

doi:10.3969/j.issn.1673-9833.2022.02.008

# 离散时间多智能体系统的间歇二部一致性

覃宇燕, 刘琛, 曾旺, 罗杰沛

(湖南工业大学理学院, 湖南株洲 412007)

**摘要:** 为加强多智能体系统的协同控制, 研究了离散时间多智能体系统的间歇二部一致性问题。首先, 结合间歇控制, 提出了可以实现二部一致性的控制协议, 得到了二部一致性达到的条件; 然后, 利用代数图论、Lyapunov 稳定性理论知识, 给出了系统的收敛性分析; 最后, 利用数值仿真实验验证了所设计的间歇控制协议对离散时间多智能体系统稳定有效。

**关键词:** 多智能体系统; 离散时间; 二部一致性; 间歇控制

**中图分类号:** TP273

**文献标志码:** A

**文章编号:** 1673-9833(2022)02-0056-06

**引文格式:** 覃宇燕, 刘琛, 曾旺, 等. 离散时间多智能体系统的间歇二部一致性[J]. 湖南工业大学学报, 2022, 36(2): 56-61.

## Intermittent Bipartite Consistency of Discrete-Time Multi-Agent Systems

QIN Yuyan, LIU Chen, ZENG Wang, LUO Jiepei

(College of Science, Hunan University of Technology, Zhuzhou Hunan 412007, China)

**Abstract:** In order to strengthen the cooperative control of multi-agent systems, a research has been conducted on the intermittent bipartite consistency of discrete-time multi-agent systems. Firstly, combined with intermittent control, a control protocol which can achieve bipartite consensus has been proposed, thus obtaining the condition of bipartite consistency. And then, the convergence analysis of the system is given with the algebraic graph theory and Lyapunov stability theory adopted. Finally, the numerical simulation results show that the proposed intermittent control protocol is effective for the stability of discrete time multi-agent systems.

**Keywords:** multi-agent system; discrete-time; bipartite consistency; intermittent control

## 0 引言

近年来, 随着神经网络、人工智能、嵌入式设备等的发展, 多智能体的应用范围不断扩大, 相关研究不断深入。多智能体系统协同控制是一个基本研究问题, 目前, 许多学者对一致性问题展开了研究, 并取

得了丰富的成果<sup>[1-4]</sup>。然而, 在许多实际网络中, 智能体之间不仅存在合作关系, 可能还存在竞争关系。在这种合作与竞争关系并存的系统中, 会呈现出另一种一致性现象, 称为二部一致性<sup>[5]</sup>。

二部一致性的概念由 C. Altafini 在文献 [5] 中首次提出, 文中表明, 当系统的网络连接拓扑是带权重

**收稿日期:** 2021-06-10

**基金项目:** 国家自然科学基金资助项目 (61703154); 湖南省自然科学基金资助项目 (2020JJ6084); 湖南省教育厅科学研究基金资助项目 (19C0591)

**作者简介:** 覃宇燕 (1997-), 女, 广西贵港人, 湖南工业大学硕士生, 主要研究方向为多智能体系统协调控制,  
E-mail: 1369745738@qq.com

**通信作者:** 罗杰沛 (1989-), 男, 湖南株洲人, 湖南工业大学讲师, 主要研究方向为复杂系统过程控制,  
E-mail: luojiepei@163.com

的符号图并且是结构平衡的, 则在给定的控制协议作用下, 系统最终会趋向于二部一致。随后, 有不少学者从不同的角度对多智能体系统的二部一致性进行了探讨, 并取得了不错的成果<sup>[6-9]</sup>。文献[10]探讨了连续时间二阶多智能体系统的网络连接拓扑是无向连通的并且符号图是结构平衡时, 系统在脉冲控制下实现二部一致; 文献[11]研究了非线性多智能体系统在一致性协议下, 具有正负混合连接权重的有限时间二部一致性; 文献[12]研究了在给定的假设条件下, 二阶多智能体系统基于自适应变结构控制的二部一致性问题, 而关于离散时间多智能体系统的研究相对较少。由于间歇控制方法比较易于被应用到现实中, 它不需要智能体之间的持续沟通以及控制器的不断运转, 进而减少资源的大量消耗。因此, 对间歇二部一致性的研究亦具有很好的实践意义。基于以上论述, 本文将基于离散时间系统模型研究多智能体系统的间歇二部一致性, 以期多机器人网络、智能网联车、智能电网等实际网络的间歇协调控制提供参考。

