

doi:10.3969/j.issn.1673-9833.2022.04.012

一类分数阶食饵-捕食者系统的动力学分析

张学友, 赵薇, 赵育林

(湖南工业大学理学院, 湖南株洲 412007)

摘要: 研究了一类食饵具有密度制约和避难所的 Holling-II 型分数阶食饵-捕食者系统的动力学性质, 通过定性分析方法讨论了系统解的存在唯一性、非负性和有界性, 分析了平衡点存在的条件以及各类平衡点的局部渐进稳定性, 并通过数值仿真验证了有关结论的正确性。

关键词: 分数阶; 食饵-捕食者系统; Holling-II 型; 平衡点; 稳定性

中图分类号: O175

文献标志码: A

文章编号: 1673-9833(2022)04-0083-07

引文格式: 张学友, 赵薇, 赵育林. 一类分数阶食饵-捕食者系统的动力学分析 [J]. 湖南工业大学学报, 2022, 36(4): 83-89.

A Dynamic Analysis of a Fractional Order Prey-Predator System

ZHANG Xueyou, ZHAO Wei, ZHAO Yulin

(College of Science, Hunan University of Technology, Zhuzhou Hunan 412007, China)

Abstract: A research has been conducted on the dynamic properties of Holling-II fractional order prey predator system with density constraints and shelters, followed by an inquiry into the existence, uniqueness, non-negativity and boundedness of the system solution with the qualitative analysis method adopted, as well as an analysis of the conditions for the existence of equilibrium points and the local asymptotic stability of various equilibrium points, with the validity of the relevant conclusions verified by a numerical simulation.

Keywords: fractional order; prey-predator system; Holling-II type; equilibrium point; stability

0 引言

食饵-捕食者关系是自然界中普遍存在的一种物种间相互作用的基本关系, 相关学者建立了大量的生物种群模型来揭示具有不同功能反应的食饵-捕食者相互作用关系。因此, 探讨生物种群系统的运行规律以及人类对生态系统的开发利用策略, 具有十分

重要的意义和实践价值^[1-3]。同时, 随着种群生态动力学以及分数阶微分方程理论的发展, 分数阶生物微分系统的研究已成为当前生物数学研究领域中的热点之一, 许多学者对此做了大量的研究工作^[4-10]。本文在已讨论的两种群整数阶生物模型的基础上, 研究如下一类食饵具有密度制约和避难所的 Holling-II 型分数阶食饵-捕食者系统:

收稿日期: 2021-07-14

基金项目: 湖南省大学生创新训练基金资助项目 (S202011535047); 湖南省自然科学基金资助项目 (2019JJ40068)

作者简介: 张学友 (1999-), 男, 湖南娄底人, 湖南工业大学硕士生, 主要研究方向为微分方程与动力系统,

E-mail: 1845968954@qq.com

通信作者: 赵育林 (1973-), 男, 湖南湘潭人, 湖南工业大学教授, 博士, 硕士生导师, 主要研究方向为微分方程与动力系统及其应用, E-mail: zhaoylch@sina.com

$$\begin{cases} {}^C_0D_t^\beta x(t) = rx(a - bx - cy) - \frac{\theta(1-m)xy}{1+p(1-m)x}, \\ {}^C_0D_t^\beta y(t) = y\left(-d + \frac{e\theta(1-m)x}{1+p(1-m)x}\right). \end{cases} \quad (1)$$

式中： x 为食饵的种群密度；
 y 为捕食者的种群密度；
 a 为食饵的内禀增长率；
 b 为食饵的密度制约系数；
 c 为捕食种群的捕食强度；
 d 为捕食者的死亡率；
 e 为营养转化率；
 p 为捕食者的处理时间；
 r 为食饵的增长率；
 t 为时间；
 θ 为捕食者的捕获率；
 m 为在避难所中的食饵种群的比例， $0 < m < 1$ ；
 mx 为避难所保护的食饵数量；
 $(1-m)x$ 为捕食者能捕获的食饵数量；
 ${}^C_0D_t^\beta$ 为区间 $[0, t]$ 上的 Caputo 分数阶导数，其中 β 为分数阶导数的阶数， $\beta \in (0, 1]$ ；

本文在各参数满足一定条件下，讨论系统 (1) 解的存在唯一性、非负性、有界性以及平衡点的稳定性等问题，同时利用 Matlab 软件进行数值仿真检验。

1 预备知识

定义 1^[9] 设 $\beta > 0$ ，函数 $f(t)$ 定义在区间 $[a, +\infty)$ 上 n 阶可导，则函数 $f(t)$ 的 β 阶 Caputo 分数阶导数定义为

$${}^C_aD_t^\beta f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\beta)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\beta-1} f^{(n)}(\tau) d\tau,$$

其中 $n = [\beta] + 1$ ， $n-1 < \beta \leq n$ ， $[\beta]$ 表示 β 的整数部分； $\Gamma(\cdot)$ 为 Gamma 函数。

