阳 413000）

摘　要：地基附加应力解析方法是地基稳定性分析的关键，目前工程中普遍采用基于半无限连续线弹性体理论力学分析地基附加应力，然而地基土体并非连续线弹性体，而是由大量大小相差悬殊的颗粒无序堆积而成的散粒体。因此，首先考虑地基土散体介质特征，建立了基于竖向矩形均布荷载作用下的地基附加应力改进计算方法，并验证了其合理性；在此基础上，基于正交试验设计方法分析了竖向均布荷载大小、内摩擦角、颗粒不均匀系数等参数对地基附加应力的影响规律。结果表明，影响附加应力的因素按其影响程度由大至小依次为荷载大小、颗粒不均匀系数、内摩擦角，且附加应力随颗粒不均匀系数和内摩擦角的增加而减小，随外加荷载的增大而增大，而其增量随荷载增大而逐渐减小。

关键词：地基；附加应力；散体特征；正交试验

中图分类号：TU431　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673-9833(2022)05-0020-09

引文格式: 贺　敏，仰宗宝，徐卓君，等. 地基附加应力改进计算方法及其规律分析[J]. 湖南工业大学学报，2022，36(5)：20-28.

An Improved Calculation Approach of Subgrade Additional Stress with Its Law Analysis

HE Min[1]，YANG Zongbao[1]，XU Zhuojun[1]，CAO Wengui[2]，ZHANG Chao[3]，XU Zan[4]

（1. College of Civil Engineering，Hunan University of Technology，Zhuzhou Hunan 412007，China；
2. Institute of Geotechnical Engineering，Hunan University，Changsha 410082，China；3. Hunan Provincial Key Laboratory of Geotechnical Engineering for Stability Control and Health Monitoring，Hunan University of Science and Technology，Xiangtan Hunan 411201，China；4. School of Civil Enginnering，Hunan City University，Yiyang Hunan 413000，China）

Abstract：Due to the fact that the analytical method of foundation additional stress is the key of foundation stability analysis, the mechanical analysis of foundation additional stress based on semi-infinite continuous linear elastomer theory is widely used in engineering currently. However, the soil is not continuous line-elastic materials, but granular materials with particles of different sizes and disorderly arrangement. Therefore, with the characteristics of foundation soil bulk medium taken into consideration, an improved calculation method of foundation additional stress under vertical rectangular uniformly distributed load has thus been established, with its rationality to be verified. On this basis, by adopting the orthogonal experimental design method, an analysis has been made of the effects of vertical uniformly distributed load, internal friction angle and particle non-uniformity coefficient on the additional stress of

收稿日期：2021-11-20

基金项目：国家自然科学基金资助项目（51909086）；湖南省自然科学基金资助项目（2020JJ5131）；湖南省教育厅科研基金资助项目（18C0505，19C0570，20C0371）；国家级大学生创新创业训练计划基金资助项目（202111527033）

作者简介：贺　敏（1988-），女，湖南益阳人，湖南工业大学讲师，博士，主要研究方向为土力学理论，
E-mail：hemin@hut.edu.cn

foundation. The results show that the factors affecting the additional stress include the load size, particle non-uniformity coefficient and internal friction angle in a descending order. What’s more, the additional stress decreases with the increase of particle non-uniformity coefficient and internal friction angle, while increases positively with the applied load, with its increment decreasing gradually with the increase of load.

Keywords：subgrade；additional stress；bulk medium characteristics；orthogonal test

0　引言

地基在外荷载作用下的应力分布是基础工程设计的重要依据 [1]。目前，工程中普遍运用弹性力学理论 [2–4] 计算地基土体的附加应力，该方法假定地基土体是均匀和各向同性的弹性介质体。然而实际上地基土体并非连续弹性介质体，而是由若干大小相差悬殊的细小颗粒堆积而成的碎散体，其工程力学性质更加接近于散体介质 [5–6]。可见，建立考虑土体散体特征的地基附加应力解析方法是岩土工程亟待解决的关键问题，这正是本文研究的出发点。

目前，基于弹性力学理论的附加应力解析解（Boussinesq 解 [2]、Mindlin 解 [3]、Flamant 解 [4] 等）在工程中应用广泛，而针对不同的工程环境和外荷载条件，国内外学者们在经典附加应力解析解的基础上进行了适当的改进，并建立了梯形荷载 [7]、轴对称山体荷载 [8] 作用下，路基 [9–10]、桥头 [11] 等工程背景下，地基土体内部的任意一点 [12] 等，可应用于不同工况的地基附加应力解析解，但经典的解析方法及其改进解析方法的研究，均是以地基土体为连续均匀弹性体为假设前提的。

众多学者认为，土体是由大量土石颗粒组成的散粒集合体，其应力传递机理、响应机制以及分布规律等均与连续弹性介质不同，于是，一些考虑土体散体介质特征的附加应力解析方法应运而生。学者们采用试验探究 [13–17]、离散元数值模拟 [18–20] 等多种方法对地基附加应力传递及其分布规律进行了探讨，并且进一步研究了其理论解析方法 [21–24]，这为工程应用提供了有力的依据。

韦珊珊 [13] 采用声波测试技术、刘源等 [14] 采用光弹试验、J. M. Erikson[15]、蒋红英等 [16] 采用压痕试验、Wang C. D. 等 [17] 采用模型试验，分别探究了散体介质在竖向静荷载作用下的附加应力传递机理及分布规律，均认为散体介质附加应力传递的扩散范围比连续介质（外荷载作用下附加应力扩散范围为半无限空间）的要窄小；C. Goldenberg 等 [18–20] 采用离散元数值模拟，探究了散体介质在外荷载作用下的应力响应机制，均认为散体介质在外荷载作用下的应力是通过颗粒间的接触和相互作用而向下扩散传递的，散体介质内部形成了明显强弱有别的力链，且其应力扩散范围为以荷载作用域为顶面的锥体；此外，代志宏等 [21] 考虑颗粒粒径、胶结力、静水压力等因素对土颗粒单独进行受力分析，建立了附加应力分析的细观模型；蒋红英等 [22] 引入概率理论，建立了二维有序散体介质的附加应力传递模型；廖智强等 [23] 考虑土颗粒无序排列的复杂性，建立了地基附加应力的概率论解析解；曹文贵等 [24] 将附加应力传递范围视为半无限锥体，推导了竖向圆形均布荷载作用下的地基土附加应力解析解。

