

doi:10.3969/j.issn.1673-9833.2022.04.003

结构静弹性问题的双互易边界元法

潘先云, 周枫林, 王瑾元, 袁小涵, 钦 宇

(湖南工业大学 机械工程学院, 湖南 株洲 412007)

摘 要: 采用双互易边界元法对结构静弹性问题进行了分析。使用一种指数型径向基函数对体力项进行插值拟合, 并借助其在弹性力学问题中的特解和双互易技术将原边界积分方程中的体积分转化为边界积分, 再使用边界单元离散技术, 以边界节点上的位移或面力为未知数构造线性方程组。通过数值算例验证了双互易边界元法是分析结构静弹性问题的一种有效数值计算方法, 并在实际工况下与有限元法软件得到的结果进行对比, 进一步验证该方法的精确性。算例结果表明, 双互易边界元法分析结构静弹性问题具有精度高等特点, 同时可以解决其他领域含有域积分项的非齐次问题。

关键词: 双互易边界元法; 静弹性问题; 指数型径向基函数; 有限元法

中图分类号: O343

文献标志码: A

文章编号: 1673-9833(2022)04-0016-07

引文格式: 潘先云, 周枫林, 王瑾元, 等. 结构静弹性问题的双互易边界元法 [J]. 湖南工业大学学报, 2022, 36(4): 16-22.

Research on Dual Reciprocity Boundary Element Method for Structural Static Elastic Flaws

PAN Xianyun, ZHOU Fenglin, WANG Jinyuan, YUAN Xiaohan, QIN Yu

(College of Mechanical Engineering, Hunan University of Technology, Zhuzhou Hunan 412007, China)

Abstract: An analysis has been made of the static elastic flaw of the structure by using the dual reciprocity boundary element method, with an exponential radial basis function adopted to interpolate and fit the physical force term. With the help of its special solution in elasticity and the dual reciprocity technique, the volume fraction in the original boundary integral equation is transformed into boundary integral, to be followed by an application of the boundary element discretization technology to the construction of the linear equations with the displacement and surface force on the boundary nodes as unknowns. Based on numerical examples, it is verified that the dual reciprocity boundary element method is an effective numerical calculation method for analyzing structural static elastic flaws, with its accuracy further verified by a comparison of the results with the finite element method software under actual working conditions. The example results show that the dual reciprocity boundary element method is characterized with a high accuracy in analyzing structural static elastic problems, applicable for a solution of the non-homogeneous problems with domain integral terms in other fields.

Keywords: dual reciprocity boundary element method; static elasticity flaw; exponential radial basis function; finite element method

收稿日期: 2021-09-06

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11602082); 湖南省教育厅科研基金资助项目(19B145)

作者简介: 潘先云(1996-), 男, 湖南醴陵人, 湖南工业大学硕士生, 主要研究方向为数值计算,

E-mail: 1395779254@qq.com

通信作者: 周枫林(1986-), 男, 湖南邵阳人, 湖南工业大学副教授, 博士, 硕士生导师, 主要研究方向为计算力学,

E-mail: edwal0zhou@163.com

1 研究背景

结构静弹性问题研究结构在受到外力作用下而产生的应力、应变和位移的变化, 以维持结构在合理变化范围之内, 保证应用场景的安全性, 为工程设计提供参考。如裴智毅等^[1]运用弹性力学对钢桥面铺装层进行了应力分析, 为钢桥面 STC (super-through concrete) 铺装的设计和箱梁横隔板截面尺寸的选取提供了参考; 郭一竹等^[2]研究了弹性伸杆的力学性能, 并且对其刚度进行了分析。结构静弹性问题分析的数值方法以有限元法 (finite element method, FEM)^[3-5]为代表, 其中心思想是将连续的弹性体离散为有限个单元, 再根据弹性力学基本方程和变分原理建立单元节点间位移与力的关系, 形成单元刚度矩阵, 然后将所有单元刚度矩阵整理成总体刚度矩阵, 最后通过引入边界条件, 生成关于未知节点位移的线性方程组。ABAQUS、ANSYS 等有限元法仿真软件的出现, 使有限元法变得简单高效, 并在机械结构分析、土木工程领域得到了广泛应用。但是, 有限元法仍存在不足之处。首先, 该方法需要将整个结构区域进行离散, 处理的数据量较大, 计算时间较长; 其次, 难以精确处理无限域和应力集中等问题, 上述缺陷影响了有限元法的精度和实际应用范围。因此, 研究者在有限元法的基础上发展了一种新的数值计算方法: 边界元法^[6-8] (boundary element method, BEM)。相比于有限元法, 边界元法只需要对边界进行离散, 不涉及域内, 因而将问题的维数降低, 拥有较高的计算效率和计算精度。边界元法在弹性力学中有许多研究成果和成功案例。如曾华等^[9]利用双互易边界元法求解了弹性问题, 证明其具有较高的精度; 徐俊祥等^[10]采用直接边界元法对弹性体整个域内的位移场和应力场进行了求解。边界元法在其它领域也有着广泛应用。

