

doi:10.3969/j.issn.1673-9833.2022.03.013

非线性多智能体系统的固定时间包含控制

余 湛, 唐朝君, 谢 挺

(重庆理工大学 理学院, 重庆 400054)

摘 要: 针对有向拓扑结构下具有非线性动力学和未知干扰的多智能体系统, 研究了固定时间包含控制问题(假设智能体之间的通信拓扑是有向的, 跟随者还受到未知干扰的影响)。基于代数图论、矩阵理论和固定时间稳定性理论, 证明了所提出的控制协议可以解决固定时间包含控制问题。最后, 通过仿真实例, 证明了理论结果的有效性。

关键词: 固定时间一致性; 包含控制; 非线性系统; 未知干扰; 多智能体系统

中图分类号: O231

文献标志码: A

文章编号: 1673-9833(2022)03-0095-06

引文格式: 余 湛, 唐朝君, 谢 挺. 非线性多智能体系统的固定时间包含控制[J]. 湖南工业大学学报, 2022, 36(3): 95-100.

A Fixed-Time Containment Control for Nonlinear Multi-Agent Systems

YU Zhan, TANG Zhaojun, XIE Ting

(College of Science, Chongqing University of Technology, Chongqing 400054, China)

Abstract: In view of multi-agent systems with nonlinear dynamics and unknown disturbances under directed topology, a research has thus been conducted on the fixed time containment control, assuming that the communication topology between agents is directed, with the follower also affected, by unknown disturbances. Based on algebraic graph theory, matrix theory and fixed-time stability theory, it is proved that the proposed protocol can solve the containment control in fixed time. Finally, the effectiveness of the theoretical results can be verified by a simulation example.

Keywords: fixed-time consensus; containment control; nonlinear dynamics; uncertain disturbance; multi-agent system

0 引言

近年来, 多智能体系统的协调控制一直是控制领域研究的热点。一致性问题作为协调控制研究的一个基本问题, 受到了特别关注。如果系统中有多领导

者, 相应的问题则被称为包含控制问题, 它研究如何通过设计分布式协议驱使跟随者收敛到由领导者形成的凸包内。包含控制问题在军事和民用领域都具有广泛应用, 并取得了许多有价值的成果^[1-4]。

在一致性问题研究中, 收敛速度被公认为是评

收稿日期: 2021-10-08

基金项目: 重庆市基础与前沿研究计划基金资助项目(cstc2019jcyj-msxmX0491)

作者简介: 余 湛(1998-), 男, 重庆垫江人, 重庆理工大学硕士生, 主要研究方向为多智能体系统协调控制,

E-mail: 932685682@qq.com

通信作者: 唐朝君(1979-), 男, 河南郑州人, 重庆理工大学副教授, 博士, 硕士生导师, 主要研究方向为多智能体系统协调控制, E-mail: zhaojuntang@163.com

价一致性协议的一个重要性能指标。在大多数关于一致性问题的早期文献中，只有在时间趋于无穷时才能达到一致。为了提高收敛速度，一些研究者设计了有限时间的一致性协议。值得注意的是，有限时间一致性的收敛时间依赖于智能体的初始条件。由于初始条件通常不能预先得到，因此不能保证在规定时间内收敛。幸运的是，近年来，研究人员为了解决初始条件的限制，在一致性问题中引入了固定时间一致性协议。文献 [5] 研究了无向网络拓扑下的多智能体系统在固定时间内实现平均一致性问题，即固定时间平均一致性问题。文献 [6] 考虑了一般有向图下非线性多智能体系统的固定时间一致性。文献 [7] 研究了具有不确定性本质非线性动力学的一阶多智能体系统的固定时间一致性问题。文献 [8] 研究了在有向通信拓扑结构下，具有非线性动力学和不确定干扰的多智能体系统固定时间一致性问题。文献 [9] 研究了具有非线性动力学和有界不确定性多智能体系统的固定时间群体一致跟踪问题。文献 [10] 研究了非线性异构多智能体系统的固定时间领导跟随一致性问题。文献 [11] 针对有向网络拓扑结构，研究了具有切换拓扑和非线性动力学下的多智能体系统的固定时间包含控制问题。然而，以前的工作很少关注有向通信拓扑下具有未知干扰的非线性多智能体系统的固定时间包含控制问题。

基于上述原因，本文研究了有向拓扑下具有未知干扰的非线性多智能体系统的固定时间包含控制。结果表明，在存在未知干扰和有向通信拓扑的情况下，可以解决包含控制问题。此外，还得到了收敛时间的上界。