上述关于散体颗粒介质的附加应力传递及其分布规律的研究，为地基附加应力解析方法的进一步发展指明了方向。因此，贺敏 [20] 在已有研究的基础上，考虑了土体颗粒的力学性质、外荷载大小等因素，对地基土附加应力传递机理及其分布规律展开了初步研究，提出了考虑散体特征的地基土附加应力解析方法。然而，该方法建立的竖向矩形均布荷载作用下的地基附加应力二维积分隐式解，不便被应用于工程实践中，因此，本文拟在此研究的基础上，考虑地基土体的散体介质特征，建立基于 Boussinesq 解的竖向矩形均布荷载作用下，地基附加应力的改进计算方法，并且对此进行参数分析，以进一步探究地基附加应力的分布规律。

1　竖向均布荷载作用下的附加应力二维积分表达式

竖向均布荷载作用下，考虑散体介质特征的地基附加应力二维积分隐式解析解参见文献 [20]。

1.1　附加应力响应范围的边界分析模型

通过 PFC（particle flow code）数值模拟分析，综合考虑土颗粒大小级配、土颗粒相互作用及外加荷载等因素，分析各因素对地基附加应力响应的影响规律，建立如图 1 所示竖向均布荷载作用下附加应力响应范围的边界分析模型。

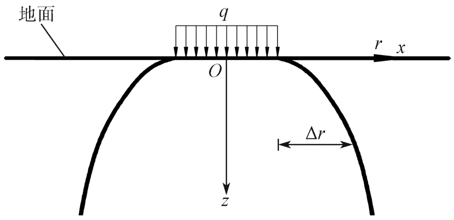


图 1　均布荷载下地基附加应力响应范围的边界分析模型

Fig. 1　Boundary analysis model of the additional stress response range of the subgrade under a uniformly-distributed load

竖向均布荷载作用下地基附加应力响应范围边界分析模型，采用边界曲线上某点到荷载作用域边缘的水平距离 Δr 来描述，其计算式如下：

$$\Delta r = f(z) = \left(\beta_0 + \beta_1\varphi + \beta_2 C_u + \beta_3 q + \beta_4\varphi C_u + \beta_5 C_u q + \beta_6\varphi q + \beta_7\varphi C_u q\right)\cdot\frac{z}{\beta_8+\beta_9 z}, \quad (1)$$

式中：z 为双曲线上某点到荷载作用域边缘的竖向距离（m）；φ 为土体内摩擦角（rad）；q 为均布荷载（MPa）；C_u 为土体颗粒不均匀系数；β_i（i=0, 1, …, 9）为参数，其取值如表 1 所示[20]。

表 1　边界分析模型参数取值

Table 1　Parameter values of boundary analysis model

β_0	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5	β_6	β_7	β_8	β_9
−4.70	7.99	0.36	32.16	−0.53	−2.54	−52.07	4.54	0.38	0.66

1.2　集中荷载作用下的附加应力

将附加应力响应范围内的土体视为整体，引入 Love 位移函数，用弹性力学方法推导，得竖向集中荷载下地基附加应力分量解析解如式（2）所示。

$$\begin{cases}\sigma_x = \dfrac{F}{2\pi k}\left\{\dfrac{3g(z)x^2}{L^5} + (1-2\mu)\cdot\left[\dfrac{(1+t)L^2 - g(z)\left(L+g(z)\right)}{L^3\left(L+g(z)\right)} - \dfrac{(1+t)\left(2L+g(z)\right)x^2}{L^3\left(L+g(z)\right)^2}\right]\right\},\\ \sigma_y = \dfrac{F}{2\pi k}\left\{\dfrac{3g(z)y^2}{L^5} + (1-2\mu)\cdot\left[\dfrac{(1+t)L^2 - g(z)\left(L+g(z)\right)}{L^3\left(L+g(z)\right)} - \dfrac{(1+t)\left(2L+g(z)\right)y^2}{L^3\left(L+g(z)\right)^2}\right]\right\},\\ \sigma_z = \dfrac{F}{2\pi k}\left[\dfrac{3g^3(z)}{L^5} - \dfrac{t(1-2\mu)g(z)}{L^3}\right]。\end{cases} \quad (2)$$

式中：σ_x、σ_y 分别为附加应力所求点 M 的 x、y 方向的水平正应力；σ_z 为附加应力所求点 M 的竖向正应力；F 为集中荷载；(x, y, z) 为所求点 M 的坐标；μ 为土体泊松比；

$$g(z) = \frac{f(z)}{f'(z)}; \quad (3)$$

$$L = \sqrt{x^2 + y^2 + g^2(z)}; \quad (4)$$

$$t = \frac{g(z)}{\sqrt{f^2(z) + g^2(z)}}; \quad (5)$$

$$k = 1 - (1-2\mu)t + (1-2\mu)t^2 - t^3。 \quad (6)$$

1.3　竖向均布荷载作用下的附加应力

基于应力叠加原理，将竖向均布荷载作用域划分为若干微元，视微元上的荷载为集中荷载，将若干集中荷载在点 M 处所产生的应力叠加，即为均布荷载在点 M 处所产生的附加应力。以最常见的矩形均布荷载为例，以矩形荷载作用域的任一角点为坐标原点，建立直角坐标系，对集中荷载作用下的地基附加应力在荷载作用域内进行面积积分，如图 2 所示，即可得到竖向矩形均布荷载作用下附加应力分量二维积分表达式，如式（7）所示。

