

doi:10.3969/j.issn.1673-9833.2022.02.006

# 二维多频声辐射问题的频域边界元分析方法

钦宇<sup>1</sup>, 周枫林<sup>1,2</sup>, 王炜佳<sup>1</sup>, 张玉良<sup>2</sup>, 袁小涵<sup>1</sup>

(1. 湖南工业大学 机械工程学院, 湖南 株洲 412007; 2. 衢州学院 机械工程学院, 浙江 衢州 324000)

**摘要:** 针对含有复杂频率成分声源的辐射问题, 首先采用傅里叶变换将时域声源传播的控制波动方程转化为频域的 Helmholtz 方程; 其次, 选取多个等间隔的频率点作为采样频率, 应用边界单元法求解各特征频率的 Helmholtz 方程, 获得不同位置在各采样频率下的声压; 最后, 采用离散傅里叶反变换将频域声压幅值和相位转化为时域声压。边界元方法的应用过程中, 在 Helmholtz 方程的常规边界积分方程的基础上, 采用非连续拉格朗日单元对边界进行离散, 保持了试函数在节点处的高阶连续性。在设计两个不同结构内声场分析的算例下, 验证了所提算法的正确性和准确性。

**关键词:** 辐射声场; 边界元法; 数值反变换; 频域法

中图分类号: O42

文献标志码: A

文章编号: 1673-9833(2022)02-0041-07

**引文格式:** 钦宇, 周枫林, 王炜佳, 等. 二维多频声辐射问题的频域边界元分析方法 [J]. 湖南工业大学学报, 2022, 36(2): 41-47.

## Frequency Domain Boundary Element Analysis Method for Two-Dimensional Broadband Acoustic Radiation

QIN Yu<sup>1</sup>, ZHOU Fenglin<sup>1,2</sup>, WANG Weijia<sup>1</sup>, ZHANG Yuliang<sup>2</sup>, YUAN Xiaohan<sup>1</sup>

(1. College of Mechanical Engineering, Hunan University of Technology, Zhuzhou Hunan 412007, China;

2. School of Mechanical Engineering, Quzhou University, Quzhou Zhejiang 324000, China)

**Abstract:** In view of the radiation problem of sound source with complex frequency components, firstly, by using Fourier transform, the governing wave equation of sound source propagation in time domain is transformed into Helmholtz equation in frequency domain. Secondly, with multiple equally spaced frequency points selected as the sampling frequency, the boundary element method is adopted to solve the Helmholtz equation of each characteristic frequency, thus obtaining the sound pressure at different positions under different sampling frequency. Finally, the amplitude and phase of sound pressure in frequency domain are transformed into time domain by an inverse discrete Fourier transform. In the application of the boundary element method, based on the conventional boundary integral equation of Helmholtz equation, the boundary is discretized by discontinuous Lagrange element, with the high order continuity of the test function at the node maintained as well. The calculation examples of acoustic field analysis in two different structures are designed, thus verifying the correctness and accuracy of the algorithm.

**Keywords:** radiation sound field; boundary element method; numerical inverse transformation; frequency domain method

收稿日期: 2021-06-23

基金项目: 湖南省教育厅科学研究基金资助项目 (19B145, 20C0607)

作者简介: 钦宇 (1998-), 男, 湖南怀化人, 湖南工业大学硕士生, 主要研究方向为先进设计方法与智能控制技术,

E-mail: 1193821226@qq.com

## 1 背景知识

离心风机出口气动噪声、机械设备运转时摩擦噪声等声源的主要频率成分在频谱上具有一定宽度,而多频声源的辐射问题一直是工程师关注的重要问题。适用于声辐射分析的工程数值方法以边界元法(boundary element method, BEM)<sup>[1-3]</sup>、有限元法(finite element analysis, FEM)<sup>[4]</sup>和矩量法(method of moments, MoM)<sup>[5]</sup>为主要代表,其中BEM和MoM都以边界积分方程为理论基础,特别适用于无限域的声辐射分析。

边界元法是一种基于边界积分方程为数学基础的数值分析方法,其边界积分方程能够自动满足无穷远场的辐射条件,并且仅需要对边界进行离散。较之其他的数值计算方法,边界元法引入了基本解,使其具有了解析和数值相结合的特点,从而使其计算精度相对较高,是一种比较适用于分析声学问题的计算方法<sup>[6]</sup>,目前被广泛应用于求解裂纹问题<sup>[7]</sup>、扩散波问题<sup>[8]</sup>、热传导问题<sup>[9]</sup>等。