1 预备知识及问题描述

1.1 符号说明与图论

设 \mathbf{R} 为实数集， $\lambda_{\min}(\mathbf{A})$ 和 $\lambda_{\max}(\mathbf{A})$ 分别为对称实矩阵 \mathbf{A} 的最小特征值和最大特征值。对于一个给定

的向量 $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ ， $\|\mathbf{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$ 表示 p -范数。

$Co(X) = \left\{ \sum_{j=1}^{n-m} t_j x_j \mid x_j \in X, \sum_{j=1}^{n-m} t_j = 1, t_j \in [0, 1] \right\}$ 表示集合

$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 的凸包。若矩阵 \mathbf{A} 的每个元素都是非负的，则矩阵 \mathbf{A} 是非负的。若矩阵 \mathbf{A} 的所有特征值都具有负实部，则矩阵 \mathbf{A} 是稳定的。如果矩阵 \mathbf{A} 是非负的，并且每一行都有单位和，则称矩阵 \mathbf{A} 是随机的。

有向图 $G(\mathbf{A}) = \{V, E, \mathbf{A}\}$ ，由顶点集 $V = \{1, 2, \dots, n\}$ 、有向边 $E \subseteq V \times V$ 和邻接矩阵 \mathbf{A} 组成，用于描述系统中智能体之间的通信拓扑。 $G(\mathbf{A})$ 的一条边用 (j, i) 表示，这表示智能体 i 可以直接接收智能体 j 的信息。令邻接矩阵 $\mathbf{A} = [a_{ij}] \in \mathbf{R}^{n \times n}$ ；若 $(j, i) \in E$ ，则 $a_{ij} > 0$ ；否则 $a_{ij} = 0$ ，其中 a_{ij} 表示权重。令度矩阵

$\mathbf{D} = \text{diag}\{d_1, d_2, \dots, d_n\}$ ， $d_i = \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij}$ 。拉普拉斯矩阵 $\mathbf{L} = [l_{ij}] \in \mathbf{R}^{n \times n}$ ，可以用 $\mathbf{L} = \mathbf{D} - \mathbf{A}$ 来表示。

1.2 问题描述

设多智能体系统是由 m 个跟随者和 $n-m$ 个领导者组成的。跟随者与领导者的集合分别用 $V_F = \{1, 2, \dots, m\}$ 和 $V_L = \{m+1, m+2, \dots, n\}$ 表示。在文献 [11] 的基础上，设计智能体 i 的动力学为

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = u_i(t) + f(x_i(t), t) + d_i(t), & i \in V_F; \\ \dot{x}_i(t) = f(x_i(t), t), & i \in V_L. \end{cases} \quad (1)$$

式中： $x_i(t)$ 、 $u_i(t)$ 、 $f(x_i(t), t)$ 、 $d_i(t) \in \mathbf{R}$ 分别为智能体 i 的状态、控制输入、本质非线性动力学和未知干扰。

定义 1 通过设计合适的协议 $u_i(t)$ ， $i \in V_F$ ，如果满足 $\lim_{t \rightarrow T} \|x_i(t) - Co(\mathbf{x}_L)\| = 0, \forall i \in V_F$ ，则称系统 (1) 能够实现固定时间包含控制。其中 $Co(\mathbf{x}_L)$ 表示由领导者的状态形成的凸包，而 T 表示独立于初始状态的固定时间。

为了推导出主要结果，给出以下假设。

假设 1 每个领导者都不能接受信号，对于每个跟随者，至少有一个领导者有通往它的有向路径。

注意：当满足假设 1 时，显然，拉普拉斯矩阵 \mathbf{L} 可以写为

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} \mathbf{L}_1 & \mathbf{L}_2 \\ \mathbf{0}_{(n-m) \times m} & \mathbf{0}_{(n-m) \times (n-m)} \end{pmatrix}. \quad (2)$$

式中：矩阵 $\mathbf{L}_1 \in \mathbf{R}^{m \times m}$ ，矩阵 $\mathbf{L}_2 \in \mathbf{R}^{m \times (n-m)}$ 。

假设 2 存在一个正常数使得

$$\left| f(x_i, t) - \sum_{i=1}^{n-m} k_i f(y_i, t) \right| \leq l \left| x_i - \sum_{i=1}^{n-m} k_i y_i \right|. \quad (3)$$

式中：常数 $k_i \geq 0$ ，且 $\sum_{i=1}^{n-m} k_i = 1$ 。

假设 3 未知干扰 $d_i(t)$ 是连续的，并且有上界 d_{\max} ，即

$$|d_i(t)| \leq d_{\max}, \quad i \in V_F. \quad (4)$$

假设 4 对于所有的 $i, j \in V_F$ ，存在常量 $p_i > 0$ 满足 $p_j a_{ij} = p_i a_{ji}$ 。其中 a_{ij} 是与有向图 $G(\mathbf{A})$ 相关的邻接