## 1 问题描述

用无向图  $G=(V, E, A_E)$  表示一个由  $N$  个节点组成的多智能体系统结构拓扑。其中  $V=\{v_1, v_2, \dots, v_N\}$  为节点集合;  $E \subseteq V \times V$ , 为边集;  $A_E=[a_{ij}]_{N \times N}$ , 为无向图  $G$  对应的加权邻接矩阵。边  $(v_j, v_i) \in E$ , 表示节点  $v_i$  和节点  $v_j$  存在信息交流;  $N_i=\{v_j | (v_j, v_i) \in E\}$ , 表示节点  $v_i$  的邻居集合。定义符号图  $G$  的拉普拉斯矩阵  $L=[l_{ij}]_{N \times N}$  的元素为  $l_{ij} = \begin{cases} \sum_{j \in N_i} |a_{ij}|, & j=i; \\ -a_{ij}, & j \neq i. \end{cases}$

**定义 1** 对于无向图  $G$ , 如果存在两个集合  $V_1$  和  $V_2$ , 使得其满足:

$$1) V_1 \cap V_2 = \emptyset, V_1 \cup V_2 = V.$$

$$2) \forall v_i, v_j \in V_q, q \in \{1, 2\}, \text{ 有 } a_{ij} \geq 0,$$

$\forall v_i \in V_q, v_j \in V_r, q, r \in \{1, 2\}, q \neq r, \text{ 有 } a_{ij} \leq 0,$   
则称无向图  $G$  是结构平衡的。

考虑离散时间多智能体系统的状态方程为

$$\begin{cases} \mathbf{x}_i(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}_i(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}_i(k), \\ \mathbf{x}_0(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}_0(k). \end{cases} \quad (1)$$

式(1)中:  $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{B}$  为系数矩阵;

$\mathbf{x}_i(k)$  为多智能体系统中第  $i$  个智能体的状态变量;

$\mathbf{x}_0(k)$  为领导者的状态变量;

$\mathbf{u}_i(k)$  为智能体  $i$  的间歇控制输入。

定义系统的状态误差为

$$\mathbf{e}_i(k) = \mathbf{x}_i(k) - s_i \mathbf{x}_0(k),$$

若  $i \in V_1$ , 则  $s_i=1$ ; 若  $i \in V_2$ , 则  $s_i=-1$ 。

下面给出系统达到二部一致性的定义。

**定义 2** 若  $G$  是结构平衡的, 当系统满足:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{e}_i(k)\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}_i(k) - s_i \mathbf{x}_0(k)\| = 0, \quad i=1, 2, \dots, N,$$

则称系统实现了二部一致。

**假设 1**  $G$  是无向连通的, 且领导者全局可达。

**假设 2**  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  是可正定的。

**假设 3**  $G$  是结构平衡的。

**引理 1**<sup>[13]</sup> 若假设 2 成立, 则存在唯一的正定矩阵  $\mathbf{P}$ , 满足如下代数 Riccati 方程:

$$\mathbf{P} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{B} (\mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B} + \mathbf{I})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{I}.$$

**注 1** 根据上述引理, 不妨设  $\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{P} \geq 0$ , 否则当  $\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{P} < 0$  时,  $\mathbf{A}$  的所有特征值都在单位圆内, 这说明系统会趋于稳定。因此, 有  $\lambda_{\max}(\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{P}) > 0$ 。

## 2 主要结果

考虑如下间歇控制协议:

$$\mathbf{u}_i(k) = \begin{cases} -\mathbf{K} \left( \sum_{j \in N_i} |a_{ij}| (\mathbf{x}_i(k) - \text{sgn}(a_{ij}) \mathbf{x}_j(k)) + h_i (\mathbf{x}_i(k) - s_i \mathbf{x}_0(k)) \right), & k \in [mT, mT+h); \\ 0, & k \in [mT+h, (m+1)T). \end{cases}$$

式中:  $\mathbf{K}$  为增益矩阵;

$\text{sgn}(\cdot)$  为符号函数。

间歇控制协议中, 若  $a_{ij} > 0$ , 则表示第  $i$  个智能体与第  $j$  个智能体之间存在合作关系; 若  $a_{ij} < 0$ , 则表示第  $i$  个智能体与第  $j$  个智能体之间存在竞争关系; 若  $a_{ij} = 0$ , 则表示第  $i$  个智能体与第  $j$  个智能体之间不存在信息交流。 $h > 0$ , 表示一个周期内的间歇控制宽度;  $T > 0$ , 为系统的控制周期, 且  $0 < h < T$ 。