引理 1^[7,10] 设系统

$${}^C_0D_t^\beta x(t) = f(t, x), \quad t > t_0, \quad (2)$$

满足初始条件 $x_0 = x(t_0)$ ，其中 $\beta \in (0, 1]$ ，且 $f: [t_0, +\infty) \times \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n$ ， $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ 。若 $f(t, x)$ 对 x 满足局部 Lipschitz 条件，则系统 (2) 在 $[t_0, +\infty) \times \Omega$ 上存在唯一解。

引理 2^[4,7] 设 $p(t)$ 为 $[t_0, +\infty)$ 上的连续函数，并且有

$$\begin{cases} {}^C_0D_t^\beta p(t) \leq -\lambda p(t) + \mu, \\ p(t_0) = p_0. \end{cases}$$

其中 $\beta \in (0, 1]$ ， $(\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$ 且 $\lambda \neq 0$ ， $t_0 > 0$ 为初始时刻。则有

$$p(t) \leq \left(p_0 - \frac{\mu}{\lambda}\right) E_\beta[-\lambda(t-t_0)^\beta] + \frac{\mu}{\lambda},$$

其中 E_β 是 Mittag-Leffler 函数，即

$$E_\beta(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k\beta+1)}, \quad z \in \mathbf{C}.$$

引理 3^[4,10] 令 $z \in \mathbf{C}([t_0, T], \mathbf{R})$ ，假设对 $\forall t_1 \in [t_0, T]$ ， $z(t_1) = 0$ 和 $z(t) < 0$ ， $t \in (t_0, t_1)$ ，则 ${}^C_0D_t^\beta z(t_1) > 0$ 。

引理 4^[4,10] 设 A 是有界闭集，对分数阶微分方程

$${}^C_0D_t^\beta x(t) = f(x), \quad (3)$$

其中 $\beta \in (0, 1]$ ，若 $\exists W(x): A \rightarrow \mathbf{R}$ 具有连续的一阶导数，且满足条件 ${}^C_0D_t^\beta W(x)|_{(3)} \leq 0$ ，则系统 (3)

从 A 中的一个点出发的解将永远保留在 A 中。又设 $Q = \{x \in A \mid {}^C_0D_t^\beta W(x)|_{(3)} \leq 0\}$ ，且 M 是 Q 的最大不变集，则当 $t \rightarrow \infty$ 时，每一个从 A 出发的解 $x(t)$ 将收敛到 M 。特别地，若 $M = \{0\}$ ，则当 $t \rightarrow \infty$ 时， $x \rightarrow 0$ 。

引理 5^[6,7] 设 $\beta \in (0, 1]$ ，分数阶微分系统

$$\begin{cases} {}^C_0D_t^\beta x(t) = f_1(x, y), \\ {}^C_0D_t^\beta y(t) = f_2(x, y). \end{cases} \quad (4)$$

有平衡点 $P(x_0, y_0)$ ，当且仅当雅可比矩阵

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix}$$

在平衡点 $P(x_0, y_0)$ 的所有特征值 λ_i 都满足条件 $|\arg(\lambda_i)| > \frac{\beta\pi}{2}$ 时，系统 (4) 的平衡点 $P(x_0, y_0)$ 是局部渐进稳定的。

引理 6^[4,7] 设 $\beta \in (0, 1]$ ，则系统 ${}^C_0D_t^\beta X = AX$ 的平衡点为鞍点，当且仅当该系统的特征方程至少有一个特征根 λ_1 满足 $|\arg(\lambda_1)| > \frac{\beta\pi}{2}$ ，且至少有一个特征根 λ_2 满足 $|\arg(\lambda_2)| < \frac{\beta\pi}{2}$ 。

2 系统动力学分析

2.1 解的存在唯一性、非负性和有界性

定理 1 当 $t \geq 0$ 时，对任何初值条件 $X(t_0) = (x(t_0), y(t_0)) \in \Omega$ 及正常数 w ，系统 (1) 存在唯一解

$X=(x, y) \in \Omega$, 其中

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : \max\{|x|, |y|\} \leq w\}.$$

证明 记 $X=(x, y)$, $\bar{X}=(\bar{x}, \bar{y})$, 定义 $\|X\|=|x|+|y|$ 和 $G(X)=(G_1(X), G_2(X))$ 映射, 其中

$$\begin{cases} G_1(X) = rx(a-bx-cy) - \frac{\theta(1-m)xy}{1+p(1-m)x}, \\ G_2(X) = y \left(-d + \frac{e\theta(1-m)x}{1+p(1-m)x} \right). \end{cases}$$

则对任意 $X, \bar{X} \in \Omega$, 有

$$\begin{aligned} \|G(X) - G(\bar{X})\| &= \sum_{i=1}^2 |G_i(X) - G_i(\bar{X})| = \\ &|G_1(X) - G_1(\bar{X})| + |G_2(X) - G_2(\bar{X})| \leq \\ &\left[r(a+2bw+cw) + \theta w(1-m)(1+e) \right] |x - \bar{x}| + \\ &\left[crw + \theta w(1-m)(1+e) + d + \frac{\theta(1+e)}{p} \right] |y - \bar{y}| = \\ &\varepsilon_1 |x - \bar{x}| + \varepsilon_2 |y - \bar{y}|. \end{aligned}$$

其中

$$\varepsilon_1 = r(a+2bw+cw) + \theta w(1-m)(1+e),$$

$$\varepsilon_2 = crw + qw(1-m)(1+e) + d + \frac{\theta(1+e)}{p}.$$

因此

$$\|G(X) - G(\bar{X})\| \leq L \|X - \bar{X}\|, \quad L = \max\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\},$$

所以系统 (1) 对于任意的 $X, \bar{X} \in \Omega$ 都满足局部 Lipschitz 条件. 由引理 1 可得系统 (1) 的解存在且唯一. 定理 1 得证.