矩阵的权重。

注意：如果有向图 G 满足假设 4，则称图 G 满足细致平衡条件。该条件通常用于研究有向网络拓扑下多智能体系统的有限时间和固定时间一致性问题^[12-13]。

引理 1^[14] 对于任何向量 $z \in \mathbf{R}^n$ ，如果存在常数 $p > q \geq 1$ ，则

$$\|z\|_p \leq \|z\|_q \leq n^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \|z\|_p. \quad (5)$$

引理 2^[15] 如果满足假设 1，则矩阵 $-L_1$ 是稳定的，那么矩阵 $-L_1^{-1}L_2$ 是随机矩阵。

引理 3^[16] 如果满足假设 4，则矩阵 L_1P 是正定的，且定义矩阵 $P = \text{diag}\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ 。

引理 4^[17] 如果存在径向无界正连续函数，使得

$$\dot{V}(t) \leq -aV^\mu - bV^\nu, \quad (6)$$

其中 $a, b > 0, 0 < \mu < 1 < \nu$ ，则称系统 $\dot{x}(t) = f(x(t), t)$ ， $x(0) = x_0$ 可以实现固定时间稳定性。此外，收敛时间

可以通过 $T(x_0) \leq \frac{1}{a(1-\mu)} + \frac{1}{b(\nu-1)}$ 来估计。

2 主要结果

为实现固定时间包含控制，提出以下控制协议：

$$u_i(t) = -\alpha \left[\sum_{j=1}^n a_{ij} (x_i - x_j) \right]^{\frac{a}{b}} - \beta \left[\sum_{j=1}^n a_{ij} (x_i - x_j) \right]^{\frac{q}{p}} - \gamma \text{sign} \left[\sum_{j=1}^n a_{ij} (x_i - x_j) \right]. \quad (7)$$

式中： $\alpha, \beta, \gamma > 0, a < b, p < q$ ，且 a, b, p, q 均为正奇数。

后面的内容中，为简单起见，在不引起混淆的情况下有时省略参数 t 。令 $\mathbf{x}_F = (x_1, x_2, \dots, x_m)^T$ ，

$$\mathbf{x}_S = (x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n)^T,$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}_F) = (f(x_1(t), t), f(x_2(t), t), \dots, f(x_m(t), t))^T,$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}_S) = (f(x_{m+1}(t), t), f(x_{m+2}(t), t), \dots, f(x_n(t), t))^T,$$

则有

$$\dot{\mathbf{x}}_F = -\alpha (\mathbf{L}_1 \mathbf{x}_F + \mathbf{L}_2 \mathbf{x}_S)^{\frac{a}{b}} - \beta (\mathbf{L}_1 \mathbf{x}_F + \mathbf{L}_2 \mathbf{x}_S)^{\frac{q}{p}} - \gamma \text{sign}(\mathbf{L}_1 \mathbf{x}_F + \mathbf{L}_2 \mathbf{x}_S) + \mathbf{F}(\mathbf{x}_F) + \mathbf{d}(t). \quad (8)$$

令 $\mathbf{e} = \mathbf{x}_F + \mathbf{L}_1^{-1} \mathbf{L}_2 \mathbf{x}_S$ ， $\boldsymbol{\delta} = \mathbf{L}_1 \mathbf{e} = \mathbf{L}_1 \mathbf{x}_F + \mathbf{L}_2 \mathbf{x}_S$ ，则有

$$\dot{\boldsymbol{\delta}} = \mathbf{L}_1 \left[-\alpha \boldsymbol{\delta}^{\frac{a}{b}} - \beta \boldsymbol{\delta}^{\frac{q}{p}} - \gamma \text{sign}(\boldsymbol{\delta}) + \mathbf{d}(t) \right] + \mathbf{L}_1 \mathbf{F}(\mathbf{x}_F) + \mathbf{L}_2 \mathbf{F}(\mathbf{x}_S). \quad (9)$$

定理 1 满足假设 1, 2, 3, 4，且当控制参数满足以下不等式时：

$$\begin{cases} \alpha \bar{p}^{-1} > \frac{1}{2} \underline{p}^{-2} + \frac{1}{2} l^2 \|\mathbf{L}_1^{-1}\|_2^2, \\ \beta \bar{p}^{-1} m^{\frac{p}{p+q}-\frac{1}{2}} > \frac{1}{2} \underline{p}^{-2} + \frac{1}{2} l^2 \|\mathbf{L}_1^{-1}\|_2^2, \\ \gamma \bar{p}^{-1} > \underline{p}^{-1} d_{\max}, \end{cases} \quad (10)$$