目前对声学问题的分析主要采用频域法<sup>[10]</sup>和时域法<sup>[11]</sup>,时域类方法具有直接且通用性好的优点,然而在选择时间步长时会遇到数值不稳定问题。频域法通过Helmholtz控制方程和基本解,推导出边界积分方程,再将边界积分方程进行线性离散,建立矩阵,求解线性方程组来获得相应的解<sup>[12]</sup>。频域法在频率成分预判较准确的基础上能够获得较高的计算精度,通过反变换获得时域解。

目前,数值反变换的方法主要有Laplace数值反变换法<sup>[13-14]</sup>、Stehfest算法<sup>[15]</sup>、离散傅里叶反变换法<sup>[16-18]</sup>,工程中常利用Laplace数值变换结合边界元法计算结构动力响应问题,首先需要得到变换域中的一组所对应的位移和应力,然后通过Laplace数值反变换获得时域中相应量的解<sup>[19-21]</sup>。然而对于多频噪声的分析,需要使用多个采样频率并借助数值反变换技术才能获得满足要求的时域解答。

本研究中先应用频域边界元法分析二维多频声场辐射问题,将时域描述的控制方程通过Fourier变换转换为频域描述的控制方程(Helmholtz方程),再求解等间隔采样频率下的Helmholtz方程,然后采用离散傅里叶反变换(inverse discrete Fourier transform, IDFT)方法获得时域解。最后以两个不同区域的内声场问题算例,通过与参考声压进行比较,论证了所提方法的正确性。

## 2 二维声学频域边界元法

在均匀理想介质 $E$ 中,二维声学问题在空间内

传播的波动方程表示形式为

$$\nabla^2 \psi(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} = 0, \mathbf{x} \in E. \quad (1)$$

式中: $\nabla^2$ 为Laplace算子;

$\mathbf{x}$ 为配置点空间坐标;

$\psi(\mathbf{x}, t)$ 为 $t$ 时刻声场区域内点 $\mathbf{x}$ 处的声压;

$c$ 为介质中声音传播的速度。

对式(1)进行Fourier变换,假设时间项选取为 $e^{-j\omega t}$ ,可将瞬态问题从时间域转化到频率域进行简单稳态分析,则频域声压可以表示为

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \phi(\mathbf{x}, \omega) e^{-j\omega t}. \quad (2)$$

式中: $\phi(\mathbf{x}, \omega)$ 为在频率域内仅与位置有关的声压值;

$j$ 为虚数单位, $j^2 = -1$ ;  $\omega$ 为声源简谐振动角频率。

将式(2)代入(1),消去时间项,即可得如下Helmholtz控制方程。

$$\nabla^2 \phi(\mathbf{x}, \omega) + k^2 \phi(\mathbf{x}, \omega) = 0, \mathbf{x} \in E. \quad (3)$$

式中 $k$ 为波数,且 $k = \omega/c$ 。

控制方程的边界条件一般满足以下3类。

Dirichlet边界条件,即声压已知:

$$\phi(\mathbf{x}) = \bar{\phi}(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in E, \quad (4)$$

式中符号 $\bar{\phantom{x}}$ 表示已知值。

Neumann边界条件,即法向速度已知:

$$q(\mathbf{x}) = \frac{\partial \phi(\mathbf{x})}{\partial n} = \bar{q}(\mathbf{x}) = j\omega\rho v_n(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in E. \quad (5)$$

式中: $q(\mathbf{x})$ 为声压在 $\mathbf{x}$ 处的法向导数; $n$ 为单位外法向,指向背离声域; $\rho$ 为声学介质的质量密度; $v_n$ 为法向速度。

Robin边界条件,即阻抗边界条件已知:

$$\phi(\mathbf{x}) = Z v_n(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in E. \quad (6)$$

式中 $Z$ 为声阻抗。

将方程(3)转化为等效积分形式,并将试函数取为二维声学问题的基本解:

$$c(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x}) = \int_S \left[ G_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) q(\mathbf{y}) - \frac{\partial G_k(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n(\mathbf{y})} \phi(\mathbf{y}) \right] dS_{\mathbf{y}}, \mathbf{x} \in S. \quad (7)$$

式中: $c(\mathbf{x})$ 为自由项;

$\mathbf{y}$ 为场点空间坐标;

$q(\mathbf{y})$ 为声压在 $\mathbf{y}$ 处的法向导数;

$S_{\mathbf{y}}$ 为结构边界 $S$ 的子边界;

$G_k(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 和 $\frac{\partial G_k(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n(\mathbf{y})}$ 为二维和三维声学问题的基本