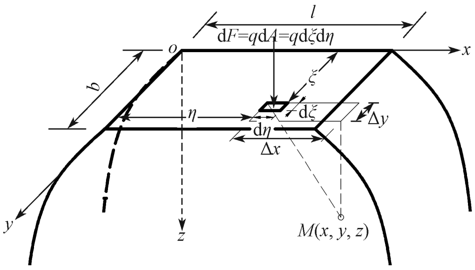


图 2　竖向矩形均布荷载作用下附加应力计算模型

Fig. 2　Analysis model of additional stress under a vertical rectangular uniformly-distributed load

$$\begin{cases}\sigma_x = \displaystyle\int_0^l\int_0^b \frac{q}{2\pi\Delta k}\left\{\frac{3g(z)\Delta x^2}{\Delta L^5} + (1-2\mu)\cdot\left[\frac{(1+\Delta t)\Delta L^2 - g(z)\left(\Delta L+g(z)\right)}{\Delta L^3\left(\Delta L+g(z)\right)} - \frac{(1+\Delta t)\left(2\Delta L+g(z)\right)\Delta x^2}{\Delta L^3\left(\Delta L+g(z)\right)^2}\right]\right\}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta,\\ \sigma_y = \displaystyle\int_0^l\int_0^b \frac{q}{2\pi\Delta k}\left\{\frac{3g(z)\Delta y^2}{\Delta L^5} + (1-2\mu)\cdot\left[\frac{(1+\Delta t)\Delta L^2 - g(z)\left(\Delta L+g(z)\right)}{\Delta L^3\left(\Delta L+g(z)\right)} - \frac{(1+\Delta t)\left(2\Delta L+g(z)\right)\Delta y^2}{\Delta L^3\left(\Delta L+g(z)\right)^2}\right]\right\}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta,\\ \sigma_z = \displaystyle\int_0^l\int_0^b \frac{q}{2\pi\Delta k}\left[\frac{3g^3(z)}{\Delta L^5} - \frac{\Delta t(1-2\mu)g(z)}{\Delta L^3}\right]\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta。\end{cases} \quad (7)$$

式中：l 为荷载作用域长；b 为荷载作用域宽；$q\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta$ 为微元集中力 $\mathrm{d}F$，其中，$0<\xi<b$，$0<\eta<l$；

$$\begin{cases}\Delta x = x-\xi,\\ \Delta y = y-\eta;\end{cases} \tag{8}$$

$$\Delta L=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+g^2(z)}\;; \tag{9}$$

$$\Delta t=\frac{g(z)}{\sqrt{f^2(z)+g^2(z)}}\;; \tag{10}$$

$$\Delta k=1-(1-2\mu)\Delta t+(1-2\mu)\Delta t^2-\Delta t^3\text{。} \tag{11}$$

2　竖向矩形均布荷载作用角点下的附加应力解析解

为便于积分，取竖向矩形均布荷载作用域角点下 M 点（位于直角坐标系 z 轴上），则 x=0，y=0，代入式（7）和（8），可得

$$\begin{cases}\sigma_x=\int_0^l\int_0^b\frac{q}{2\pi\Delta k}\left\{(1+\Delta t)(1-2\mu)\cdot\left[\frac{g(z)\xi^2}{\Delta L^3\left(\Delta L^2-g^2(z)\right)}-\frac{2\xi^2}{\Delta L\left(\Delta L+g(z)\right)^2\left(\Delta L-g(z)\right)}\right]+\frac{3\xi^2g(z)}{\Delta L^5}-\frac{(1-2\mu)g(z)}{\Delta L^3}+\frac{(1+\Delta t)(1-2\mu)}{\Delta L\left(\Delta L+g(z)\right)}\right\}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta,\\ \sigma_y=\int_0^l\int_0^b\frac{q}{2\pi\Delta k}\left\{(1+\Delta t)(1-2\mu)\left[\frac{g(z)\eta^2}{\Delta L^3\left(\Delta L^2-g^2(z)\right)}-\frac{2\eta^2}{\Delta L\left(\Delta L+g(z)\right)^2\left(\Delta L-g(z)\right)}\right]+\frac{3\eta^2g(z)}{\Delta L^5}-\frac{(1-2\mu)g(z)}{\Delta L^3}+\frac{(1+\Delta t)(1-2\mu)}{\Delta L\left(\Delta L+g(z)\right)}\right\}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta,\\ \sigma_z=\int_0^l\int_0^b\frac{q}{2\pi\Delta k}\left[\frac{3g^3(z)}{\Delta L^5}-\frac{\Delta t(1-2\mu)g(z)}{\Delta L^3}\right]\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\text{。}\end{cases} \tag{12}$$

下面以水平附加应力和竖向附加应力为例，推导二维积分表达式的附加应力显式解析解。

2.1　水平附加应力分量的推导

式（12）中，水平附加应力 σ_x 经过整合后的表达式如下：

$$\sigma_x=\int_0^b\int_0^l\frac{q}{2\pi\Delta k}\left\{(1+\Delta t)(1-2\mu)\left[\frac{\xi^2+g^2(z)}{g^3(z)\Delta L}-\frac{\xi^2}{g^2(z)\left(\Delta L+g(z)\right)^2}-\frac{\xi^2+g^2(z)}{g^3(z)\left(\Delta L+g(z)\right)}\right]+\frac{3\xi^2g(z)}{\Delta L^5}-\frac{(1-2\mu)\left[(1+\Delta t)\xi^2+g^2(z)\right]}{g(z)\Delta L^3}\right\}\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\xi, \tag{13}$$

对 η 积分并整理后，得式如下：

$$\sigma_x=\frac{ql}{2\pi\Delta k}\int_0^b\left\{\frac{2\xi^2g(z)l^2}{\left(\xi^2+g^2(z)\right)^2\Delta L^3}+\frac{3\xi^2g(z)}{\left(\xi^2+g^2(z)\right)\Delta L^3}-\frac{(1-2\mu)(1+\Delta t)\xi^2}{g(z)\left(\xi^2+g^2(z)\right)\Delta L}-\frac{(1-2\mu)g(z)}{\left(\xi^2+g^2(z)\right)\Delta L}+(1+\Delta t)(1-2\mu)\left[\frac{\Delta L}{\left(l^2+\xi^2\right)g(z)}-\frac{1}{l^2+\xi^2}\right]\right\}\mathrm{d}\xi\text{。} \tag{14}$$