本文运用双互易边界元法 (dual reciprocity boundary element method, DRBEM) 分析结构静弹性中含有体力项的非齐次问题, 以及在实际工况下, 通过双互易边界元法和有限元法分析结果进行对比, 验证双互易边界元法在分析结构静弹性问题上的有效性和精确性, 并为处理非齐次弹性力学问题提供一种新的方法。有学者曾对边界元法和有限元法进行了对比研究, 比如豆中强^[11]利用有限元分析软件——ANSYS 软件和边界元法求解二维弹性静力学问题, 并将求解得到的结果与精确解进行对比; 周枫林等^[12]分别用有限元法和边界元法分析了印刷机滚筒结构刚度, 证明了边界元法是用于结构刚度分析的

一种高效方法。与上述研究的不同之处在于, 本研究采用指数型基函数作为双互易边界元法的插值函数, 对结构进行静弹性力学分析, 验证该方法的有效性, 并将 DRBEM 和 FEM 对比, 验证 DRBEM 在实际工况下结构静弹性分析中的精确性。

2 静弹性力学双互易边界元法

2.1 静弹性力学的理论基础

课题组采用双互易边界元法, 分析正方体模型在受外力载荷条件下引起的弹性变形情况。

三维静弹性力学问题的基本方程如下:

平衡微分方程为

$$\sigma_{ij,i} + b_i = 0; \quad (1)$$

几何方程为

$$\varepsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i}) / 2; \quad (2)$$

物理方程 (本构方程) 为

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2G \varepsilon_{ij}。 \quad (3)$$

式 (1) ~ (3) 中: $i, j, k=1, 2, 3$;

σ 为应力;

b 为体力;

u 为位移;

δ 为 Kronecker 函数;

G 为剪切模量;

λ 为拉梅常数, 且

$$\lambda = Ev / [(1+\nu)(1-2\nu)], \quad (4)$$

其中, E 为弹性模量, ν 为泊松比;

ε 为应变, 且

$$\varepsilon_{kk} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}。 \quad (5)$$

将式 (2) 代入式 (3) 中, 得到如下应力分量用位移分量的表示:

$$\sigma_{ij} = \lambda u_{k,k} \delta_{ij} + G(u_{i,j} + u_{j,i})。 \quad (6)$$

再将式 (6) 代入式 (1) 中, 可得到如下用位移表示的平衡方程 (Navier 方程):

$$(\lambda + G)u_{i,ij} + Gu_{j,ii} + b_j = 0。 \quad (7)$$

2.2 静弹性力学双互易边界元法描述

上文得到用位移表示的平衡方程如下:

$$\frac{G}{(1-2\nu)}u_{i,ij} + Gu_{j,ii} + b_j = 0, \quad x \in \Omega; \quad (8)$$

位移边界条件为

$$u_j = \bar{u}_j, \quad x_j \in \Gamma_1; \quad (9)$$

面力边界条件为

$$p_j = \sigma_{ij}n_j = \bar{p}_j, \quad x_j \in \Gamma_2。 \quad (10)$$

式中: $\mathbf{n}$ 为边界外法向量;

Ω 为弹性体所占区域;

Γ_1 和 Γ_2 分别为位移边界和面力边界;