定理 2 系统 (1) 的所有解都是非负的, 对于任意的初值条件 $(x(0), y(0)) \in \Omega_+$ 都成立, 其中

$$\Omega_+ = \{(x, y) \in \Omega : x \in \mathbf{R}_+, y \in \mathbf{R}_+\}.$$

证明 要证系统 (1) 的解的非负性, 即证对任意 $t \geq 0$ 都有 $x(t) \geq 0$.

显然 $t=0$ 时, $x(0) > 0$.

下证当 $t > 0$ 时, 有 $x(t) \geq 0$.

假设存在 $t_1 > 0$ 使得 $x(t_1) < 0$, 由 $x(t)$ 的连续性和 $x(0) > 0$, 则 $\exists t_2 \in (0, t_1)$, 使得 $x(t_2) = 0$. 记 $t_3 = \min\{t_2 > 0 : x(t_2) = 0\}$, 则当 $t = t_3$ 时, 有

$$\begin{aligned} {}_0^c D_t^\beta x(t) \Big|_{t=t_3} &= rx(t_3)(a-bx(t_3)-cy(t_3)) - \\ &\frac{\theta(1-m)x(t_3)y(t_3)}{1+p(1-m)x(t_3)} = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

此外, 由 t_3 的定义以及 $x(0) > 0$ 可得, 当 $t \in [0, t_3)$

时, 有 $x(t) \geq 0$.

令 $z(t) = -x(t)$, $t \in [0, t_3)$, 则 $z(t_3) = 0$ 且 $z(t) < 0$, $t \in [0, t_3)$.

由引理 3 得 ${}_0^c D_t^\beta z(t_3) > 0$, 即 ${}_0^c D_t^\beta x(t_3) < 0$, 这与等式 (5) 相矛盾. 所以不存在 $t_1 > 0$ 使得 $x(t_1) < 0$. 即对任意 $t \geq 0$ 都有 $x(t) \geq 0$.

类似地, 可以证明, 对任意 $t \geq 0$ 都有 $y(t) \geq 0$. 定理 2 得证.

定理 3 集合

$$A = \left\{ (x(t), y(t)) \in \mathbf{R}_+^2 \mid 0 < ex + y \leq \frac{(ar+d)^2}{4br} \right\}$$

是系统 (1) 的一个正不变集.

证明 构造函数 $W(t) = ex(t) + y(t)$, 于是有

$$\begin{aligned} {}_0^c D_t^\beta W(t) &= {}_0^c D_t^\beta ex(t) + {}_0^c D_t^\beta y(t) = \\ &arex - brex^2 - crexy - dy, \end{aligned}$$

则有

$${}_0^c D_t^\beta W(t) + dW(t) \leq \frac{e(ar+d)^2}{4br}.$$

由 $W(0) = ex(0) + y(0) > 0$, 根据引理 2 可得

$$0 < W(t) \leq \left(W(0) - \frac{e(ar+d)^2}{4brd} \right) E_\beta[-dt^\beta] + \frac{e(ar+d)^2}{4brd}. \quad (6)$$

根据 Mittag-Leffler 的函数性质可以得知, $E_\beta[-dt^\beta] > 0$ 对所有 $t \geq 0$ 都成立. 所以当 $W(0) \leq \frac{e(ar+d)^2}{4brd}$ 时, 有 $W(t) \leq \frac{e(ar+d)^2}{4brd}$.

由引理 4 可得, 系统 (1) 从 A 中的一个点出发的解, 永远保留在 A 中, 所以集合 A 是系统 (1) 的一个正不变集. 定理 3 得证.

定理 4 集合

$$A = \left\{ (x(t), y(t)) \in \mathbf{R}_+^2 \mid 0 < ex + y \leq \frac{(ar+d)^2}{4br} \right\}$$

是关于系统 (1) 的全局吸引集, 对于任意的初值条件 $(x(0), y(0)) \in \mathbf{R}_+^2$ 都成立, 且系统 (1) 的一切解都是有界的.

证明 由定理 3 可知, 对于任意给定的初始条件 $(x(0), y(0)) \in \mathbf{R}_+^2$, 若是满足 $W(0) \leq \frac{e(ar+d)^2}{4brd}$, 则系统 (1) 的解总包含在集合 A 中.

由 Mittag-Leffler 函数的性质可知, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, 函数 $W(t) \rightarrow \frac{e(ar+d)^2}{4brd}$.