解,且

$$G_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{cases} \frac{j}{4} H_0^{(1)}(kr), & 2D; \\ \frac{e^{jkr}}{4\pi r}, & 3D; \end{cases} \quad (8)$$

$$\frac{\partial G_k(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n(\mathbf{y})} = \begin{cases} -\frac{jk}{4} H_1^{(1)}(kr) \frac{\partial r}{\partial n(\mathbf{y})}, & 2D; \\ \frac{e^{jkr}}{4\pi r^2} (jkr-1) \frac{\partial r}{\partial n(\mathbf{y})}, & 3D. \end{cases} \quad (9)$$

式中:  $H_0^{(1)}(kr)$ 、 $H_1^{(1)}(kr)$  分别为第一类零阶、一阶 Hankel 函数;

$r$  为源点与场点之间的距离, 且  $r=|\mathbf{x}-\mathbf{y}|$ ;

$\mathbf{x}$  为配置点 (即计算点或源点);

$\mathbf{y}$  为场点。

为了得到式 (7) 的数值解, 需要根据不同的要求与情况, 将边界划分为一些小单元。本文主要采用线性离散方法, 将边界  $S$  划分为  $N_e$  个线性单元, 则边界积分方程可以离散为

$$c_u \phi_u = \sum_{v=1}^{N_e} \int_{S_v} G_k(x, y) q_v dS_y - \sum_{v=1}^{N_e} \int_{S_v} \frac{\partial G_k(x, y)}{\partial n(y)} \phi_v dS_y. \quad (10)$$

式中:  $u$  为任一边界的节点,  $u=1, 2, \dots, N_e$ ;

$S_v$  为边界上的单元  $v$ ;

$q_v$  为在单元  $v$  上的法向导数;

$\phi_v$  为单元  $v$  有关的声压。

将源点置于所有场点上可得到:

$$c_u \phi_u + \sum_{v=1}^{N_e} \mathbf{H}_{uv} \phi_v = \sum_{v=1}^{N_e} \mathbf{G}_{uv} q_v. \quad (11)$$

式中  $\mathbf{H}_{uv}$  和  $\mathbf{G}_{uv}$  均为影响系数矩阵, 为遍及所有节点单元上的积分总和。

也可将式 (1) 写为

$$\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & \cdots & H_{1N_e} \\ H_{21} & H_{22} & \cdots & H_{2N_e} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{N_e 1} & H_{N_e 2} & \cdots & H_{N_e N_e} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_{N_e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & \cdots & G_{1N_e} \\ G_{21} & G_{22} & \cdots & G_{2N_e} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{N_e 1} & G_{N_e 2} & \cdots & G_{N_e N_e} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_{N_e} \end{bmatrix}. \quad (12)$$

可以将上述方程组表示为如下矩阵形式:

$$\mathbf{H}\mathbf{u}=\mathbf{G}\mathbf{q}. \quad (13)$$

此时, 利用边界条件, 将已知量移到方程右边,

未知量移至左边可得:

$$\mathbf{A}\mathbf{h}=\mathbf{b}. \quad (14)$$

式中:  $\mathbf{A}$  为未知声压值和位置法向导数组成的  $N_e \times N_e$  系数矩阵;

$\mathbf{b}$  为已知量组成的  $N_e$  阶已知向量;

$\mathbf{h}$  为由包含未知声压值和未知法向导数组成的  $N_e$  阶向量。

### 3 离散傅里叶逆变换

为实现离散傅里叶反变换运算, 需将连续信号进行截断、采样。

在频域边界元法中, 首先取  $N$  个等间隔不同的采样频率, 分别求解线性方程组 (14), 得到一组解  $x(\omega)$ , 再通过离散傅里叶逆变换 (IDFT) 得到时域解  $x(t)$ 。设  $x(t)$  是周期为  $T$  的离散函数, 每个周期内有  $N$  个等间隔频率离散点。其中  $\Delta\omega=\omega_0=2\pi/T$ 。为实现 IDFT 运算, 必须通过频率采样使频域函数为有限离散值, 此处采用  $\delta$  函数:

$$\delta(\omega)=\frac{1}{\Delta t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega-n\omega_0), \quad n=0, \pm 1, \pm 2, \dots. \quad (15)$$

式中:  $\Delta t$  为时间步长, 其中  $\Delta t=T/N$ ;

$\omega_0$  为初始频率点。

为避免产生频率混叠现象, 信号采样频率

$$f_s > 2f_{\max}. \quad (16)$$

同时为避免频混现象, 可通过选择较小的采样间隔  $T$  (即较高的采样频率) 来减小这种误差。

$$\tilde{X}(f)=X_s(f)*U(f). \quad (17)$$

为保证离散后的信号能唯一确定原连续信号, 采样一般等间隔取值, 其频率采样信号为

$$\tilde{X}(\omega)=\frac{1}{\Delta t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \sum_{m=0}^{N-1} X(m\omega_0) \delta(\omega-n\omega_0) \right]. \quad (18)$$