$\bar{u}_j$ 和 $\bar{p}_j$ 分别为 Γ_1 边界上位移约束和 Γ_2 边界上面力载荷。

可用加权余量法、功的互等定理等建立边界积分方程, 现利用加权余量法、散度定理将式 (1)、(9) 和 (10) 建立弹性力学边界积分方程, 简化后如下:

$$c_{lk}^p u_k^p + \int_{\Gamma} p_{lk}^* u_k d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{lk}^* p_k d\Gamma; \quad (11)$$

$$c_{lk}^p u_k^p + \int_{\Gamma} p_{lk}^* u_k d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{lk}^* p_k d\Gamma + \int_{\Omega} u_{lk}^* b_k d\Omega. \quad (12)$$

式 (11) (12) 中: u_{lk}^* 为位移基本解, 且

$$u_{lk}^* = \frac{1}{16\pi G(1-\nu)r} \left[(3-4\nu)\delta_{lk} + \frac{\partial r}{\partial x_l} \frac{\partial r}{\partial x_k} \right], \quad (13)$$

其中, r 为场点与源点之间的距离, $l=1, 2, 3$;

p_{lk}^* 为面力基本解, 且

$$p_{lk}^* = \frac{-1}{8\pi(1-\nu)r^2} \left\{ \frac{\partial r}{\partial n} \left[(1-2\nu)\delta_{lk} + 3 \frac{\partial r}{\partial x_l} \frac{\partial r}{\partial x_k} \right] - (1-2\nu) \left(\frac{\partial r}{\partial x_l} n_k - \frac{\partial r}{\partial x_k} n_l \right) \right\}. \quad (14)$$

c_{lk}^p 为与源点位置有关的系数, 其中,

$$c_{lk} = \begin{cases} \delta_{lk}, & \text{问题域内部,} \\ \frac{\delta_{lk}}{2}, & \text{光滑边界,} \\ \frac{\theta}{4\pi} \delta_{lk}, & \text{不光滑边界.} \end{cases} \quad (15)$$

式中, θ 为源点处的立体角,

式 (11) 是在 $b_j=0$ 情况下的边界积分方程, 也就是计算域内没有外力作用, 式 (12) 存在体力项。

式 (11) 和 (12) 描述的是已知边界 Γ 上位移 u_k 和面力 p_k 计算区域内所有点 p 在 k 方向上的位移。

对于边界积分方程式 (12) 中含域内体力积分非齐次项问题, 利用双互易方法处理。用径向基函数对式 (12) 中的体力项进行插值拟合, 插值表达式为

$$b_k = \sum_{j=1}^{H+L} \phi_j \varphi_j. \quad (16)$$

式中: φ_j 为插值函数;

ϕ_j 为位置系数;

H 和 L 分别为边界点和内部点的数量。

值得注意的是, 若体力项函数未知, 则径向基函数插值系数也将是未知的。找到径向基函数对应式 (7) 特定的位移 u 满足:

$$(\lambda + G)\bar{u}_{ll, lm} + G\bar{u}_{mk, ll} + \delta_{mk} b_l = 0. \quad (17)$$

利用分部积分可以将式 (12) 转换为完全边界积

分方程:

$$c_{lk} u_k = \int_{\Gamma} u_{lk}^* p_k d\Gamma - \int_{\Gamma} p_{lk}^* u_k d\Gamma + \sum_{j=1}^{H+L} \left(c_{lk} u_{mk}^j + \int_{\Gamma} p_{lk}^* \bar{u}_{mk}^j d\Gamma - \int_{\Gamma} u_{lk}^* \bar{p}_{mk}^j d\Gamma \right) \phi_j^m. \quad (18)$$

式 (17) ~ (18) 中: $\bar{u}_{lj, lm}$ 为位移特解;

$\bar{p}_{mk}^j$ 为面力特解;

$m=1, 2, 3$ 。

边界积分方程式 (11) 和 (18) 只有边界积分, 所以可以通过离散边界进行求解计算, 将位移和面力离散为如下形式:

$$u_k = \sum_{j=1}^M N_j u_k^j, \quad (19)$$

$$p_k = \sum_{j=1}^M N_j p_k^j. \quad (20)$$

式 (19) (20) 中: $N_j = N_j(\xi, \eta)$ 为形函数;