由不等式(6)可知,如果初始条件满足 $W(0) > \frac{e(ar+d)^2}{4brd}$, 则当 $t \rightarrow \infty$ 时, 有 $W(t) \rightarrow \frac{e(ar+d)^2}{4brd}$ 。

由引理4可得,系统(1)的全部解都收敛于集合 A 。进一步可以得出集合 A 是一个全局吸引集。显然, A 同时也是一个有界集,因此系统(1)的全部解是有界的。定理4得证。

2.2 平衡点的局部稳定性

令 ${}^c_0D_t^\beta x(t) = 0$ 且 ${}^c_0D_t^\beta y(t) = 0$, 可得系统(1)

的平衡点为 $P_0 = (0, 0)$ 、 $P_1 = \left(\frac{a}{b}, 0\right)$ 、 $P_2 = (x_2, y_2)$, 其中:

$$x_2 = \frac{d}{(e\theta - dp)(1-m)},$$

$$y_2 = \frac{e[a(e\theta - dp)(1-m) - bd]rd}{(e\theta - dp)(1-m)[rcde + (e\theta - dp)(1-m)]}。$$

通过计算,可求得系统(1)对应的 Jacobi 矩阵

$$J = \begin{pmatrix} ra - rcy - 2rbx - \theta^* & -crx - m^* \\ e\theta^* & -d + em^* \end{pmatrix},$$

其中 $\theta^* = \frac{\theta(1-m)y}{[1+p(1-m)x]^2}$, $m^* = \frac{\theta(1-m)x}{1+p(1-m)x}$ 。

显然平衡点 P_0 总存在。由于 a 、 b 是正参数,所以平衡点 P_1 也总存在。对于正平衡点 P_2 , 要满足 $x_2 > 0$ 、 $y_2 > 0$, 即满足条件 $e\theta > \frac{bd}{a(1-m)} + dp$ 时, 正平衡点 P_2 存在。

定理5 系统(1)的平衡点 $P_0 = (0, 0)$ 是一个鞍点。

证明 在平衡点 $P_0 = (0, 0)$ 处, 系统(1)的

Jacobi 矩阵为 $J(P_0) = \begin{pmatrix} ra & 0 \\ 0 & -d \end{pmatrix}$, 其特征方程为

$$T(P_0) = \det(\lambda I - J(P_0)) = (\lambda - ra)(\lambda + d) = 0,$$

解得特征根为 $\lambda_1 = ra$, $\lambda_2 = -d$ 。

因为 $|\arg(\lambda_1)| < \frac{\beta\pi}{2}$, $|\arg(\lambda_2)| > \frac{\beta\pi}{2}$, 则由引理6可得平衡点 P_0 是一个鞍点。定理5得证。

定理6 系统(1)的平衡点在 $d < \frac{ae\theta(1-m)}{b+ap(1-m)}$

时是鞍点,在 $d > \frac{ae\theta(1-m)}{b+ap(1-m)}$ 时是局部渐进稳定的。

证明 在平衡点 $P_1 = \left(\frac{a}{b}, 0\right)$ 处, 系统(1)的

Jacobi 矩阵为

$$J(P_1) = \begin{pmatrix} -ra & -\frac{acr}{b} - \frac{a\theta(1-m)}{b+ap(1-m)} \\ 0 & -d + \frac{ae\theta(1-m)}{b+ap(1-m)} \end{pmatrix},$$

其特征方程为

$$T(P_1) = (\lambda + ra) \left(\lambda + d - \frac{ae\theta(1-m)}{b+ap(1-m)} \right) = 0,$$

解得其特征根为

$$\lambda_1 = -ra, \lambda_2 = \frac{ae\theta(1-m)}{b+ap(1-m)} - d。$$

因 $|\arg(\lambda_1)| = |\arctan 0 + \pi| > \frac{\beta\pi}{2}$, 当 $d < \frac{ae\theta(1-m)}{b+ap(1-m)}$

时, $|\arg(\lambda_2)| = |\arctan 0| < \frac{\beta\pi}{2}$, 由引理6可得平衡点

P_1 是一个鞍点; 当 $d > \frac{ae\theta(1-m)}{b+ap(1-m)}$ 时, $|\arg(\lambda_2)| =$

$|\arctan 0 + \pi| > \frac{\beta\pi}{2}$, 由引理5可得平衡点 P_1 是局部渐进稳定的。定理6得证。

在平衡点 P_2 处, 系统(1)的 Jacobi 矩阵为

$$J(P_2) = \begin{pmatrix} ra - rcy_2 - 2rbx_2 - \theta_2^* & -crx_2 - m_2^* \\ e\theta_2^* & -d + em_2^* \end{pmatrix},$$

其中 $\theta_2^* = \frac{\theta(1-m)y_2}{[1+p(1-m)x_2]^2}$, $m_2^* = \frac{\theta(1-m)x_2}{1+p(1-m)x_2}$,

其特征方程为

$$T(P_2) = \lambda^2 - \text{tr}(J(P_2))\lambda + \det(J(P_2)) = 0,$$

其中

$$\text{tr}(J(P_2)) = r(a - cy_2 - 2bx_2) - d + m_2^* - \theta_2^*,$$

$$\det(J(P_2)) = dr(cy_2 + 2bx_2 - a) +$$

$$\theta_2^*(crex_2 + d) + rem_2^*(a - cy_2 - 2bx_2)。$$

所以系统的特征根可表示为

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \left(\text{tr}(J(P_2)) + \left[\text{tr}^2(J(P_2)) - 4\det(J(P_2)) \right]^{\frac{1}{2}} \right),$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} \left(\text{tr}(J(P_2)) - \left[\text{tr}^2(J(P_2)) - 4\det(J(P_2)) \right]^{\frac{1}{2}} \right)。$$