**定理 1** 考虑到带有间歇控制协议的离散时间多智能体系统(1), 在系统满足上述假设的前提下,

取  $\mathbf{K} = \frac{1}{\lambda_1} (\mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B} + \mathbf{I})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{A}$ ,  $\lambda_1$  为  $\tilde{\mathbf{L}}$  的最小特征值,

当系统满足以下两个条件:

$$\text{i) } \lambda_{\max}(\mathbf{P}) > 1, \quad \frac{T}{h} < 1 - \frac{a}{b};$$

$$\text{ii) } \lambda_{\max}(\mathbf{P}) < 1, \quad \frac{T}{h} < 1 - \frac{c}{b};$$

以上两式中:  $a = \ln \left( 1 - \frac{1}{\lambda_{\max}(\mathbf{P})} \right)$ ;

$$b = \ln \left( 1 + \frac{\tilde{\lambda}}{\lambda_{\min}(\mathbf{P})} \right);$$

$$c = \ln(1 - \lambda_{\max}(\mathbf{P})).$$

则系统实现了二部一致性。

**证明** 记  $\mathbf{e}(k) = (e_1^T(k), e_2^T(k), \dots, e_N^T(k))^T$ ,

$$\mathbf{x}(k) = (x_1^T(k), x_2^T(k), \dots, x_N^T(k))^T,$$

$$\mathbf{H} = \text{diag}\{h_1, h_2, \dots, h_N\}, \tilde{\mathbf{L}} = \mathbf{L} + \mathbf{H}.$$

则当  $k \in [mT, mT+h)$  时,

$$\mathbf{x}_i(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}_i(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}_i(k) = \mathbf{A}\mathbf{x}_i(k) -$$

$$\mathbf{BK} \left( \sum_{j \in N_i} |a_{ij}| (x_j(k) - \text{sgn}(a_{ij}) x_j(k) + h_i(x_j(k) - s_i x_0(k))) \right),$$

从而可得

$$\mathbf{e}(k+1) = (\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{A} - \tilde{\mathbf{L}} \otimes \mathbf{BK}) \mathbf{e}(k),$$

当  $k \in [mT+h, (m+1)T)$  时,  $\mathbf{x}_i(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}_i(k)$ ,

可得  $\mathbf{e}(k+1) = (\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{A}) \mathbf{e}(k)$ 。

选取 Lyapunov 函数为  $V(k) = \mathbf{e}^T(k) (\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{P}) \mathbf{e}(k)$ , 则有:

i) 当  $k \in [mT, mT+h)$  时,

$$V(k+1) - V(k) = \mathbf{e}^T(k+1) (\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{P}) \mathbf{e}(k+1) -$$

$$\mathbf{e}^T(k) (\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{P}) \mathbf{e}(k) =$$

$$\mathbf{e}^T(k) (\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{A}^T - \tilde{\mathbf{L}} \otimes \mathbf{K}^T \mathbf{B}^T) (\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{P}) (\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{A} -$$

$$\tilde{\mathbf{L}} \otimes \mathbf{BK}) \mathbf{e}(k) - \mathbf{e}^T(k) (\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{P}) \mathbf{e}(k) =$$

$$\mathbf{e}^T(k) \left[ (\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{A}^T \mathbf{P} - \tilde{\mathbf{L}} \otimes \mathbf{K}^T \mathbf{B}^T \mathbf{P}) (\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{A} -$$

$$\tilde{\mathbf{L}} \otimes \mathbf{BK}) - \mathbf{I}_N \otimes \mathbf{P} \right] \mathbf{e}(k) =$$

$$\mathbf{e}^T(k) (\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} - \tilde{\mathbf{L}} \otimes \mathbf{A}^T \mathbf{PBK} - \tilde{\mathbf{L}} \otimes \mathbf{K}^T \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{A} +$$

$$\tilde{\mathbf{L}}^2 \otimes \mathbf{K}^T \mathbf{B}^T \mathbf{PBK} - \mathbf{I}_N \otimes \mathbf{P}) \mathbf{e}(k).$$