令 $\xi=g(z)\tan t$，$\mathrm{d}\xi=g(z)\sec^2 t\mathrm{d}t$，代入式（14）并整理后，可得：

$$\sigma_x=\frac{ql}{2\pi\Delta k}\int_0^{\arctan\frac{b}{g(z)}}\left\{\frac{2(\sin^2 t)l^2}{\left(g^2(z)\sec^2 t+l^2\right)^{\frac{3}{2}}}+\frac{3\tan^2 tg^2(z)}{\left(g^2(z)\sec^2 t+l^2\right)^{\frac{3}{2}}}-\frac{(1-2\mu)(1+\Delta t)\tan^2 t}{\left(g^2(z)\sec^2 t+l^2\right)^{\frac{1}{2}}}-\frac{1-2\mu}{\left(g^2(z)\sec^2 t+l^2\right)^{\frac{1}{2}}}\right\}\mathrm{d}t+\frac{ql}{2\pi\Delta k}\cdot\int_0^b\left\{(1+\Delta t)(1-2\mu)\left[\frac{\left(g^2(z)+\xi^2+l^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(l^2+\xi^2\right)g(z)}-\frac{1}{l^2+\xi^2}\right]\right\}\mathrm{d}\xi\text{。} \tag{15}$$

令 $\beta=\sin t$，$\mathrm{d}\beta=\cos t\mathrm{d}t$，$\cos^2 t=1-\beta^2$，$\sec^2 t=\frac{1}{1-\beta^2}$，$\tan^2 t=\frac{\beta^2}{1-\beta^2}$，代入式（15）并整理后，可得：

$$\sigma_x=\frac{ql}{2\pi\Delta k}\int_0^{\frac{b}{\sqrt{g^2(z)+b^2}}}\left[\frac{2b^2\left(1-\beta^2\right)\beta^2}{\left(g^2(z)+l^2\left(1-\beta^2\right)\right)^{\frac{3}{2}}}+\frac{3g^2(z)\beta^2}{\left(g^2(z)+l^2\left(1-\beta^2\right)\right)^{\frac{3}{2}}}-\frac{(1-2\mu)(1+\Delta t)\beta^2}{\left(1-\beta^2\right)\left(g^2(z)+l^2\left(1-\beta^2\right)\right)^{\frac{1}{2}}}-\frac{1-2\mu}{\left(g^2(z)+l^2\left(1-\beta^2\right)\right)^{\frac{1}{2}}}\right]\mathrm{d}\beta+\frac{ql(1+\Delta t)(1-2\mu)}{2\pi\Delta k}\cdot\int_0^b\left[\frac{\left(g^2(z)+\xi^2+l^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(l^2+\xi^2\right)g(z)}-\frac{1}{l^2+\xi^2}\right]\mathrm{d}\xi\text{。} \tag{16}$$

对 β 和 ξ 积分并整理后，可得：

$$\sigma_x=\frac{q}{2\pi\Delta k}\cdot\left[\left(1+\left(1-\mu\right)\Delta t\right)\arcsin\frac{lb}{\sqrt{g^2(z)+b^2}\sqrt{g^2(z)+l^2}}-\frac{g(z)bl}{\sqrt{g^2(z)+l^2+b^2}\left(g^2(z)+b^2\right)}\right]+\frac{q\left(1+\Delta t\right)\left(1-2\mu\right)}{2\pi\Delta k}\cdot\left[\arctan\frac{g(z)b}{l\sqrt{g^2(z)+b^2+l^2}}-\arctan\frac{b}{l}\right]。\quad(17)$$

令 $m=l/b$，$n=g(z)/b$，代入式（17）并整理后，可得：

$$\sigma_x=\frac{q}{2\pi\Delta k}\left[\left(1+\left(1-\mu\right)\Delta t\right)\arctan\frac{m}{n\sqrt{n^2+m^2+1}}-\frac{mn}{\sqrt{n^2+m^2+1}\left(n^2+1\right)}\right]+\frac{q\left(1+\Delta t\right)\left(1-2\mu\right)}{2\pi\Delta k}\cdot\left[\arctan\frac{n}{m\sqrt{n^2+m^2+1}}-\arctan\frac{1}{m}\right]。\quad(18)$$

式（18）即为考虑散体特征的竖向矩形均布荷载作用角点下水平附加应力分量的显式表达式。

2.2 竖向附加应力分量的推导

式（12）中，竖向附加应力 σ_z 经过整合后，其表达式如下：

$$\sigma_z=\int_0^l\int_0^b\frac{q}{2\pi\Delta k}\left[\frac{3g^3(z)}{\Delta L^5}-\frac{\Delta t\left(1-2\mu\right)g(z)}{\Delta L^3}\right]\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta。\quad(19)$$

对 ξ 积分并整理后，可得：

$$\frac{2\pi\Delta k}{q}\sigma_z=\int_0^l\left[3g^3(z)\frac{2b^3+3b\left(\eta^2+g^2(z)\right)}{3\left(\eta^2+g^2(z)\right)^2\Delta L^3}-\Delta t\left(1-2\mu\right)g(z)\frac{b}{\left(\eta^2+g^2(z)\right)\Delta L}\right]\mathrm{d}\eta。\quad(20)$$

令 $\eta=g(z)\tan t$，$\mathrm{d}\eta=g(z)\sec^2t\mathrm{d}t$，代入式（20）并整理后，可得：

$$\frac{2\pi\Delta k}{bq}\sigma_z=\int_0^{\arctan\frac{l}{g(z)}}\left[2b^2\frac{\cos^5t}{\left(g^2(z)+b^2\cos^2t\right)^{\frac{3}{2}}}+3g^2(z)\frac{\cos^3t}{\left(g^2(z)+b^2\cos^2t\right)^{\frac{3}{2}}}-\Delta t\left(1-2\mu\right)\frac{\cos t}{\left(g^2(z)+b^2\cos^2t\right)^{\frac{1}{2}}}\right]\mathrm{d}t。\quad(21)$$