从而得到以下结论。

定理7 如果系统(1)满足下列条件之一:

1) $\text{tr}(J(P_2)) < 0$, $\text{tr}^2(J(P_2)) - 4\det(J(P_2)) \geq 0$ 且

$$\operatorname{tr}(\mathbf{J}(P_2)) + \left[\operatorname{tr}^2(\mathbf{J}(P_2)) - 4\det(\mathbf{J}(P_2)) \right]^{\frac{1}{2}} < 0;$$

$$2) \operatorname{tr}(\mathbf{J}(P_2)) < 0, \operatorname{tr}^2(\mathbf{J}(P_2)) - 4\det(\mathbf{J}(P_2)) < 0;$$

$$3) \operatorname{tr}(\mathbf{J}(P_2)) > 0, \operatorname{tr}^2(\mathbf{J}(P_2)) - 4\det(\mathbf{J}(P_2)) < 0 \text{ 且}$$

$$\left| \operatorname{tr}^2(\mathbf{J}(P_2)) - 4\operatorname{tr}(\mathbf{J}(P_2)) \right|^{\frac{1}{2}} > \operatorname{tr}(\mathbf{J}(P_2)) \tan \frac{\beta\pi}{2};$$

那么系统(1)的正平衡点 P_2 是局部渐进稳定的。

证明 当条件1)满足时, 显然 $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$, 从而有

$$|\arg(\lambda_1)| = |\arctan 0 + \pi| > \frac{\beta\pi}{2},$$

$$|\arg(\lambda_2)| = |\arctan 0 + \pi| > \frac{\beta\pi}{2}.$$

由引理5可得, 正平衡点 P_2 是局部渐进稳定的。

当条件2)满足时, λ_1 与 λ_2 是一对共轭复根, 且 $\operatorname{Re}(\lambda_1) = \operatorname{Re}(\lambda_2) < 0, \operatorname{Im}(\lambda_1) = -\operatorname{Im}(\lambda_2) > 0$. 可求得

$$|\arg(\lambda_1)| = \left| \arctan \frac{\left| \operatorname{tr}^2(\mathbf{J}(P_2)) - 4\det(\mathbf{J}(P_2)) \right|^{\frac{1}{2}}}{\operatorname{tr}(\mathbf{J}(P_2))} + \pi \right| > \frac{\beta\pi}{2},$$

$$|\arg(\lambda_2)| = \left| \arctan \frac{-\left| \operatorname{tr}^2(\mathbf{J}(P_2)) - 4\det(\mathbf{J}(P_2)) \right|^{\frac{1}{2}}}{\operatorname{tr}(\mathbf{J}(P_2))} - \pi \right| > \frac{\beta\pi}{2}.$$

由引理5可得, 正平衡点 P_2 是局部渐进稳定的。

当条件3)满足时, λ_1 与 λ_2 是一对共轭复根, 且 $\operatorname{Re}(\lambda_1) = \operatorname{Re}(\lambda_2) > 0, \operatorname{Im}(\lambda_1) = -\operatorname{Im}(\lambda_2) > 0$. 可求得

$$|\arg(\lambda_1)| = \left| \arctan \frac{\left| \operatorname{tr}^2(\mathbf{J}(P_2)) - 4\det(\mathbf{J}(P_2)) \right|^{\frac{1}{2}}}{\operatorname{tr}(\mathbf{J}(P_2))} \right| > \frac{\beta\pi}{2},$$

$$|\arg(\lambda_2)| = \left| \arctan \frac{-\left| \operatorname{tr}^2(\mathbf{J}(P_2)) - 4\det(\mathbf{J}(P_2)) \right|^{\frac{1}{2}}}{\operatorname{tr}(\mathbf{J}(P_2))} \right| > \frac{\beta\pi}{2}.$$

由引理5可得, 正平衡点 P_2 是局部渐进稳定的。

注 如果系统(1)满足 $\operatorname{tr}(\mathbf{J}(P_2)) = 0$, 且 $\det(\mathbf{J}(P_2)) > 0$, 此时 λ_1 与 λ_2 是一对共轭纯虚根, 则

$$|\arg(\lambda_1)| = |\arg(\lambda_2)| = \frac{\pi}{2} > \frac{\beta\pi}{2},$$

由引理6可得, 正平衡点是局部渐进稳定的。

定理8 如果系统(1)满足下列条件之一:

$$1) \operatorname{tr}(\mathbf{J}(P_2)) = 0, \det(\mathbf{J}(P_2)) < 0;$$

$$2) \operatorname{tr}(\mathbf{J}(P_2)) > 0, \operatorname{tr}^2(\mathbf{J}(P_2)) - 4\det(\mathbf{J}(P_2)) \geq 0,$$

$$\text{且 } \operatorname{tr}(\mathbf{J}(P_2)) - \left[\operatorname{tr}^2(\mathbf{J}(P_2)) - 4\det(\mathbf{J}(P_2)) \right]^{\frac{1}{2}} < 0;$$

$$3) \operatorname{tr}(\mathbf{J}(P_2)) < 0, \operatorname{tr}^2(\mathbf{J}(P_2)) - 4\det(\mathbf{J}(P_2)) \geq 0,$$

$$\text{且 } \operatorname{tr}(\mathbf{J}(P_2)) + \left[\operatorname{tr}^2(\mathbf{J}(P_2)) - 4\det(\mathbf{J}(P_2)) \right]^{\frac{1}{2}} > 0;$$