由于  $\tilde{\mathbf{L}} = \mathbf{L} + \mathbf{H}$  为实对称矩阵, 则存在正交矩阵  $\mathbf{Q}$ , 使得  $\mathbf{Q}^T \tilde{\mathbf{L}} \mathbf{Q} = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N\}$ , 其中  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$  为  $\tilde{\mathbf{L}}$  的  $N$  个特征值。现令  $\tilde{\mathbf{e}}(k) = (\mathbf{Q}^T \otimes \mathbf{I}_n) \mathbf{e}(k)$ , 即

$$\mathbf{e}^T(k) = \tilde{\mathbf{e}}^T(k) (\mathbf{Q} \otimes \mathbf{I}_n)^{-1} = \tilde{\mathbf{e}}^T(k) (\mathbf{Q}^{-1} \otimes \mathbf{I}_n) =$$

$$\tilde{\mathbf{e}}^T(k) \times (\mathbf{Q}^T \otimes \mathbf{I}_n).$$

$V(k+1) - V(k) =$

$$\tilde{\mathbf{e}}^T(k) (\mathbf{Q}^T \otimes \mathbf{I}_n) (\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{Q}^T \tilde{\mathbf{L}} \otimes \mathbf{K}^T \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{A} +$$

$$\mathbf{Q}^T \tilde{\mathbf{L}}^2 \otimes \mathbf{K}^T \mathbf{B}^T \mathbf{PBK} - \mathbf{Q}^T \otimes \mathbf{P}) (\mathbf{Q} \otimes \mathbf{I}_n) \tilde{\mathbf{e}}(k) =$$

$$\tilde{\mathbf{e}}^T(k) (\mathbf{Q}^T \otimes \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{Q}^T \tilde{\mathbf{L}} \otimes \mathbf{A}^T \mathbf{PBK} - \mathbf{Q}^T \tilde{\mathbf{L}} \otimes \mathbf{K}^T \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{A} +$$

$$\mathbf{Q}^T \tilde{\mathbf{L}}^2 \otimes \mathbf{K}^T \mathbf{B}^T \mathbf{PBK} - \mathbf{Q}^T \otimes \mathbf{P}) (\mathbf{Q} \otimes \mathbf{I}_n) \tilde{\mathbf{e}}(k) =$$

$$\tilde{\mathbf{e}}^T(k) (\mathbf{Q}^T \mathbf{Q} \otimes \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{Q}^T \tilde{\mathbf{L}} \mathbf{Q} \otimes \mathbf{A}^T \mathbf{PBK} - \mathbf{Q}^T \tilde{\mathbf{L}} \mathbf{Q} \otimes$$

$$\mathbf{K}^T \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{Q}^T \tilde{\mathbf{L}}^2 \mathbf{Q} \otimes \mathbf{K}^T \mathbf{B}^T \mathbf{PBK} - \mathbf{Q}^T \mathbf{Q} \otimes \mathbf{P}) \tilde{\mathbf{e}}(k) =$$

$$\tilde{\mathbf{e}}^T(k) (\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} - \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N\} \otimes \mathbf{A}^T \mathbf{PBK} -$$

$$\text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N\} \otimes \mathbf{K}^T \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{A} +$$

$$\text{diag}\{\lambda_1^2, \lambda_2^2, \dots, \lambda_N^2\} \otimes \mathbf{K}^T \mathbf{B}^T \mathbf{PBK} - \mathbf{I}_N \otimes \mathbf{P}) \tilde{\mathbf{e}}(k) =$$

$$\sum_{i=1}^N \tilde{e}_i^T(k) (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{A}^T \mathbf{PBK} - \lambda_i \mathbf{K}^T \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{A} +$$

$$\lambda_i \mathbf{K}^T \mathbf{B}^T \mathbf{PBK} - \mathbf{P}) \tilde{e}_i(k).$$

令  $\mathbf{K} = \frac{1}{\lambda_1} (\mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B} + \mathbf{I})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{A}$ , 其中  $\lambda_1$  为  $\tilde{\mathbf{L}}$  的最小特征值, 则

$$V(k+1) - V(k) =$$

$$\sum_{i=1}^N \tilde{e}_i^T(k) (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{A}^T \mathbf{PBK} - \lambda_i^2 \mathbf{K}^T \mathbf{B}^T \mathbf{PBK} - \mathbf{P}) \tilde{e}_i(k) \leq$$

$$\sum_{i=1}^N \tilde{e}_i^T(k) (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} - 2\lambda_i \mathbf{A}^T \mathbf{PBK} - \lambda_i^2 \mathbf{K}^T \mathbf{B}^T \mathbf{PBK} - \mathbf{P}) \tilde{e}_i(k) =$$

$$\sum_{i=1}^N \tilde{e}_i^T(k) (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{B} (\mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B} + \mathbf{I})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{P}) \tilde{e}_i(k).$$