式中： $\bar{p}^{-1} = \min\{p_1^{-1}, p_2^{-1}, \dots, p_m^{-1}\}$ ，

$$\underline{p}^{-1} = \max\{p_1^{-1}, p_2^{-1}, \dots, p_m^{-1}\}.$$

系统 (1) 可以实现固定时间包含控制。

证 考虑如下 Lyapunov 函数：

$$V(t) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\delta}^T (\mathbf{L}_1 \mathbf{P})^{-1} \boldsymbol{\delta}. \quad (11)$$

根据等式 (9) 可以得到

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \boldsymbol{\delta}^T (\mathbf{L}_1 \mathbf{P})^{-1} \dot{\boldsymbol{\delta}} = \\ &\boldsymbol{\delta}^T (\mathbf{L}_1 \mathbf{P})^{-1} \mathbf{L}_1 \left[-\alpha \boldsymbol{\delta}^{\frac{a}{b}} - \beta \boldsymbol{\delta}^{\frac{q}{p}} - \gamma \text{sign}(\boldsymbol{\delta}) + \mathbf{d}(t) \right] + \\ &\boldsymbol{\delta}^T (\mathbf{L}_1 \mathbf{P})^{-1} (\mathbf{L}_1 \mathbf{F}(\mathbf{x}_F) + \mathbf{L}_2 \mathbf{F}(\mathbf{x}_S)) \leq \\ &-\alpha \bar{p}^{-1} \|\boldsymbol{\delta}\|_{1+\frac{a}{b}}^{1+\frac{a}{b}} - \beta \bar{p}^{-1} \|\boldsymbol{\delta}\|_{1+\frac{q}{p}}^{1+\frac{q}{p}} - \gamma \bar{p}^{-1} \|\boldsymbol{\delta}\|_1 + \\ &\boldsymbol{\delta}^T \mathbf{P}^{-1} [\mathbf{F}(\mathbf{x}_F) + \mathbf{L}_2 \mathbf{F}(\mathbf{x}_S)] + \underline{p}^{-1} d_{\max} \|\boldsymbol{\delta}\|_1. \end{aligned} \quad (12)$$

令 $\mathbf{L}_1^{-1} \mathbf{L}_2 = -(k_{ij})_{m \times (n-m)}$ ，根据引理 2，可以得出

$k_{ij} \geq 0, \sum_{j=1}^{n-m} k_{ij} = 1$ ，则有

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}_F, t) + \mathbf{L}_1^{-1} \mathbf{L}_2 \mathbf{F}(\mathbf{x}_S, t) = \begin{pmatrix} f(x_1, t) - \sum_{j=1}^{n-m} k_{1j} f(x_{m+j}) \\ \vdots \\ f(x_m, t) - \sum_{j=1}^{n-m} k_{mj} f(x_{m+j}) \end{pmatrix}. \quad (13)$$

根据假设 2 可以得到

$$\begin{aligned} \|\mathbf{F}(\mathbf{x}_F, t) + \mathbf{L}_1^{-1} \mathbf{L}_2 \mathbf{F}(\mathbf{x}_S, t)\|_2^2 &\leq \\ l^2 \|\mathbf{x}_F + \mathbf{L}_1^{-1} \mathbf{L}_2 \mathbf{x}_S\|_2^2 &= l^2 \|\mathbf{L}_1^{-1} \boldsymbol{\delta}\|_2^2 \leq l^2 \|\mathbf{L}_1^{-1}\|_2^2 \|\boldsymbol{\delta}\|_2^2. \end{aligned} \quad (14)$$

根据不等式 $\mathbf{x}^T \mathbf{y} \leq \frac{1}{2} [\|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2]$ ，可以推出：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\delta}^T \mathbf{P}^{-1} [\mathbf{F}(\mathbf{x}_F, t) + \mathbf{L}_1^{-1} \mathbf{L}_2 \mathbf{F}(\mathbf{x}_S, t)] &\leq \\ \frac{1}{2} [\|\mathbf{P}^{-1} \boldsymbol{\delta}\|_2^2 + l^2 \|\mathbf{F}(\mathbf{x}_F, t) + \mathbf{L}_1^{-1} \mathbf{L}_2 \mathbf{F}(\mathbf{x}_S, t)\|_2^2] &\leq \\ \frac{1}{2} [\underline{p}^{-2} \|\boldsymbol{\delta}\|_2^2 + l^2 \|\mathbf{L}_1^{-1}\|_2^2 \|\boldsymbol{\delta}\|_2^2]. \end{aligned} \quad (15)$$