M 为每一个单元的节点数量。

将计算边界 Γ 离散为 N 个边界单元, 再将式 (19) 和 (20) 代入式 (11) 和 (18) 中, 得到离散形式的边界积分表达式如下:

$$c_{lk}(P) u_k(P) + \sum_{f=1}^N \left[\sum_{n=1}^M u_k^j \int_{\Gamma_f} p_{lk}^*(Q, P) N_n(Q) d\Gamma(Q) \right] = \sum_{f=1}^N \left[\sum_{n=1}^M p_k^j \int_{\Gamma_f} u_{lk}^*(Q, P) N_n(Q) d\Gamma(Q) \right], \quad (21)$$

$$c_{lk}(P) u_k(P) + \sum_{f=1}^N \left[\sum_{n=1}^M u_k^j \int_{\Gamma_f} p_{lk}^*(Q, P) N_n(Q) d\Gamma(Q) \right] - \sum_{f=1}^N \left[\sum_{n=1}^M p_k^j \int_{\Gamma_f} u_{lk}^*(Q, P) N_n(Q) d\Gamma(Q) \right] + \sum_{j=1}^{H+L} \left\{ c_{lk}(P) u_k(P) + \sum_{f=1}^N \left[\sum_{n=1}^M u_k^j \int_{\Gamma_f} p_{lk}^*(Q, P) N_n(Q) \bar{u}_{mk}^j d\Gamma(Q) \right] - \sum_{f=1}^N \left[\sum_{n=1}^M p_k^j \int_{\Gamma_f} u_{lk}^*(Q, P) N_n(Q) \bar{p}_{mk}^j d\Gamma(Q) \right] \right\} \phi_j^m. \quad (22)$$

式中: Γ_f 为第 f 个单元的边界。

最终离散后式 (21) 和式 (22) 可形成如下线性代数方程组:

$$Hu = Gt. \quad (23)$$

$$Hu - Gt = (Hu - GT)\phi. \quad (24)$$

将所有未知量移到方程的左边并整理可得

$$Ax = y. \quad (25)$$

通过式 (25) 所示代数方程组可以求出所有边界节点的未知量, 包括面力和位移。

2.3 指数型插值函数及其特解

本文采用指数型插值函数作为双互易边界元法的径向基函数, 对体力项进行插值拟合, 指数型插值函数表达式如下:

$$\varphi(r, c) = e^{-cr}, \quad (26)$$

式中: c 为形状参数;

r 为场点 Q 到源点 P 之间的距离, 且

$$r = \|X(Q) - X(P)\|. \quad (27)$$

对应的指数型插值函数在弹性问题上的位移特解表达式为

$$\bar{u}_{ij}(r) = p_1(r)\delta_{ij} + p_2(r)r_i r_j. \quad (28)$$

式中:

$$p_1(r) = \frac{(3-4\nu)[(2+rc)e^{-cr} - 2]}{4c^3 r(1-\nu)G} + \frac{1}{4r(1-\nu)G} \left[\left(\frac{r}{c^2} + \frac{4}{c^3} + \frac{8}{c^4 r} + \frac{8}{c^5 r^2} \right) e^{-cr} - \frac{8}{c^5 r^2} \right];$$

$$p_2(r) = \frac{-1}{4(1-\nu)G} \left(\frac{g'(r)}{r} + \frac{q'(r)}{r^2} - \frac{q(r)}{r^3} \right),$$

其中:

$$g(r) = \frac{[(2+rc)e^{-cr} - 2]}{c^3 r},$$

$$q(r) = - \left(\frac{r}{c^2} + \frac{4}{c^3} + \frac{8}{c^4 r} + \frac{8}{c^5 r^2} \right) e^{-cr} + \frac{8}{c^5 r^2}.$$

上述位移特解并不是唯一的。该位移特解是通过 Papkovitch 势函数法推导出来的满足平衡方程的一种形式, 并且保证了 $g(r)$ 与 $q(r)$ 在全域内连续且有一阶导数。不同的 RBF 对应的特解也会改变, 将位移特解导入胡克定律与平衡方程, 同样可以求解出应变、应力和位移特解。

$$\bar{\varepsilon}_{ijk}(r) = \frac{1}{2}(\bar{u}_{ij,k}(r) + \bar{u}_{ik,j}(r)),$$

$$\bar{\sigma}_{ijk}(r) = 2G\bar{\varepsilon}_{ijk}(r) + \frac{2G\nu}{1-2\nu}\bar{\varepsilon}_{in},$$

$$\bar{p}_{ij}(r) = \bar{\sigma}_{ijk}(r)n_k.$$

3 数值算例

为了验证双互易边界元法在静力学分析上的有效性和准确性, 设计了两个算例。第一个算例是有解析解情况下, 通过 DRBEM 方法得出数值解与解析解对比, 验证双互易边界元法的有效性。第二个算例是在无解析解的实际工况下, 将 DRBEM 结果与有限元分析软件结果进行对比, 进一步验证双互易边界元法的有效性和准确性。