那么系统(1)的正平衡点 P_2 是鞍点。

证明 当条件1)满足时, 有 $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$, 则有

$$|\arg(\lambda_1)| = |\arctan 0| < \frac{\beta\pi}{2}, |\arg(\lambda_2)| = |\arctan 0 + \pi| > \frac{\beta\pi}{2}.$$

由引理6可得, 平衡点 P_2 是鞍点。

当条件2)满足时, 显然 $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$, 则有

$$|\arg(\lambda_1)| = |\arctan 0| < \frac{\beta\pi}{2}, |\arg(\lambda_2)| = |\arctan 0 + \pi| > \frac{\beta\pi}{2}.$$

由引理6可得, 正平衡点 P_2 是鞍点。

当条件3)满足时, 显然 $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$, 则有

$$|\arg(\lambda_1)| = |\arctan 0| < \frac{\beta\pi}{2}, |\arg(\lambda_2)| = |\arctan 0 + \pi| > \frac{\beta\pi}{2}.$$

由引理6可得, 正平衡点 P_2 是鞍点。

定理9 当 $\operatorname{tr}(\mathbf{J}(P_2)) > 0$ 时, 如果系统(1)满足下列条件之一:

$$1) \operatorname{tr}(\mathbf{J}(P_2)) - \left[\operatorname{tr}^2(\mathbf{J}(P_2)) - 4\det(\mathbf{J}(P_2)) \right]^{\frac{1}{2}} > 0,$$

$$\text{且 } \operatorname{tr}^2(\mathbf{J}(P_2)) - 4\det(\mathbf{J}(P_2)) \geq 0;$$

$$2) \left| \operatorname{tr}^2(\mathbf{J}(P_2)) - 4\det(\mathbf{J}(P_2)) \right|^{\frac{1}{2}} < \operatorname{tr}(\mathbf{J}(P_2)) \tan \frac{\beta\pi}{2},$$

$$\text{且 } \operatorname{tr}^2(\mathbf{J}(P_2)) - 4\det(\mathbf{J}(P_2)) < 0;$$

那么系统(1)的正平衡点 P_2 是不稳定的。

证明 当条件1)满足时, 显然 $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$, 则

$$|\arg(\lambda_1)| = |\arctan 0| < \frac{\beta\pi}{2}, |\arg(\lambda_2)| = |\arctan 0| < \frac{\beta\pi}{2},$$

因此系统(1)的正平衡点 P_2 是不稳定的。

当条件2)满足时, λ_1 与 λ_2 是一对共轭复根, 且 $\operatorname{Re}(\lambda_1) = \operatorname{Re}(\lambda_2) > 0, \operatorname{Im}(\lambda_1) = -\operatorname{Im}(\lambda_2) > 0$, 可求得

$$|\arg(\lambda_1)| = \left| \arctan \frac{\left| \operatorname{tr}^2(\mathbf{J}(P_2)) - 4\det(\mathbf{J}(P_2)) \right|^{\frac{1}{2}}}{\operatorname{tr}(\mathbf{J}(P_2))} \right| < \frac{\beta\pi}{2},$$

$$|\arg(\lambda_2)| = \left| \arctan \frac{-\left| \operatorname{tr}^2(\mathbf{J}(P_2)) - 4\det(\mathbf{J}(P_2)) \right|^{\frac{1}{2}}}{\operatorname{tr}(\mathbf{J}(P_2))} \right| < \frac{\beta\pi}{2},$$

因此系统(1)的正平衡点 P_2 是不稳定的。

3 数值仿真

用 Matlab 进行数值仿真, 以验证本研究所得结论的正确性。

对系统(1)的参数赋值如下: $r=2.5, a=0.5, b=1, c=0.2, d=0.15, e=0.6, \theta=3.5, p=1$.