经过简单计算,再由引理 1 可以得到

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) \leq & -\alpha \bar{p}^{-1} \|\delta\|_{1+\frac{a}{b}}^{1+\frac{a}{b}} - \beta \bar{p}^{-1} \|\delta\|_{1+\frac{q}{p}}^{1+\frac{q}{p}} - \gamma \bar{p}^{-1} \|\delta\|_1 + \\ & \delta^T \mathbf{P}^{-1} [F(x_F) + L_2 F(x_S)] + \underline{p}^{-1} d_{\max} \|\delta\|_1 \leq \\ & -\alpha \bar{p}^{-1} \|\delta\|_2^{1+\frac{a}{b}} - \beta \bar{p}^{-1} m^{\frac{p}{p+q}-\frac{1}{2}} \|\delta\|_2^{1+\frac{q}{p}} + \\ & \frac{1}{2} [\underline{p}^{-2} \|\delta\|_2^2 + l^2 \|\mathbf{L}_1^{-1}\|_2^2 \|\delta\|_2^2] + \\ & (\underline{p}^{-1} d_{\max}(t) - \gamma \bar{p}^{-1}) \|\delta\|_1 \leq \\ & -\alpha \bar{p}^{-1} \|\delta\|_2^{1+\frac{a}{b}} - \beta \bar{p}^{-1} m^{\frac{p}{p+q}-\frac{1}{2}} \|\delta\|_2^{1+\frac{q}{p}} + \\ & \frac{1}{2} [\underline{p}^{-2} \|\delta\|_2^2 + l^2 \|\mathbf{L}_1^{-1}\|_2^2 \|\delta\|_2^2]. \end{aligned} \quad (16)$$

很明显, $1 + \frac{a}{b} < 2 < 1 + \frac{q}{p}$, 所以有:

$$\|\delta\|_2^2 \leq \|\delta\|_2^{1+\frac{a}{b}} + \|\delta\|_2^{1+\frac{q}{p}}. \quad (17)$$

$$\text{根据 } \|\delta\|_2^{1+\frac{a}{b}} = \left(\sum_{i=1}^m \delta_i^2\right)^{\frac{b+a}{2b}}, \|\delta\|_2^{1+\frac{q}{p}} = \left(\sum_{i=1}^m \delta_i^2\right)^{\frac{p+q}{2p}},$$

则有:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) \leq & -\alpha \bar{p}^{-1} \|\delta\|_2^{1+\frac{a}{b}} - \beta \bar{p}^{-1} m^{\frac{p}{p+q}-\frac{1}{2}} \|\delta\|_2^{1+\frac{q}{p}} + \\ & \frac{1}{2} \underline{p}^{-2} \left(\|\delta\|_2^{1+\frac{a}{b}} + \|\delta\|_2^{1+\frac{q}{p}}\right) + \\ & \frac{1}{2} l^2 \|\mathbf{L}_1^{-1}\|_2^2 \left(\|\delta\|_2^{1+\frac{a}{b}} + \|\delta\|_2^{1+\frac{q}{p}}\right) = \\ & -\left(\alpha \bar{p}^{-1} - \frac{1}{2} \underline{p}^{-2} - \frac{1}{2} l^2 \|\mathbf{L}_1^{-1}\|_2^2\right) \|\delta\|_2^{1+\frac{a}{b}} - \\ & \left(\beta \bar{p}^{-1} m^{\frac{p}{p+q}-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \underline{p}^{-2} - \frac{1}{2} l^2 \|\mathbf{L}_1^{-1}\|_2^2\right) \|\delta\|_2^{1+\frac{q}{p}} = \\ & -\left(\alpha \bar{p}^{-1} - \frac{1}{2} \underline{p}^{-2} - \frac{1}{2} l^2 \|\mathbf{L}_1^{-1}\|_2^2\right) \left(\sum_{i=1}^m \delta_i^2\right)^{\frac{b+a}{2b}} - \\ & \left(\beta \bar{p}^{-1} m^{\frac{p}{p+q}-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \underline{p}^{-2} - \frac{1}{2} l^2 \|\mathbf{L}_1^{-1}\|_2^2\right) \left(\sum_{i=1}^m \delta_i^2\right)^{\frac{p+q}{2p}}. \end{aligned} \quad (18)$$

由于 $V(t) = \frac{1}{2} \delta^T (\mathbf{L}_1 \mathbf{P})^{-1} \delta \leq \frac{1}{2} \lambda_{\max}(\mathbf{P}^{-1} \mathbf{L}_1^{-1}) \sum_{i=1}^m \delta_i^2$, 所以有