根据对指数型基函数作为双互易边界元法的径向基函数的分析研究, 当指数型基函数的形状参数 $c=0.2$ 时, 数值计算精度最高, 所以本文算例双互易边界元法中, 指数型径向基函数形状参数 c 取 0.2。

3.1 球体边界元静力学分析

本算例研究半径为 2 mm 的球体, 笛卡尔坐标中心为球心。球体的材料参数设置如下: 密度为 1.14 t/mm³; 泊松比为 0.25; 杨氏模量为 1 000 MPa。通过双互易边界元法对球体进行弹性力学分析, 其网格划分如图 1 所示, 网格数量为 2 250 个。

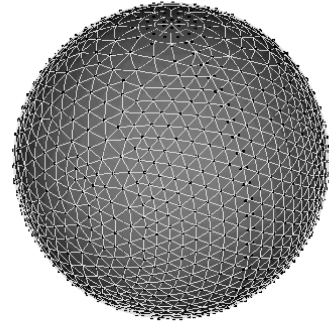


图1 球体网格划分

Fig.1 Sphere meshing

通过改变网格大小、增加网格数量, 计算得到节点上面力以及域内应力的数值解, 将其与精确解对比得到相对误差, 精确解是通过控制方程式(8)得到的, 其中相对误差定义为

$$e_r = \frac{1}{|v|_{\max}} \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (v_i^e - v_i^a)^2}.$$

式中: v 为相关变量;

v_i^e 为精确解;

v_i^a 为数值解;

$|v|_{\max}$ 为精确解中的最大值;

N 为节点数量。

在边界元法中, 3 个位移边界条件如下:

$$\begin{cases} u_1 = x^2 + y^3 + z^3; \\ u_2 = x^3 + y^2 + z^3; \\ u_3 = x^3 + y^3 + z^2. \end{cases} \quad (29)$$

将式(29)代入式(6)中可以得到应力的解析解:

$$\begin{cases} \sigma_{11} = 2.4x + 0.8y + 0.8z; \\ \sigma_{22} = 2.4y + 0.8x + 0.8z; \\ \sigma_{33} = 2.4z + 0.8x + 0.8y; \\ \sigma_{12} = 1.2(x^2 + y^2); \\ \sigma_{13} = 1.2(x^2 + z^2); \\ \sigma_{23} = 1.2(y^2 + z^2). \end{cases}$$

图 2 和图 3 所示结果是利用双互易边界元法对球体进行静弹性力学分析得到的, 其中图 2 所示为单元数量对面力相对误差的影响, 图 3 所示为单元数量对域内应力的影响。