令 $\beta=\sin t$，$\mathrm{d}\beta=\cos t\mathrm{d}t$，$\cos^2t=1-\beta^2$，代入式（21）并整理后，可得：

$$\frac{2\pi\Delta k}{bq}\sigma_z=\int_0^{\frac{l}{\sqrt{g^2(z)+l^2}}}\left[2b^2\frac{\left(1-\beta^2\right)^2}{\left(g^2(z)+b^2\left(1-\beta^2\right)\right)^{\frac{3}{2}}}+3g^2(z)\frac{1-\beta^2}{\left(g^2(z)+b^2\left(1-\beta^2\right)\right)^{\frac{3}{2}}}-\Delta t\left(1-2\mu\right)\frac{1}{\left(g^2(z)+b^2\left(1-\beta^2\right)\right)^{\frac{1}{2}}}\right]\mathrm{d}\beta。\quad(22)$$

对 β 积分并整理后，可得：

$$\sigma_z=\frac{q}{2\pi\Delta k}\left[\frac{g(z)lb}{\left(g^2(z)+b^2\right)\sqrt{g^2(z)+b^2+l^2}}+\frac{g(z)lb}{\left(g^2(z)+l^2\right)\sqrt{g^2(z)+b^2+l^2}}+\left(1-\Delta t\left(1-2\mu\right)\right)\cdot\arcsin\frac{lb}{\sqrt{g^2(z)+l^2}\sqrt{g^2(z)+b^2}}\right]。\quad(23)$$

令 $m=l/b$、$n=g(z)/b$，代入式（23）并整理后，可得：

$$\sigma_z=\frac{q}{2\pi\Delta k}\left[\frac{mn}{\left(n^2+1\right)\sqrt{n^2+m^2+1}}+\frac{mn}{\left(n^2+m^2\right)\sqrt{n^2+m^2+1}}+\left(1-\Delta t\left(1-2\mu\right)\right)\cdot\arctan\frac{m}{n\sqrt{n^2+m^2+1}}\right]。\quad(24)$$

式（24）即为考虑散体特征的竖向矩形均布荷载作用时，角点下竖向附加应力分量的显式表达式。

2.3 附加应力的解析解表达式

由上述公式推导可知，竖向矩形均布荷载作用时，角点下竖向附加应力的解析解如下：

$$\begin{cases}\sigma_x=\dfrac{q}{2\pi\Delta k}\left[\left(1+\left(1-\mu\right)\Delta t\right)\arctan\dfrac{mn}{\sqrt{n^2+m^2+1}}\cdot\left(\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{1}{n^2+1}\right)\right]+\dfrac{q\left(1+\Delta t\right)\left(1-2\mu\right)}{2\pi\Delta k}\cdot\left[\arctan\dfrac{n}{m\sqrt{n^2+m^2+1}}-\arctan\dfrac{1}{m}\right],\\ \sigma_y=\dfrac{q}{2\pi\Delta k}\left[\left(1+\left(1-\mu\right)\Delta t\right)\arctan\dfrac{mn}{\sqrt{n^2+m^2+1}}\cdot\left(\dfrac{1}{m^2}-\dfrac{1}{m^2+1}\right)\right]+\dfrac{q\left(1+\Delta t\right)\left(1-2\mu\right)}{2\pi\Delta k}\cdot\left[\arctan\dfrac{m}{n\sqrt{n^2+m^2+1}}-\arctan\dfrac{1}{n}\right],\\ \sigma_z=\dfrac{q}{2\pi\Delta k}\left[\dfrac{mn}{\sqrt{n^2+m^2+1}}\left(\dfrac{1}{n^2+1}+\dfrac{1}{n^2+m^2}\right)+\left[1-\Delta t\left(1-2\mu\right)\right]\arctan\dfrac{m}{n\sqrt{n^2+m^2+1}}\right]。\end{cases}\quad(25)$$

式中：$m=l/b$；$n=g(z)/b$；$g(z)$ 见式（1）与式（3）；Δt 见式（10）；Δk 见式（11）。

式（25）即为考虑散体特征的竖向矩形均布荷载作用时角点下附加应力的解析解。

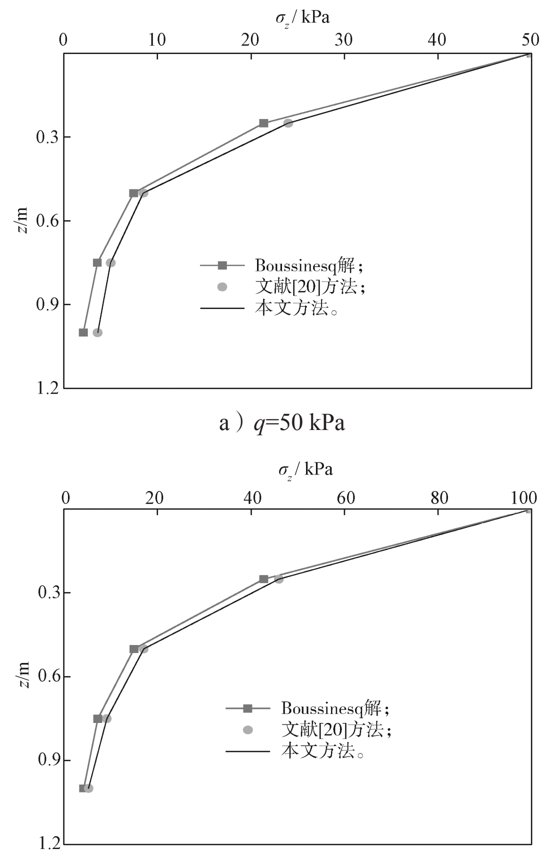
3　显式解析解的合理性验证

本研究是在考虑散体特征的地基附加应力隐式解析解 [20] 的基础上，推导得到的显式解析解（见上文中式（25））。而且文献 [20] 采用室内模型试验和 PFC 颗粒流数值模拟试验，已经对隐式解的合理性和适用性进行了验证。研究结果表明：文献 [20] 的方法与 Boussinesq 解相比更接近试验监测值，这是由于 Boussinesq 解将地基土体视为半无限的线弹性连续介质，未考虑地基土物理力学参数以及荷载大小对附加应力响应范围的影响，而文献 [20] 的方法将地基土体视为散体介质，考虑了土体物理力学参数对附加应力响应范围及其解析解的影响，理论上更加符合实际情况。