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) \leq & -\left(\alpha \bar{p}^{-1} - \frac{1}{2} \underline{p}^{-2}\right) \left(\frac{2}{\lambda_{\max}(\mathbf{P}^{-1} \mathbf{L}_1^{-1})} V(t)\right)^{\frac{b+a}{2b}} + \\ & \frac{1}{2} l^2 \|\mathbf{L}_1^{-1}\|_2^2 \left(\frac{2}{\lambda_{\max}(\mathbf{P}^{-1} \mathbf{L}_1^{-1})} V(t)\right)^{\frac{b+a}{2b}} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left(\beta \bar{p}^{-1} m^{\frac{p}{p+q}-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \underline{p}^{-2}\right) \left(\frac{2}{\lambda_{\max}(\mathbf{P}^{-1} \mathbf{L}_1^{-1})} V(t)\right)^{\frac{p+q}{2p}} - \\ & \frac{1}{2} l^2 \|\mathbf{L}_1^{-1}\|_2^2 \left(\frac{2}{\lambda_{\max}(\mathbf{P}^{-1} \mathbf{L}_1^{-1})} V(t)\right)^{\frac{p+q}{2p}} \leq \\ & -c V^{\frac{b+a}{2b}} - d V^{\frac{p+q}{2p}}. \end{aligned} \quad (19)$$

式中:

$$c = \left(\alpha \bar{p}^{-1} - \frac{1}{2} \underline{p}^{-2} - \frac{1}{2} l^2 \|\mathbf{L}_1^{-1}\|_2^2\right) \left(\frac{2}{\lambda_{\max}(\mathbf{P}^{-1} \mathbf{L}_1^{-1})}\right)^{\frac{b+a}{2b}};$$

$$d = \beta \bar{p}^{-1} m^{\frac{p}{p+q}-\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{\lambda_{\max}(\mathbf{P}^{-1} \mathbf{L}_1^{-1})}\right)^{\frac{p+q}{2p}} -$$

$$\frac{1}{2} \underline{p}^{-2} \left(\frac{2}{\lambda_{\max}(\mathbf{P}^{-1} \mathbf{L}_1^{-1})}\right)^{\frac{p+q}{2p}} -$$

$$\frac{1}{2} l^2 \|\mathbf{L}_1^{-1}\|_2^2 \left(\frac{2}{\lambda_{\max}(\mathbf{P}^{-1} \mathbf{L}_1^{-1})}\right)^{\frac{p+q}{2p}}.$$

由于 $\alpha \bar{p}^{-1} > \frac{1}{2} \underline{p}^{-2} + \frac{1}{2} l^2 \|\mathbf{L}_1^{-1}\|_2^2$, $\beta \bar{p}^{-1} m^{\frac{p}{p+q}-\frac{1}{2}} > \frac{1}{2} \underline{p}^{-2} +$

$\frac{1}{2} l^2 \|\mathbf{L}_1^{-1}\|_2^2$ 所以 $c, d > 0$. 再根据引理 4 得到 $V(t)=0$, 意味着 δ 在固定时间 T_0 内收敛到 0. 因此:

$$T_0 \leq \frac{2b}{c(b-a)} + \frac{2p}{d(q-p)}. \quad (20)$$

注意矩阵是随机矩阵 $-\mathbf{L}_1^{-1} \mathbf{L}_2$, 也就是说, $-\mathbf{L}_1^{-1} \mathbf{L}_2 x_s(t) \in Co(x_s)$. 证毕.

定理 1 给出了多智能体系统包含控制的充分条件, 在有未知干扰情形下, 系统 (1) 在固定时间内实现包含控制. 对此, 考虑一种特殊情形, 对于不带干扰下的系统, 智能体 i 的动力学方程如下:

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = u_i(t) + f(x_i(t), t), & i \in V_F, \\ \dot{x}_i(t) = f(x_i(t), t), & i \in V_L. \end{cases} \quad (21)$$

定理 2 若满足假设 1、2、4. 当控制参数满足以下不等式时:

$$\begin{cases} \alpha \bar{p}^{-1} > \frac{1}{2} \underline{p}^{-2} + \frac{1}{2} l^2 \|\mathbf{L}_1^{-1}\|_2^2, \\ \beta \bar{p}^{-1} m^{\frac{p}{p+q}-\frac{1}{2}} > \frac{1}{2} \underline{p}^{-2} + \frac{1}{2} l^2 \|\mathbf{L}_1^{-1}\|_2^2, \end{cases} \quad (22)$$

系统 (21) 在控制协议 (7) 下仍然可以实现固定时间包含控制.