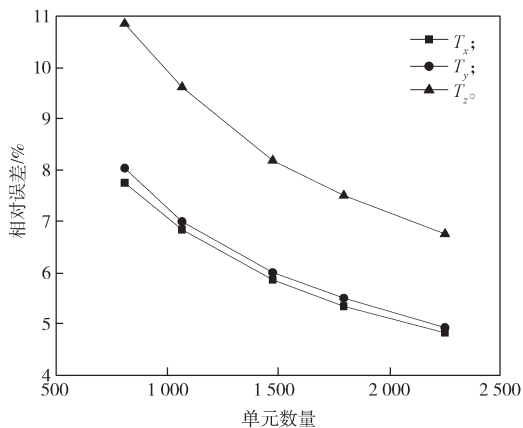


图 2 单元数量对面力相对误差的影响曲线

Fig. 2 Influence curves of element number on relative error of surface force

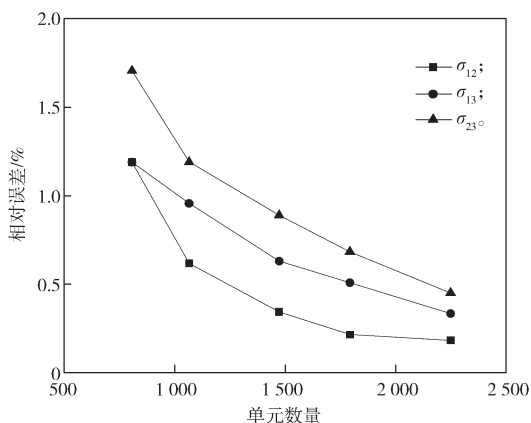


图 3 单元数量对域内应力相对误差的影响曲线

Fig. 3 Influence curves of element number on relative error of stress in domain

从图 2 和图 3 中可以看到, 随着单元数量增多, 节点数量增加, 节点上各面力相对误差值和域内应力的相对误差值均随之减小, 数值解均收敛于解析解, 从而得到稳定面力和应力结果。这一结果说明, 采用双互易边界元法分析球体的静弹性力学问题的方法是有效的。

3.2 DRBEM 与 FEM 对比分析

本算例在实际工况下, 利用 DRBEM 和 FEM 方法, 对立方体模型进行静弹性力学分析, 以验证实际工况下 DRBEM 分析结构静弹性力学方面的准确性和可行性。所用模型为边长为 20 mm 的立方体, 笛卡尔坐标中心为立方体的质心位置, 其坐标如表 1 所示。

表 1 立方体取样点坐标

Table 1 Cube sampling point coordinates

编号	坐 标	编号	坐 标
1	(-1.034, -9.310, 1.034)	7	(-1.034, 0.345, 1.034)
2	(-1.034, -7.931, 1.034)	8	(-1.034, 2.414, 1.034)
3	(-1.034, -5.862, 1.034)	9	(-1.034, 4.483, 1.034)
4	(-1.034, -3.793, 1.034)	10	(-1.034, 5.862, 1.034)
5	(-1.034, -2.414, 1.034)	11	(-1.034, 7.241, 1.034)
6	(-1.034, -1.034, 1.034)	12	(-1.034, 8.621, 1.034)

取样点位置如图 4 所示。立方体材料参数设置如下: 密度 0.0079 t/mm^3 ; 泊松比为 0.28; 杨氏模量为 2 000 MPa。边界条件设置如下: 左表面施加压强为 100 MPa; 给定 Z 方向体力为 $-20 \text{ t/(s}^2\cdot\text{mm}^2)$; 下表面固定约束。

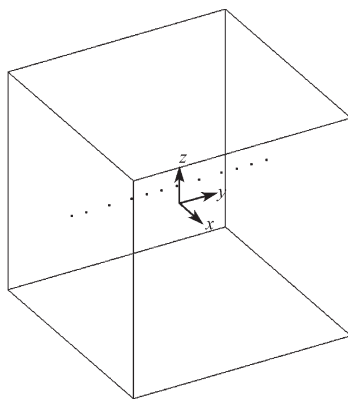


图 4 正方体取样点位置分布图

Fig. 4 Location distribution of cube sampling points

边界元网格数量为 1 608, 采用非连续三角形单元类型, 网格模型见图 5。有限元网格数量为 24 389, 采用线性六面体单元类型, 网格模型如图 6 所示。利用有限元方法仿真软件对立方体进行静力学分析, 得到的位移云图如图 7 所示。