下面将对比分析本文推导得到的显式解析解（见式（25））与文献 [20] 中隐式解（见式（12））以及 Boussinesq 解，在竖向矩形均布荷载中心线上的竖向附加应力 σ_z 的计算结果，以验证本文显式解析解的合理性和可行性。

由于式（25）为竖向矩形均布荷载角点下附加应力的解析解，因此，需采用“角点法”确定矩形均布荷载中心线上的竖向附加应力 σ_z。本研究中将矩形均布荷载划分为 4 个小矩形，计算一个小矩形在角点下产生的附加应力，再乘以 4 即可得到矩形的竖向附加应力值。文献 [20] 中的模型试验参数设置如下：荷载作用域的尺寸 $l\times b$ 为 0.3 m×0.3 m，泊松比 μ 为 0.2，内摩擦角 φ 为 35°，颗粒不均匀系数 C_u 为 10，所求点埋深 z 分别为 0, 0.25, 0.50, 0.75, 1.00 m，均布荷载大小分别为 50, 100 kPa。据此参数，按式（25）、文献 [20] 中隐式解和 Boussinesq 解分别计算矩形均布荷载中心线上的竖向附加应力 σ_z，所得结果如图 3 所示。

由图 3 可以得知，以本文推导得到的竖向矩形均布荷载作用下地基附加应力改进解析方法计算得到的附加应力随深度的分布形态，与 Boussinesq 解计算得到的分布形态基本相同，即在荷载中心线上的附加应力均随着深度的增加而逐渐递减。由此可知，本文推导的显式解析解合理且可行，是一种考虑散体介质特征的竖向矩形均布荷载作用下地基附加应力改进计算方法。



a）q=50 kPa

b）q=100 kPa

图 3　不同方法的竖向附加应力对比分析曲线

Fig. 3　Comparative analysis curves of vertical additional stress with different methods adopted

4　各因素对附加应力的影响规律分析

由式（25）可知，地基附加应力与基础尺寸、点的位置（x 轴、z 轴坐标）、荷载 q 大小、土体内摩擦角 φ、不均匀系数 C_u 等因素有关，为了深入研究地基附加应力的响应机制，下面将以竖向附加应力 σ_z 为例，探究各因素对附加应力的影响规律，包括参数分析和极差分析。

4.1　参数分析

本研究针对外加荷载大小、土体内摩擦角、不均匀系数等对荷载中心线上的竖向附加应力 σ_z 进行参数分析，探究各因素对竖向附加应力的影响规律。

各影响因素依据工程实际情况选取 3 个不同的水平值，如表 2 所示。

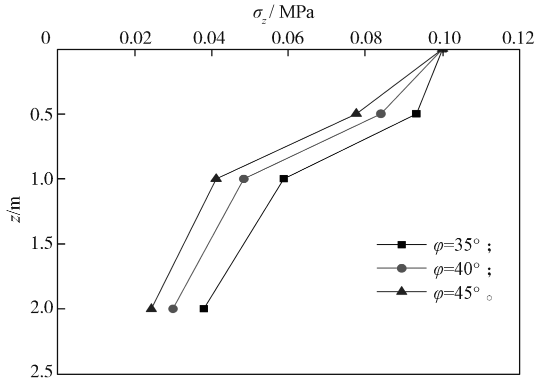
表 2　各因素水平

Table 2　Levels of various factors

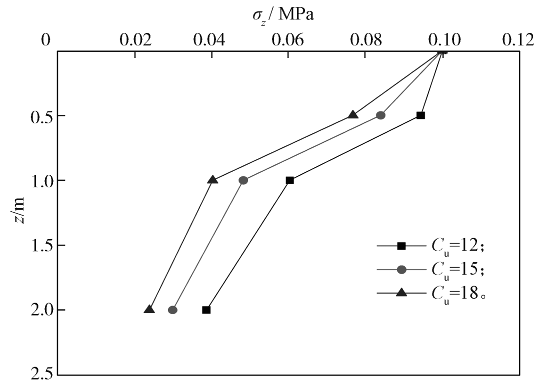
因素水平	φ/(°)	C_u	q/ MPa
I	35	12	0.05
II	40	15	0.10
III	45	18	0.15

在分析某个参数的影响规律时，其他参数均选取第Ⅱ水平值作为参数分析常量。此外，基础长边 l 为 2 m，短边 b 为 1 m，泊松比 μ 取 0.2，所求点埋深 z 分别取 0, 0.5, 1.0, 2.0 m 共 4 个水平值。

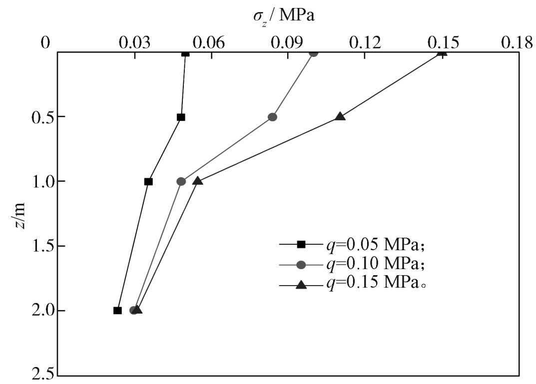
下面依据表 2 设置的参数，分析荷载中心线上各点竖向附加应力 σ_z 随深度的分布规律，所得参数分析结果如图 4 所示。



a）内摩擦角的影响规律



b）颗粒不均匀系数的影响规律



c）外加荷载的影响规律

图 4　竖向附加应力的参数分析曲线

Fig. 4　Parameter analysis curves of vertical additional stress

由图 4a 和 4b 所示规律曲线可以得知，同一深度处的竖向附加应力随着内摩擦角和不均匀系数的增大而逐渐减小。这是由于附加应力在地基土中的扩散范围是随内摩擦角和不均匀系数的增加而增大的，根据静力平衡原理，附加应力扩散范围的增大，会导致附加应力值减小，这也证明了本文所得出附加应力解析解的合理性。