当  $\lambda_{\max}(\mathbf{P}) > 1$  时,

$$V(k+1) - V(k) = - \sum_{i=1}^N \tilde{e}_i^T(k) e_i(k) \leq$$

$$-\frac{1}{\lambda_{\max}(\mathbf{P})} \sum_{i=1}^N \tilde{e}_i^T(k) \mathbf{P} \tilde{e}_i(k) = -\frac{1}{\lambda_{\max}(\mathbf{P})} V(k).$$

当  $\lambda_{\max}(\mathbf{P}) < 1$  时,

$$V(k+1) - V(k) = - \sum_{i=1}^N \tilde{e}_i^T(k) e_i(k) \leq$$

$$-\frac{1}{\lambda_{\max}(\mathbf{P})} \sum_{i=1}^N \tilde{e}_i^T(k) \mathbf{P} \tilde{e}_i(k) \leq -\lambda_{\max}(\mathbf{P}) V(k).$$

ii) 当  $k \in [mT+h, (m+1)T)$  时,

$$V(k+1) - V(k) =$$

$$\mathbf{e}^T(k+1) (\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{P}) \mathbf{e}(k+1) - \mathbf{e}^T(k) (\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{P}) \mathbf{e}(k)$$

$$= \mathbf{e}^T(k) (\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{A}^T) (\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{P}) (\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{A}) \mathbf{e}(k) -$$

$$\mathbf{e}^T(k) (\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{P}) \mathbf{e}(k) =$$

$$\mathbf{e}^T(k) \left[ (\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{A}^T \mathbf{P}) (\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{A}) - (\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{P}) \right] \mathbf{e}(k) =$$

$$\mathbf{e}^T(k) (\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{I}_n \otimes \mathbf{P}) \mathbf{e}(k) =$$

$$\sum_{i=1}^N e_i^T(k) (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{P}) e_i(k) \leq$$

$$\lambda_{\max}(\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{P}) \sum_{i=1}^N e_i^T(k) e_i(k) \leq$$

$$\frac{\lambda_{\max}(\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{P})}{\lambda_{\min}(\mathbf{P})} \sum_{i=1}^N e_i^T(k) \mathbf{P} e_i(k) = \frac{\tilde{\lambda}}{\lambda_{\min}(\mathbf{P})} V(k)。$$

其中,  $\tilde{\lambda}$  是  $\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{P}$  的最大特征值, 且  $\tilde{\lambda} > 0$ 。

即当  $\lambda_{\max}(\mathbf{P}) > 1$  时,

$$V(k+1) \leq \begin{cases} \left(1 - \frac{1}{\lambda_{\max}(\mathbf{P})}\right) V(k), & k \in [mT, mT+h); \\ \left(1 - \frac{\tilde{\lambda}}{\lambda_{\min}(\mathbf{P})}\right) V(k), & k \in [mT+h, (m+1)T); \end{cases}$$

当  $\lambda_{\max}(\mathbf{P}) < 1$  时,

$$V(k+1) \leq \begin{cases} (1 - \lambda_{\max}(\mathbf{P})) V(k), & k \in [mT, mT+h); \\ \left(1 - \frac{\tilde{\lambda}}{\lambda_{\min}(\mathbf{P})}\right) V(k), & k \in [mT+h, (m+1)T)。 \end{cases}$$

因此, 当  $\lambda_{\max}(\mathbf{P}) > 1$  时,

$$V((m+1)T) \leq \left(1 + \frac{\tilde{\lambda}}{\lambda_{\min}(\mathbf{P})}\right)^{T-h} V(mT+h) \leq \left(1 + \frac{\tilde{\lambda}}{\lambda_{\min}(\mathbf{P})}\right)^{T-h} \left(1 - \frac{1}{\lambda_{\max}(\mathbf{P})}\right)^h V(mT)。$$

将上述不等式迭代  $m$  次, 可得

$$V((m+1)T) \leq \left[ \left(1 - \frac{1}{\lambda_{\max}(\mathbf{P})}\right)^h \left(1 + \frac{\tilde{\lambda}}{\lambda_{\min}(\mathbf{P})}\right)^{T-h} \right]^{m+1} V(0)。$$

由于  $1 - \frac{1}{\lambda_{\max}(\mathbf{P})} > 0$ ,  $1 + \frac{\tilde{\lambda}}{\lambda_{\min}(\mathbf{P})} > 0$ , 所以只要保证

$$0 < \left(1 - \frac{1}{\lambda_{\max}(\mathbf{P})}\right)^h \left(1 + \frac{\tilde{\lambda}}{\lambda_{\min}(\mathbf{P})}\right)^{T-h} < 1,$$