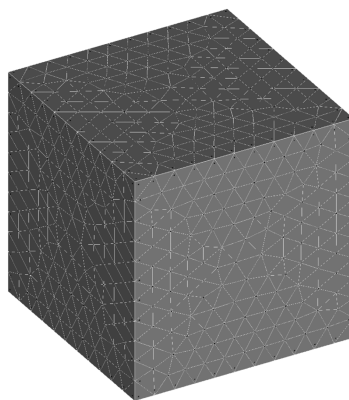


图 5 立方体边界元网格模型

Fig. 5 Cube boundary element mesh model

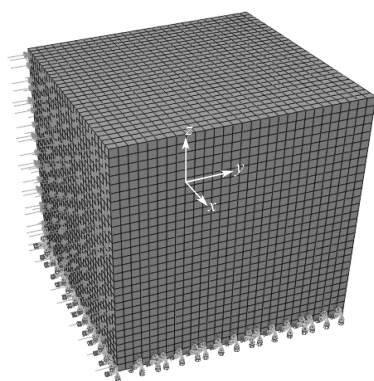


图6 立方体有限元网格模型

Fig. 6 Cube finite element mesh model

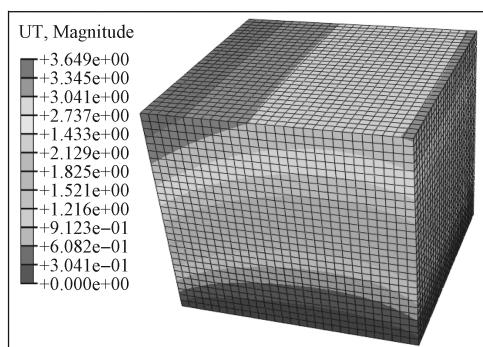


图7 有限元位移云图

Fig. 7 Finite element displacement nephogram of cube model

图8所示为以边界元法和有限元法的位移结果比较图,表2给出了求得的取样点的位移结果具体数据。

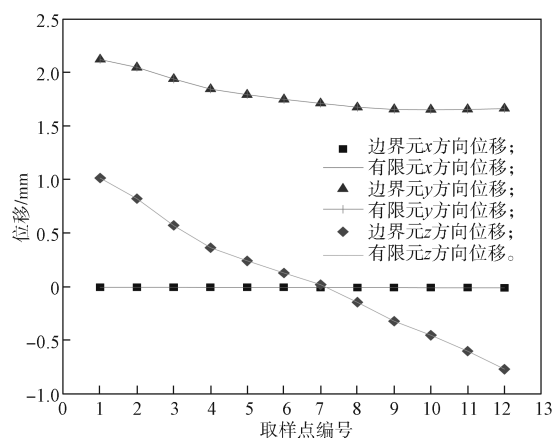


图8 DRBEM和FEM位移结果比较

Fig. 8 Comparison of displacement results between DRBEM and FEM

综合图8和表2中DRBEM和FEM的取样点位移数值情况看,两者计算位移数值结果高度拟合,该算例证明了在实际工况下双互易边界元法在分析结构静弹性力学方面的准确性和可行性。

表2 DRBEM和FEM的取样点位移结果

Table 2 Displacement results of DRBEM and FEM sampling points

mm

取样点编号	x 方向		y 方向		z 方向	
	边界元法	有限元法	边界元法	有限元法	边界元法	有限元法
1	-0.005 25	-0.004 94	2.125 09	2.125 86	1.016 95	1.016 09
2	-0.005 28	-0.005 15	2.050 38	2.051 12	0.824 10	0.823 30
3	-0.005 39	-0.005 33	1.943 00	1.941 97	0.574 22	0.572 78
4	-0.005 62	-0.005 60	1.848 77	1.849 16	0.364 74	0.364 59
5	-0.005 86	-0.005 88	1.795 71	1.795 86	0.241 89	0.241 91
6	-0.006 18	-0.006 23	1.751 22	1.751 15	0.127 94	0.128 14
7	-0.006 56	-0.006 64	1.715 47	1.715 22	0.018 78	0.019 16
8	-0.007 21	-0.007 34	1.678 12	1.677 86	-0.145 09	-0.145 57
9	-0.007 88	-0.008 07	1.659 46	1.658 92	-0.321 81	-0.321 17
10	-0.008 32	-0.008 55	1.656 39	1.655 85	-0.453 86	-0.453 30
11	-0.008 74	-0.009 02	1.659 46	1.658 95	-0.602 20	-0.601 82
12	-0.009 14	-0.009 50	1.666 76	1.666 33	-0.770 89	-0.770 76

4 结语

本文介绍了双互易边界元法在静弹性力学问题中的应用,以及双互易边界元法与有限元法在静弹性力学分析中的对比。算例结果表明,双互易边界元法是分析结构静弹性力学问题的一种有效方法。在实际工况下,通过DRBEM与FEM在静弹性力学分析上的对比,进一步证明DRBEM方法在分析结构静弹性力学方面的准确性和可行性,并且具有精度高等特

点。由此可见,DRBEM为分析结构静弹性力学问题提供了一种新的方法,并可以将双互易边界元法应用到解决其他领域含域积分项的非齐次问题。

参考文献:

- [1] 裴智毅, 吴鹏, 周叮, 等. 基于弹性力学的钢桥面铺装层应力分析[J]. 南京工业大学学报(自然科学版), 2021, 43(4): 497-502, 522.