1) 当 $\beta=1$ (即整数阶生物系统情形), 且食饵无避难所的种群模型。通过计算可得正平衡点 $P_2=(0.077\ 0, 0.282\ 2)$, $e\theta = 2.1 > \frac{bd}{a(1-m)} + dp = 0.45$, 而且 $\text{tr}(\mathbf{J}(P_2)) < 0$, $\det(\mathbf{J}(P_2)) > 0$, $\text{tr}^2(\mathbf{J}(P_2)) - 4\det(\mathbf{J}(P_2)) < 0$ 。由定理 7 得, 正平衡点 $P_2=(0.077\ 0, 0.282\ 2)$ 是局部渐进稳定的。

系统 (1) 在点 $P_2=(0.077\ 0, 0.282\ 2)$ 处的仿真结果如图 1 所示。由图可知, 正平衡点 $P_2=(0.077\ 0, 0.282\ 2)$ 是局部渐进稳定的, 与理论结果一致。

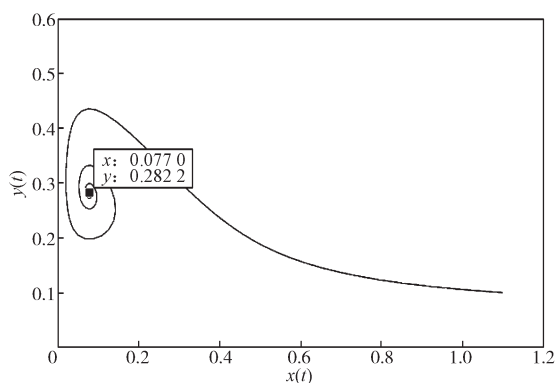


图 1 系统 (1) 在点 $P_2=(0.077\ 0, 0.282\ 2)$ 处的仿真结果
Fig. 1 Simulation results of system (1) with point $P_2=(0.077\ 0, 0.282\ 2)$

2) 当 $\beta=0.95$, 食饵无避难所 ($m=0$) 的分数阶种群模型。通过计算可得正平衡点 $P_2=(0.044\ 8, 0.298\ 3)$, 同时可得 $\text{tr}(\mathbf{J}(P_2)) < 0$, $\text{tr}^2(\mathbf{J}(P_2)) - 4\det(\mathbf{J}(P_2)) < 0$, $\det(\mathbf{J}(P_2)) > 0$ 。由定理 7 得, 正平衡点 $P_2=(0.044\ 8, 0.298\ 3)$ 是局部渐进稳定的。

系统 (1) 在点 $P_2=(0.044\ 8, 0.298\ 3)$ 处的仿真结果如图 2 所示。由图可知, 正平衡点 $P_2=(0.044\ 8, 0.298\ 3)$ 是局部渐进稳定的, 与理论结果一致。

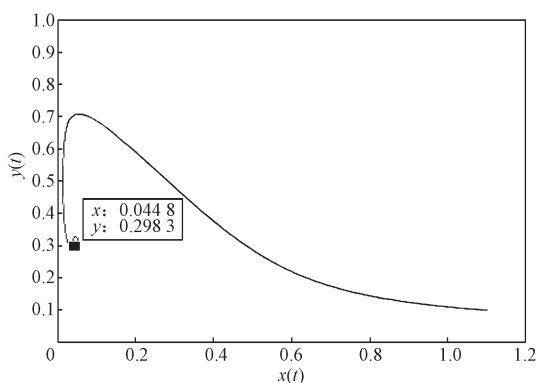


图 2 系统 (1) 在点 $P_2=(0.044\ 8, 0.298\ 3)$ 处的仿真结果
Fig. 2 Simulation results of system (1) with point $P_2=(0.044\ 8, 0.298\ 3)$

3) 当 $\beta=0.95$, $m=0.6$ 的分数阶有避难所食饵具有密度制约的 Holling-II 型功能反应函数模型。通过计算可得正平衡点 $P_2=(0.085\ 6, 0.304\ 0)$, $e\theta = 2.1 > \frac{bd}{a(1-m)} + dp = 0.48$, 而且 $\text{tr}(\mathbf{J}(P_2)) < 0$, $\text{tr}^2(\mathbf{J}(P_2)) - 4\det(\mathbf{J}(P_2)) < 0$, $\det(\mathbf{J}(P_2)) > 0$ 。由定理 7 得, 正平衡点 $P_2=(0.085\ 6, 0.304\ 0)$ 是局部渐进稳定的。

系统 (1) 在点 $P_2=(0.085\ 6, 0.304\ 0)$ 处的仿真结果如图 3 所示。由图可知, 正平衡点 $P_2=(0.085\ 6, 0.304\ 0)$ 是局部渐进稳定的, 与理论结果一致。

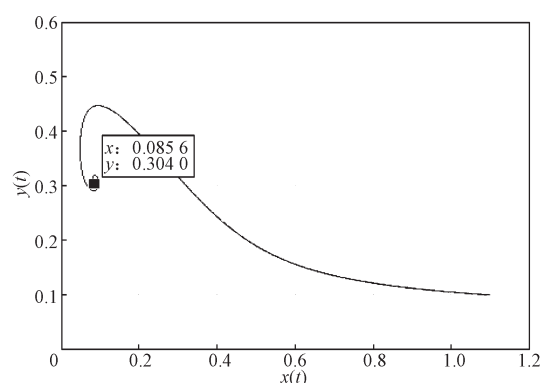


图 3 系统 (1) 在点 $P_2=(0.085\ 6, 0.304\ 0)$ 处的仿真结果
Fig. 3 Simulation results of system (1) with point $P_2=(0.085\ 6, 0.304\ 0)$