就有  $V((m+1)T) \rightarrow 0 (m \rightarrow \infty)$ 。

对上式两边取对数, 可得

$$h \ln \left(1 - \frac{1}{\lambda_{\max}(\mathbf{P})}\right) + (T-h) \ln \left(1 + \frac{\tilde{\lambda}}{\lambda_{\min}(\mathbf{P})}\right) < 0。$$

$$\text{令 } a = \ln \left(1 - \frac{1}{\lambda_{\max}(\mathbf{P})}\right), \quad b = \ln \left(1 + \frac{\tilde{\lambda}}{\lambda_{\min}(\mathbf{P})}\right),$$

则有  $ha + (T-h)b < 0$ , 即  $\frac{T}{h} < 1 - \frac{a}{b}$ 。

当  $\lambda_{\max}(\mathbf{P}) < 1$  时,

$$V((m+1)T) \leq \left(1 + \frac{\tilde{\lambda}}{\lambda_{\min}(\mathbf{P})}\right)^{T-h} V(mT+h) \leq \left(1 + \frac{\tilde{\lambda}}{\lambda_{\min}(\mathbf{P})}\right)^{T-h} (1 - \lambda_{\max}(\mathbf{P}))^h V(mT)。$$

将上述不等式迭代  $m$  次, 可得

$$V((m+1)T) \leq \left[ (1 - \lambda_{\max}(\mathbf{P}))^h \left(1 + \frac{\tilde{\lambda}}{\lambda_{\min}(\mathbf{P})}\right)^{T-h} \right]^{m+1} V(0)。$$

由于  $1 - \lambda_{\max}(\mathbf{P}) > 0$ ,  $1 + \frac{\tilde{\lambda}}{\lambda_{\min}(\mathbf{P})} > 0$ , 所以只要保证

$$0 < (1 - \lambda_{\max}(\mathbf{P}))^h \left(1 + \frac{\tilde{\lambda}}{\lambda_{\min}(\mathbf{P})}\right)^{T-h} < 1,$$

就有  $\|V((m+1)T)\| \rightarrow 0 (m \rightarrow \infty)$ 。

对上式两边取对数, 可得

$$h \ln(1 - \lambda_{\max}(\mathbf{P})) + (T-h) \ln \left(1 + \frac{\tilde{\lambda}}{\lambda_{\min}(\mathbf{P})}\right) < 0。$$

令  $c = \ln(1 - \lambda_{\max}(\mathbf{P}))$ , 则有  $hc + (T-h)b < 0$ , 即

$$\frac{T}{h} < 1 - \frac{c}{b}。$$

综上, 若该系统满足以上两个条件时, 则对于  $\forall k \in [mT, (m+1)T)$ , 有  $\|V(k)\| \rightarrow 0 (k \rightarrow \infty)$ , 从而有  $\|e(k)\| \rightarrow 0 (k \rightarrow \infty)$ , 说明该系统实现了二部一致性。

### 3 数值仿真

为了验证以上结论, 给出如下的仿真实验。考虑由 5 个智能体和 1 个领导者组成的多智能体系统(1), 其拓扑结构如图 1 所示。

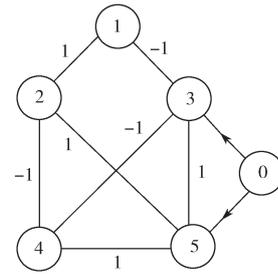


图 1 包含 5 个跟随者和 1 个领导的多智能体系统通信拓扑结构

Fig. 1 Multi-agent system communication topology with five followers and one leader

由前文论述可知, 图 1 所示符号图的加权邻接矩阵为

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

选取

$$A = \begin{bmatrix} -0.3 & -0.45 \\ -0.15 & -0.9 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1.4 \\ -1.6 \end{bmatrix},$$