由图 4c 可以得知，同一深度处的竖向附加应力随外加荷载的增大而逐渐增大，而其增量随外加荷载的增大而逐渐减小，这是由于附加应力在地基土中的扩散范围是随外加荷载的增加而逐渐增大的，根据静力平衡原理，附加应力扩散范围的增大会在一定程度上缓解附加应力的增大。

由以上分析可知，竖向均布荷载作用下地基竖向附加应力随内摩擦角和不均匀系数的增大而逐渐减小，随外加荷载的增大而逐渐增大，其增量随外加荷载的增大而逐渐减小。

4.2　极差分析

为探究各因素对附加应力响应的影响程度，确定影响附加应力的各因素主次顺序，下面采用正交试验设计方法，对各因素水平下的竖向附加应力 σ_z 展开极差分析。

本正交试验包括荷载大小、土体内摩擦角和不均匀系数 3 个分析指标，每个指标有 3 个水平，因此，此正交试验设计方案如表 3 所示。

表 3　正交试验方案及其附加应力解

Table 3　Orthogonal test scheme with its additional stress solution

方案	φ/(°)	C_u	q/ MPa	σ_z/ MPa
1	I (35)	I (18)	I (0.05)	0.032
2	I	II (15)	II (0.10)	0.059
3	I	III (12)	III (0.15)	0.091
4	II (40)	I	II	0.040
5	II	II	III	0.055
6	II	III	I	0.040
7	III (45)	I	III	0.038
8	III	II	I	0.032
9	III	III	II	0.048

依据设定的正交试验方案，计算得到各方案竖向矩形均布荷载作用下，中心线上深度 z=1 m 处点的竖向附加应力值（见表 3）。

下面依据表 3 中各方案的竖向附加应力结果，对各因素进行极差分析。

依据式（26）确定各因素水平下竖向附加应力 σ_z（见表 3）的平均值 $\overline{\sigma}_{zi}$：

$$\overline{\sigma}_{zi}=\sum_{j=1}^{3}\sigma_{zij}\Big/3\text{。}\tag{26}$$

式（26）中：$\overline{\sigma}_{zi}$ 为各因素第 i（i 分别为 I、II、III）水平下的竖向附加应力 σ_z 的平均值；σ_{zij} 为各因素第 i 水平对应的 3 种方案中的第 j（j= 1, 2, 3）方案的竖

向附加应力。

各因素水平下，竖向附加应力 σ_z 平均值 $\overline{\sigma}_{zi}$ 的极差 L 由下式确定：

$$L=\max\left\{\overline{\sigma}_{z\mathrm{I}},\overline{\sigma}_{z\mathrm{II}},\overline{\sigma}_{z\mathrm{III}}\right\}-\min\left\{\overline{\sigma}_{z\mathrm{I}},\overline{\sigma}_{z\mathrm{II}},\overline{\sigma}_{z\mathrm{III}}\right\}。\quad(27)$$

由式（27）获得的各因素水平下竖向附加应力 σ_z 平均值的极差，如表 4 所示。

表 4　不同因素水平下 σ_z 平均值的极差

Table 4　Mean value range of σ_z under different factor levels

MPa

φ	C_u	q
0.021	0.023	0.026

由表 4 可以得出如下结论：影响竖向矩形均布荷载作用下地基竖向附加应力的因素，按其主次顺序依次为 q、C_u、φ。

5　结论

地基土体为大量土颗粒无序排列的散体介质，因此，竖向荷载作用下地基土中附加应力向下、向外扩散传递，且其应力响应范围为以荷载作用域为顶面的锥体，该锥体边界形状与外荷载、土体内摩擦角和颗粒不均匀系数大小密切相关。据此，本文建立了考虑散体介质特征的竖向矩形均布荷载作用下，地基附加应力的改进计算方法，并且对附加应力解析解进行了参数分析和极差分析：

1）本研究在均布荷载作用下地基附加应力通用解析方法的基础上，采用二维积分，推导出竖向矩形均布荷载作用下地基附加应力的显式解析解，建立了考虑散体特征的地基附加应力的改进计算方法，该方法考虑了荷载大小和土体物理力学性质等众多因素的影响；

2）将本研究得到的解析解和文献 [20] 的解析解以及 Boussinesq 解计算得到的附加应力进行了对比分析，验证了本研究给出的解析解的合理性和可行性，可为基础工程设计提供有力依据；

3）通过对本研究中解析解的参数分析和极差分析结果可知，影响附加应力的因素按其影响程度由大至小依次为荷载大小、颗粒不均匀系数、内摩擦角，且附加应力随颗粒不均匀系数和内摩擦角的增大而减小，随外加荷载的增大而增大，其增量随荷载增大而逐渐减小；

4）本研究中考虑的散体介质特征，更适用于粗粒土地基，而对于细粒土地基，其适用性有待进一步证明；

5）对于多层地基，各层土体的物理力学性质及力学参数不同，暂时无法直接使用本解析解，后续将对此展开相应研究。

参考文献：

[1] 赵明华 . 土力学与基础工程 [M]. 武汉：武汉理工大学出版社，2000：76−83.
ZHAO Minghua. Soil Mechanics and Foundation Engineering[M]. Wuhan：Wuhan University of Technology Press，2000：76−83.

[2] BOUSSINESQ M J. Application des Potentiels：à L'étude de L'équilibre et Du Mouvement des Solides Élastiques[M]. Paris：Gauthier-Villars，1885：1.

[3] MINDLIN R D. Force at a Point in the Interior of a Semi-Infinite Solid[J]. Physics，1936，7(5)：195−202.

[4] FLAMANT A A. Sur la Répartition des Pressions Dans Un Solide Rectangulaire Chargé Transversalement[J]. Compt. Rend.，1892，114：1456−1468.

[5] 克列因 . 散体结构力学 [M]. 陈大鹏，王荣鋆，徐文焕，等译 . 北京：人民铁道出版社，1960：1.
KREIN. Structural Mechanics of Granular Media[M]. CHEN Dapeng，WANG Rongyun，XU Wenhuan，et al Translated. Beijing：China Railway Publishing House，1960：1.