3 数值模拟

例1 设某多智能体系统由2个领导者和4个跟随者构成的。跟随者分别记为1, 2, 3, 4; 领导者分别记为5, 6, 相应的通信拓扑如图1所示。很明显假设1和4成立。

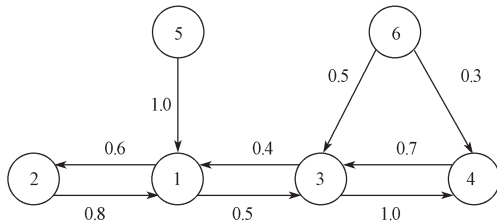


图1 例1对应的通信拓扑图

Fig. 1 Corresponding communication topology with example 1

智能体的动力学由等式(1)描述。令 $f=(x_i, t)=x_i \sin t$, $d(t)=[\sin t, 0.5 \sin t, -\sin t, 1.5 \sin t]^T$, 很明显, 假设2, 3也成立。经过计算, 可以取 $P=\text{diag}(2/5, 3/10, 1/2, 5/7)$, 则可以选择控制参数分别为 $b=7$, $a=p=3$, $q=5$, $\alpha=30$, $\beta=40$, $\gamma=20$, 使得参数满足不等式(10); 随机生成初始状态 $x_f(0)=(7, 4, -8, 3)^T$, $x_s(0)=(6, -9)^T$, 则有 $\delta(0)=(9.4, -1.8, -14.7, 14.6)^T$ 。跟踪误差状态随时间变化曲线如图2所示。很明显, δ 逐渐收敛到0, 即固定时间包含控制问题得以解决。

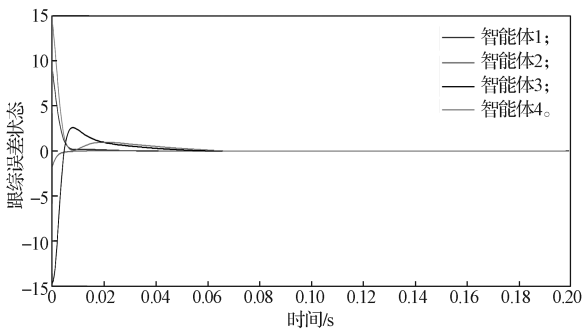


图2 带干扰情况下的跟踪误差状态随时间变化曲线
Fig. 2 Time-dependent tracking error state curves with disturbances

例2 考虑的多智能体系统由5个跟随智能体(分别用编号1~5表示)和2个领导智能体(分别用编号6、7表示)构成的。相应的通信拓扑如图3所示。智能体的动力学由式(21)描述。令 $f(x_i, t)=x_i \cos t$; 经过简单计算可以选择控制参数分别为 $b=7$, $a=5$, $p=3$, $q=11$, $\alpha=32$, $\beta=38$, $\gamma=22$, 使得满足不等式(22); 随机生成初始跟踪误差状态为 $\delta(0)=(2, -15, -3, 5, 12)^T$ 。跟踪误差状态随时间的变化曲线如图4所示。很明显, δ 逐渐收敛到0, 即固定时间包含控制问题得以解决。

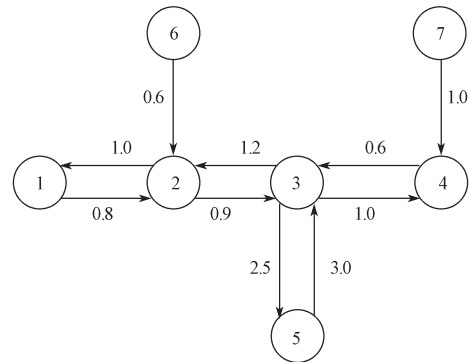


图3 例2对应的通信拓扑图

Fig. 3 Corresponding communication topology with example 2

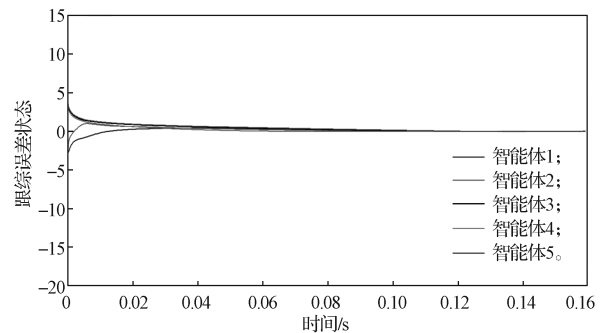


图4 不带干扰情况下的跟踪误差状态随时间变化曲线
Fig. 4 Tracking error state curves with time without disturbances