求出  $\lambda_{\max}(P) = 0.5959 < 1$ , 则有

$$b = \ln \left( 1 + \frac{\tilde{\lambda}}{\lambda_{\min}(P)} \right) = 0.7139,$$

$$c = \ln(1 - \lambda_{\max}(P)) = -0.9,$$

$$1 - c/b \approx 2.2 > T/h.$$

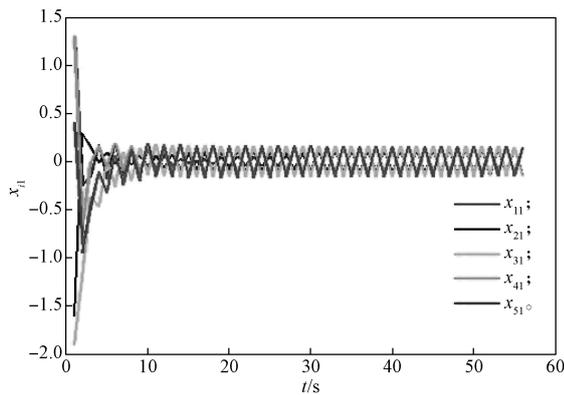
从而可以设计间歇控制的控制周期为  $T = 6$  s, 周期的控制宽度  $h = 4$  s. 设  $\mathbf{x}_i(k) = (\mathbf{x}_{i1}(k), \mathbf{x}_{i2}(k))^T$ , 其中  $\mathbf{x}_{i1}(k), \mathbf{x}_{i2}(k)$  为系统的两种状态变量, 并给定如下初始条件:

$$\mathbf{x}_1(0) = [1.3, -1.13]^T, \quad \mathbf{x}_2(0) = [-1.6, 1.5]^T,$$

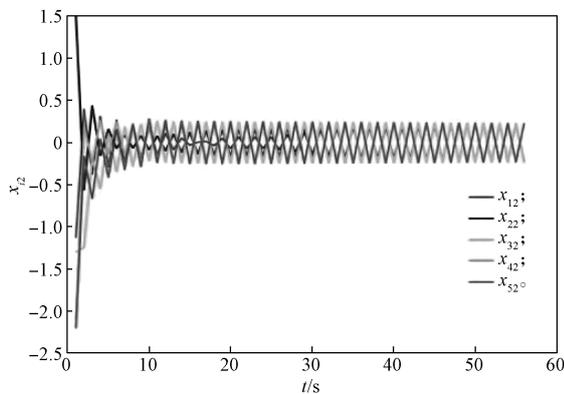
$$\mathbf{x}_3(0) = [-1.9, -1.3]^T, \quad \mathbf{x}_4(0) = [1.3, -2.1]^T,$$

$$\mathbf{x}_5(0) = [0.4, -2.2]^T,$$

将数据输入设计好的 Matlab 程序, 即可得到系统初始条件的状态轨迹图, 见图 2。



a)  $x_{i1}, i=1, 2, \dots, 5$



b)  $x_{i2}, i=1, 2, \dots, 5$

图 2 多智能体系统中各节点的状态轨迹

Fig. 2 Trajectories of  $x_{i1}$  and  $x_{i2}, i=1, 2, \dots, 5$  in the multi-agent system



由图 2 所示多智能体系统中 5 个节点两种状态变

量的状态轨迹可知, 在间歇控制器的作用下, 经过一段时间后, 系统达到稳定。因此, 说明针对离散时间多智能体系统所设计的间歇控制协议对系统稳定具有有效性。

## 4 结语

本文研究了离散时间多智能体系统的间歇二部一致性问题。在固定拓扑下, 基于图论、Lyapunov 稳定性理论、矩阵不等式等得到了系统实现间歇二部一致性的充分条件, 当在系统满足一定假设的前提下, 即

系统满足: 1)  $\lambda_{\max}(P) > 1, \frac{T}{h} < 1 - \frac{a}{b}$ ; 2)  $\lambda_{\max}(P) < 1,$

$\frac{T}{h} < 1 - \frac{c}{b}$  两个条件时, 系统将会实现间歇二部一致性。并通过数值仿真实验, 验证了所设计的间歇控制协议对离散时间多智能体系统的稳定具有有效性。同时, 利用间歇控制, 有效降低了网络通道的信息传递负载。后期, 将针对事件触发的间歇控制一致性展开研究。