4) 当 $\beta=0.95$, $m=0.6$ 时, 由定理 5 可知, 系统 (1) 的平衡点 $P_0=(0, 0)$ 是鞍点。系统 (1) 在点 $P_0=(0, 0)$ 处的仿真结果如图 4 所示。由图可知, 平衡点 $P_0=(0, 0)$ 是鞍点, 与理论结果一致。

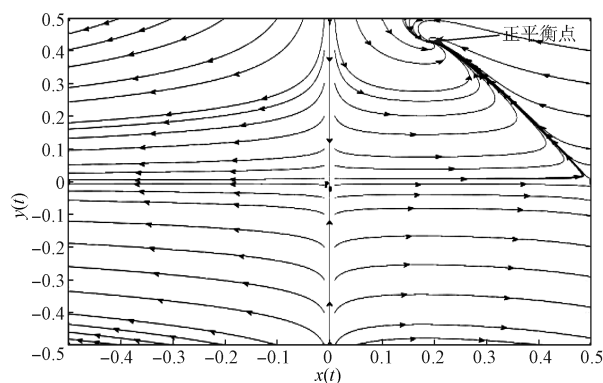


图 4 系统 (1) 在点 $P_0=(0, 0)$ 处的仿真结果
Fig. 4 Simulation results of point $P_0=(0, 0)$ for system (1)

4 结语

本文研究了一类食饵具有密度制约和避难所的 Holling-II 型分数阶食饵-捕食者系统的动力学性质,

讨论了系统解的存在唯一性、非负性和有界性, 分析了平衡点存在的条件以及各类平衡点的局部渐进稳定性, 并通过数值仿真验证了有关结论的正确性。

数值仿真结果表明: 分数阶种群模型比整数阶种群模型能更快达到稳定, 有避难所种群模型比无避难所种群模型能更快达到稳定。食饵具有避难所的分数阶种群模型, 比单独具有其中之一的种群模型能够更迅速地达到稳定。

参考文献:

- [1] HUANG J C, RUAN S G, SONG J. Bifurcations in a Predator-Prey System of Leslie Type with Generalized Holling Type III Functional Response[J]. *Journal of Differential Equations*, 2014, 257(6): 1721-1752.
- [2] 李冰森, 赵育林, 张子龙. 具收获率的 Holling-IV 型两种群生物系统的定性分析 [J]. *湖南工业大学学报*, 2020, 34(1): 1-8, 107.
LI Bingsen, ZHAO Yulin, ZHANG Zilong. A Qualitative Analysis of Two Groups of Holling-IV Biological Systems with Harvest Rate[J]. *Journal of Hunan University of Technology*, 2020, 34(1): 1-8, 107.
- [3] 曹淑萍. 一类食饵具有避难所的 Holling-III 型捕食者-食饵模型的稳定性分析 [J]. *兰州文理学院学报 (自然科学版)*, 2020, 34(4): 6-9.
CAO Shuping. Stability Analysis of a Predator-Prey Model with Holling-III Functional Response Incorporating a Prey Refuge[J]. *Journal of Lanzhou University of Arts and Science (Natural Science Edition)*, 2020, 34(4): 6-9.
- [4] PANJA P. Stability and Dynamics of a Fractional-Order Three-Species Predator-Prey Model[J]. *Theory in Biosciences*, 2019, 138(2): 251-259.
- [5] LI H L, ZHANG L, HU C, et al. Dynamical Analysis of a Fractional-Order Predator-Prey Model Incorporating a Prey Refuge[J]. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, 2017, 54(1/2): 435-449.
- [6] 杜争光. 具有 Holling IV 型功能反应的分数阶捕食者-食饵模型的动力学分析 [J]. *井冈山大学学报 (自然科学版)*, 2019, 40(3): 9-13, 23.
DU Zhengguang. Dynamical Analysis of a Fractional-Order Predator-Prey Model with Holling IV Functional Response[J]. *Journal of Jinggangshan University (Natural Science)*, 2019, 40(3): 9-13, 23.
- [7] DIETHELM K. The Analysis of Fractional Differential Equations: An Application-Oriented Exposition Using Differential Operators of Caputo Type[M]. Berlin: Springer-Verlag, 2010: 87.
- [8] 杜争光, 蒲武军. 一类具有 Holling II 型功能反应的分数阶捕食者-食饵系统的动力学分析 [J]. *五邑大学学报 (自然科学版)*, 2020, 34(2): 10-14, 45.
DU Zhengguang, PU Wujun. A Dynamical Analysis of a Fractional-Order Predator-Prey Model with Holling Type-II Functional Responses[J]. *Journal of Wuyi University (Natural Science Edition)*, 2020, 34(2): 10-14, 45.
- [9] KILBAS A A, SRIVASTAVA H M, TRUJILLO J J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations[M]. Amsterdam: Elsevier, 2006: 45-47.
- [10] 李欣欣. 具有 Crowley-Martin 功能反应的分数阶捕食者-食饵系统的动力学分析及其离散化 [D]. 长春: 东北师范大学, 2019.
LI Xinxin. Dynamical Analysis of a Fractional-Order Predator-Prey Model with Crowley-Martin Functional Response and Its Discretization[D]. Changchun: Northeast Normal University, 2019.

(责任编辑: 邓光辉)