4 结语

针对有向拓扑情形下的多智能体系统, 提出了一种固定时间控制协议, 用以解决有向拓扑下非线性多智能体系统的包含控制问题。结果表明, 该算法所提出的控制协议对未知干扰具有鲁棒性, 且收敛时间与智能体的初始条件无关。最后, 给出两个例子, 证明了理论结果的有效性。

本研究只对非线性多智能体系统固定时间包含控制问题进行了初步研究。在今后的工作中, 还要很多重要问题需要解决, 主要有:

1) 本文研究的有向网络拓扑是在满足细致平衡条件下的, 如果对于更具有一般性的有向网络拓扑, 得到的结论也许是相似的, 此时的应用范围将会更加广泛。

2) 在控制工程中, 常用的是高阶的控制系统, 本文研究的是一阶多智能体系统, 在今后的研究中, 考虑利用滑模控制有助于研究解决二阶控制系统。

参考文献:

[1] JI M, FERRARI-TRECCATE G, EGERSTEDT M,

- et al. Containment Control in Mobile Networks[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2008, 53(8): 1972–1975.
- [2] NOTARSTEFANO G, EGERSTEDT M, HAQUE M. Containment in Leader-Follower Networks with Switching Communication Topologies[J]. Automatica, 2011, 47(5): 1035–1040.
- [3] LI B, YANG H Y, CHEN Z Q, et al. Distributed Containment Control of Multi-Agent Systems with General Linear Dynamics and Time-Delays[J]. International Journal of Control, Automation and Systems, 2018, 16(6): 2718–2726.
- [4] LI Z K, REN W, LIU X D, et al. Distributed Containment Control of Multi-Agent Systems with General Linear Dynamics in the Presence of Multiple Leaders[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2013, 23(5): 534–547.
- [5] PARSEGOV S E, POLYAKOV A E, SHCHERBAKOV P S. Fixed-Time Consensus Algorithm for Multi-Agent Systems with Integrator Dynamics[J]. IFAC Proceedings Volumes, 2013, 46(27): 110–115.
- [6] WANG H, YU W W, WEN G H, et al. Fixed-Time Consensus of Nonlinear Multi-Agent Systems with General Directed Topologies[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs, 2019, 66(9): 1587–1591.
- [7] DEFOORT M, POLYAKOV A, DEMASURE G, et al. Leader-Follower Fixed-Time Consensus for Multi-Agent Systems with Unknown Non-Linear Inherent Dynamics[J]. IET Control Theory & Applications, 2015, 9(14): 2165–2170.
- [8] HONG H F, YU W W, WEN G H, et al. Distributed Robust Fixed-Time Consensus for Nonlinear and Disturbed Multiagent Systems[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, 2017, 47(7): 1464–1473.
- [9] SHANG Y L. Fixed-Time Group Consensus for Multi-Agent Systems with Non-Linear Dynamics and Uncertainties[J]. IET Control Theory & Applications, 2018, 12(3): 395–404.
- [10] DU H B, WEN G H, WU D, et al. Distributed Fixed-Time Consensus for Nonlinear Heterogeneous Multi-Agent Systems[J]. Automatica, 2020, 113: 108797.
- [11] 贺清碧, 唐朝君, 黄大荣, 等. 有向切换网络拓扑下非线性多智能体系统的包含控制[J]. 科学技术与工程, 2017, 17(16): 254–258.
- HE Qingbi, TANG Zhaojun, HUANG Darong, et al. Containmentcontrol of Nonlinear Multi-Agent Systems with Directedswitching Topologies[J]. Science Technology and Engineering, 2017, 17(16): 254–258.
- [12] NING B D, ZUO Z Y, JIN J, et al. Distributed Fixed-Time Coordinated Tracking for Nonlinear Multi-Agent Systems Under Directed Graphs[J]. Asian Journal of Control, 2018, 20(2): 646–658.
- [13] WANG L, XIAO F. Finite-Time Consensus Problems for Networks of Dynamic Agents[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2010, 55(4): 950–955.
- [14] GOLDBERG M. Equivalence Constants for LP Norms of Matrices[J]. Linear and Multilinear Algebra, 1987, 21(2): 173–179.
- [15] MENG Z Y, REN W, YOU Z. Distributed Finite-Time Attitude Containment Control for Multiple Rigid Bodies[J]. Automatica, 2010, 46(12): 2092–2099.
- [16] ZHANG Y J, YANG Y, ZHAO Y, et al. Distributed Finite-Time Tracking Control for Nonlinear Multi-Agent Systems Subject to External Disturbances[J]. International Journal of Control, 2013, 86(1): 29–40.
- [17] POLYAKOV A. Nonlinear Feedback Design for Fixed-Time Stabilization of Linear Control Systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2012, 57(8): 2106–2110.

(责任编辑: 申 剑)