## 参考文献:

- [1] REN W, BEARD R W. Consensus Seeking in Multiagent Systems Under Dynamically Changing Interaction Topologies[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2005, 50(5): 655-661.
- [2] REN W, BEARD R W, ATKINS E M. Information Consensus in Multivehicle Cooperative Control[J]. IEEE Control Systems Magazine, 2007, 27(2): 71-82.
- [3] XU C J, XU H C, SU H S, et al. Disturbance-Observer Based Consensus of Linear Multi-Agent Systems with Exogenous Disturbance Under Intermittent Communication[J]. Neurocomputing, 2020, 404: 26-33.
- [4] 徐海川, 刘东南, 刘琛, 等. 基于牵引控制的高阶线性多智能体系统自适应输出一致性[J]. 湖南工业大学学报, 2020, 34(4): 22-28.  
XU Haichuan, LIU Dongnan, LIU Chen, et al. Adaptive Output Consensus of High Order Linear Multi-Agent Systems Based on Pinning Control Under Fixed Topology[J]. Journal of Hunan University of Technology, 2020, 34(4): 22-28.
- [5] ALTAFINI C. Consensus Problems on Networks with Antagonistic Interactions[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2013, 58(4): 935-946.
- [6] LU J Q, WANG Y Q, SHI X C, et al. Finite-Time Bipartite Consensus for Multiagent Systems Under Detail-Balanced Antagonistic Interactions[J]. IEEE Transactions

- on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, 2021, 51(6): 3867–3875.
- [7] WU J, DENG Q, HAN T, et al. Distributed Bipartite Tracking Consensus of Nonlinear Multi-Agent Systems with Quantized Communication[J]. Neurocomputing, 2020, 395(28): 78–85.
- [8] NING B D, HAN Q L, ZUO Z Y. Bipartite Consensus Tracking for Second-Order Multiagent Systems: A Time-Varying Function Based Preset-Time Approach[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2021, 66(6): 2739–2745.
- [9] SU H S, CHEN J H, YANG Y C, et al. The Bipartite Consensus for Multi-Agent Systems with Matrix-Weight-Based Signed Network[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs, 2020, 67(10): 2019–2023.
- [10] LI Z, WANG W Q, FAN Y Q, et al. Impulsive Bipartite Consensus of Second-Order Multi-Agent Systems Without Relative Velocity Information[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2020, 80: 104987.
- [11] MENG D Y, JIA Y M, DU J P. Finite-Time Consensus for Multiagent Systems with Cooperative and Antagonistic Interactions[J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2016, 27(4): 762–770.
- [12] XU H C, LIU C, LV Y, et al. Adaptive Bipartite Consensus of Second-Order Multi-Agent Systems with Bounded Disturbances[J]. IEEE Access, 2020, 8: 186441–186447.
- [13] CHEN M Z Q, ZHANG L Y, SU H S, et al. Stabilizing Solution and Parameter Dependence of Modified Algebraic Riccati Equation with Application to Discrete-Time Network Synchronization[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2016, 61(1): 228–233.

(责任编辑: 廖友媛)

(上接第 55 页)

- [7] TAURO F, PAGANO C, PHAMDUY P, et al. Large-Scale Particle Image Velocimetry from an Unmanned Aerial Vehicle[J]. IEEE/ASME Transactions on Mechatronics, 2015, 20(6): 3269–3275.
- [8] TAURO F, PETROSELLI A, ARCANGELETTI E. Assessment of Drone-Based Surface Flow Observations[J]. Hydrological Processes, 2016, 30(7): 1114–1130.
- [9] TAURO F, PORFIRI M, GRIMALDI S. Surface Flow Measurements from Drones[J]. Journal of Hydrology, 2016, 540: 240–245.
- [10] LEWIS Q W, RHOADS B L. LSPIV Measurements of Two-Dimensional Flow Structure in Streams Using Small Unmanned Aerial Systems: 1. Accuracy Assessment Based on Comparison with Stationary Camera Platforms and In-Stream Velocity Measurements[J]. Water Resources Research, 2018, 54(10): 8000–8018.
- [11] LEWIS Q W, RHOADS B L. LSPIV Measurements of Two-Dimensional Flow Structure in Streams Using Small Unmanned Aerial Systems: 2. Hydrodynamic Mapping at River Confluences[J]. Water Resources Research, 2018, 54(10): 7981–7999.
- [12] LEWIS Q W, LINDROTH E M, RHOADS B L. Integrating Unmanned Aerial Systems and LSPIV for Rapid, Cost-Effective Stream Gauging[J]. Journal of Hydrology, 2018, 560: 230–246.
- [13] 王东峰, 邹谋炎. 傅氏变换的自配准性质及其在纹理识别和图象分割中的应用 [J]. 中国图象图形学报, 2003, 8(2): 140–146.
- WANG Dongfeng, ZOU Mouyan. Auto-Registration of Fourier Transform Magnitude Spectra and Its Application on Texture Identification and Segmentation[J]. Journal of Image and Graphics, 2003, 8(2): 140–146.

(责任编辑: 申 剑)