- PEI Zhiyi, WU Peng, ZHOU Ding, et al. Stress Analysis of Steel Bridge Deck Pavement Based on Elastic Mechanics[J]. Journal of Nanjing Technology University (Natural Science Edition), 2021, 43(4): 497-502, 522.
- [2] 郭一竹, 杨皓宇, 郭宏伟, 等. 空间薄壁弹性伸杆力学特性分析 [J]. 哈尔滨工业大学学报, 2020, 52(1): 107-112.
- GUO Yizhu, YANG Haoyu, GUO Hongwei, et al. Analysis of Mechanical Properties of Spatial Thin-Walled Elastic Extension Bar[J]. Journal of Harbin Institute of Technology, 2020, 52(1): 107-112.
- [3] 王勖成. 有限单元法 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2003: 13-25.
- WANG Xucheng. Finite Element Method[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2003: 13-25.
- [4] 赵均海, 汪梦甫. 弹性力学及有限元 [M]. 武汉: 武汉理工大学出版社, 2003: 113-178.
- ZHAO Junhai, WANG Mengfu. Elasticity and Finite Element[M]. Wuhan: Wuhan University of Technology Press, 2003: 113-178.
- [5] 石亦平, 周玉蓉. ABAQUS 有限元分析实例详解 [M]. 北京: 机械工业出版社, 2006: 9-60.
- SHI Yiping, ZHOU Yurong. Detailed Explanation of ABAQUS Finite Element Analysis Example[M]. Beijing: China Machine Press, 2006: 9-60.
- [6] 孙秀山. 正交各向异性平面问题弹塑性分析的边界元法 [D]. 北京: 清华大学, 2004.
- SUN Xiushan. Boundary Element Method for Elastoplastic Analysis of Plane Orthotropic Problems[D]. Beijing: Tsinghua University, 2004.
- [7] 姜弘道. 弹性力学问题的边界元法 [M]. 北京: 中国水利水电出版社, 2008: 79-162.
- JIANG Hongdao. Boundary Element Method for Elastic Problems[M]. Beijing: China Water Power Press, 2008: 79-162.
- [8] 姚振汉, 王海涛. 边界元法 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2010: 1-44.
- YAO Zhenhan, WANG Haitao. Boundary Element Methods[M]. Beijing: Higher Education Press, 2010: 1-44.
- [9] 曾 华, 周枫林, 余江鸿. 含非均匀体力机械结构弹性力学问题的双互易边界元法 [J]. 机电产品开发与创新, 2021, 34(2): 24-26.
- ZENG Hua, ZHOU Fenglin, YU Jianghong. Dual Reciprocal Boundary Element Method for Elastic Problems of Mechanical Structures with Nonuniform Force[J]. Development & Innovation of Machinery & Electrical Products, 2021, 34(2): 24-26.
- [10] 徐俊祥, 朱为玄, 王向东, 等. 直接边界元法及其在弹性力学问题中的应用 [J]. 南通工学院学报 (自然科学版), 2003, 2(1): 36-38.
- XU Junxiang, ZHU Weixuan, WANG Xiangdong, et al. Direct Boundary Element Method and Its Application to the Problem of Elasticity[J]. Journal of Nantong Institute of Technology (Natural Science), 2003, 2(1): 36-38.
- [11] 豆中强. 弹性静力学问题 ANSYS 求解与边界元求解比较 [J]. 西华大学学报 (自然科学版), 2005, 24(6): 74-77.
- DOU Zhongqiang. Comparison Between the Solutions to Elastostatic Problems by ANSYS and Boundary Element Method[J]. Sichuan University of Science and Technology, 2005, 24(6): 74-77.
- [12] 周枫林, 李 光, 孙 晓, 等. 基于边界单元法的印刷机滚筒结构刚度分析 [J]. 包装学报, 2017, 9(4): 87-92.
- ZHOU Fenglin, LI Guang, SUN Xiao, et al. Structural Rigidity Analysis of Printing Cylinder Based Upon Boundary Element Method[J]. Packaging Journal, 2017, 9(4): 87-92.

(责任编辑: 申 剑)