[6] 孙广忠 . 岩体力学基础 [M]. 北京：科学出版社，1983：163−179.
SUN Guangzhong. Rock Mass Mechanics Foundation [M]. Beijing：Science Press，1983：163−179.

[7] 邵　艳 . 梯形分布荷载下地基附加应力计算方法 [J]. 合肥工业大学学报 (自然科学版)，2004，27(5)：575−578.
SHAO Yan. The Calculating Method of Additional Stress in Soil Under Trapezoid Distributed Load[J]. Journal of Hefei University of Technology（Natural Science），2004，27(5)：575−578.

[8] 高彦斌，姚天骄 . 圆锥（台）形人造山体地基竖向附加应力及沉降 [J]. 同济大学学报 (自然科学版)，2020，48(7)：945−952.
GAO Yanbin，YAO Tianjiao. Vertical Additional Stress and Settlement of the Conical and Truncated Cone Shaped Artificial Mountain Foundation[J]. Journal of Tongji University（Natural Science），2020，48(7)：945−952.

[9] 蒋关鲁，王力伟，杭红星 . 路桥交界处地基附加应力修正计算方法 [J]. 岩土工程学报，2013，35(2)：208−218.
JIANG Guanlu，WANG Liwei，HANG Hongxing. Modified Method for Additional Stress of Bridge-Approach Foundation Under Subgrade Load[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering，2013，35(2)：208−218.

[10] 冷伍明，艾　希，徐　方，等 . 新型预应力路基水平向附加应力扩散规律研究 [J]. 岩土工程学报，2019，41(8)：1445-1454.
LENG Wuming，AI Xi，XU Fang，et al. Diffusion Laws of Horizontal Additional Stress in a New Prestressed Subgrade[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering，2019，41(8)：1445-1454.
[11] 刘海滨，旷开萃 . 基于布辛奈斯克解的桥头地基附加应力的计算与分析 [J]. 中国市政工程，2002(2)：37-39.
LIU Haibin，KUANG Kaicui. Calculation and Analysis of Additional Stress on Abutment Embankment Using Boussinesq's Equation[J]. China Municipal Engineering，2002(2)：37-39.
[12] 石中平 . 垂直均布荷载矩形基础地基任意点附加应力系数公式推导 [J]. 成都理工大学学报 (自然科学版)，2015，42(2)：244-256.
SHI Zhongping. Formula Derivation of Additional Stress Coefficient at any Point in Rectangular Foundation Subsoil Under Vertical Even Load[J]. Journal of Chengdu University of Technology (Science & Technology Edition)，2015，42(2)：244-256.
[13] 韦珊珊 . 土中应力分布传递规律的试验及测试技术研究 [D]. 南宁：广西大学，2003：20-41.
WEI Shanshan. Research on Test, Measuring and Testing Techniques of Laws of Stress Distribution and Transfer in Soil[D]. Nanning：Guangxi University，2003：20-41.
[14] 刘　源，缪馥星，苗天德 . 二维颗粒堆积体中力的传递与分布研究 [J]. 岩土工程学报，2005，27(4)：468-473.
LIU Yuan，MIAO Fuxing，MIAO Tiande. Force Distributions in Two Dimensional Granular Packs[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering，2005，27(4)：468-473.
[15] ERIKSON J M，MUEGGENBURG N W，JAEGER H M，et al. Force Distributions in Three-Dimensional Compressible Granular Packs[J]. Physical Review E，2002，66(4)：040301.
[16] 蒋红英，鲁进步，苗天德 . 三维颗粒堆中力传递实验与分析 [J]. 兰州大学学报 (自然科学版)，2007，43(2)：134-139.
JIANG Hongying，LU Jinbu，MIAO Tiande. Force Distribution in Three-Dimensional Granular Piles[J]. Journal of Lanzhou University(Natural Science)，2007，43(2)：134-139.
[17] WANG C D，ZHOU S H，SU H. Model Tests on Additional Stress Transmission Between Different Granular Materials in Foundation Soils[J]. Advanced Materials Research，2014，919/920/921：828-834.
[18] GOLDENBERG C，GOLDHIRSCH I. Friction Enhances Elasticity in Granular Solids[J]. Nature，2005，435：188-191.
[19] GOLDENBERG C，GOLDHIRSCH I. Effects of Friction and Disorder on the Quasistatic Response of Granular Solids to a Localized Force[J]. Physical Review E，2008，77(4)：041303.
[20] 贺　敏 . 考虑散体介质特征的地基附加应力解析方法及其应用 [D]. 长沙：湖南大学，2018.
HE Min. Analytical Method and Its Applications for Additional Stress of Foundation Considering Granular Characteristics[D]. Changsha：Hunnan University，2018.
[21] 代志宏，吴　恒，张信贵 . 附加应力在土体中传递分布的细观模型 [J]. 工程地质学报，2004，12(增刊 1)：73-78.
DAI Zhihong，WU Heng，ZHANG Xingui. The Mesoscopic Structure Model of Additional Stress Transfer in the Soil[J]. Journal of Engineering Geology， 2004，12(S1)：73-78.
[22] 蒋红英，苗天德，鲁进步 . 二维颗粒堆中力传递的一个概率模型 [J]. 岩土工程学报，2006，28(7)：881-885.
JIANG Hongying，MIAO Tiande，LU Jinbu. A Probabilistic Model for Force Transmission in Two Dimensional Granular Packs[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering，2006，28(7)：881-885.
[23] 廖智强，刘根保 . 附加应力的概率式解答 [J]. 岩土力学，2015，36(8)：2223-2227.
LIAO Zhiqiang，LIU Genbao. Probabilistic Solution to Additional Stress[J]. Rock and Soil Mechanics，2015，36(8)：2223-2227.
[24] 曹文贵，贺　敏，王江营 . 竖向荷载作用下散体地基应力解析方法 [J]. 岩土工程学报，2017，39(7)：1165-1172.
CAO Wengui，HE Min，WANG Jiangying. Analytical Method for Stress of Granular Medium Foundation Under Vertical Load[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering，2017，39(7)：1165-1172.

（责任编辑：廖友媛）