其 Fourier 变换:

$$\tilde{x}(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_k \delta(t-n\Delta t), \quad n=0, \pm 1, \pm 2, \dots. \quad (19)$$

根据  $\delta$  函数的筛选性, 化简求得其 Fourier 系数  $C_k$  为

$$C_k = \sum_{m=0}^{N-1} X(m\omega_0) e^{j2\pi km/N}. \quad (20)$$

将式 (20) 代入式 (19), 可求得:

$$\tilde{x}(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{N-1} X(m\omega_0) e^{j2\pi mn/N} \delta(\omega-n\omega_0). \quad (21)$$

一个周期内  $N$  个采样点的复数值为

$$x(n\Delta t)=\frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X(m\omega_0) e^{j2\pi mn/N}, \quad n=0, 1, \dots, N-1. \quad (22)$$

式中  $N$  为采样频率点的数量。

由  $T=2\pi/\omega_0=N\Delta t$  可得:

$$x(n\Delta t) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X(m\omega_0) e^{im\omega_0 n\Delta t}, \quad n=0, 1, \dots, N-1. \quad (23)$$

傅里叶级数可以写成复指数形式, 根据欧拉公式

$$e^{\pm j\omega t} = \cos \omega t \pm j \sin \omega t \quad (24)$$

可得到:

$$x(n\Delta t) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \left[ X(m\omega_0) \times (\cos(m\omega_0 n\Delta t) + j \sin(m\omega_0 n\Delta t)) \right]. \quad (25)$$

## 4 数值算例

为验证二维频域边界元法结合离散傅里叶反变换求解多频声辐射问题的准确性, 设计了两个验证算例, 将计算结果与解析解进行对比以验证该方法的正确性。

### 4.1 旋转 L 形边界区域内部声压变化

在一个旋转 L 形边界区域条件下进行内点声压变化情况, 其边界节点之间间距设为 0.1 cm,  $x$ 、 $y$  分别为内部点的横坐标与纵坐标 (算例中都将如此使用), 计算求解过程中一共采用了 64 个边界节点, 旋转 L 形边界区域节点分布情况如图 1 所示。

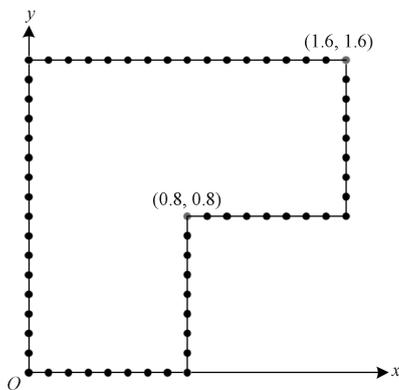


图 1 旋转 L 形边界节点分布图

Fig. 1 Distribution diagram of rotating L-shaped boundary nodes

图 1 所示边界上的声压分布按照如下公式给出:

在  $y=0$  的边界上,

$$\psi = -2e^{x+y-\sqrt{2}t} \cos(x+y-\sqrt{2}t);$$

在  $x=0.8$  的边界上,

$$\psi = 2e^{x+y-\sqrt{2}t} \cos(x+y-\sqrt{2}t);$$

在  $y=0.8$  的边界上,

$$\psi = -2e^{x+y-\sqrt{2}t} \cos(x+y-\sqrt{2}t);$$

在  $x=1.6$  的边界上,

$$\psi = 2e^{x+y-\sqrt{2}t} \cos(x+y-\sqrt{2}t);$$

在  $y=1.6$  的边界上,

$$\psi = 2e^{x+y-\sqrt{2}t} \cos(x+y-\sqrt{2}t);$$

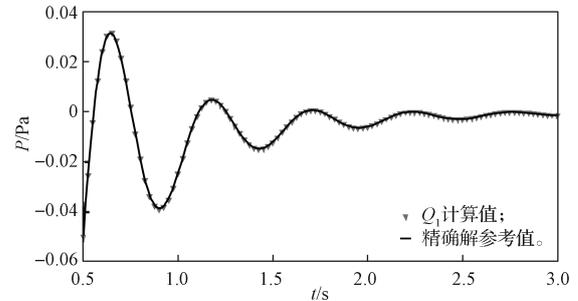
在  $x=0$  的边界上,

$$\psi = -2e^{x+y-\sqrt{2}t} \cos(x+y-\sqrt{2}t).$$

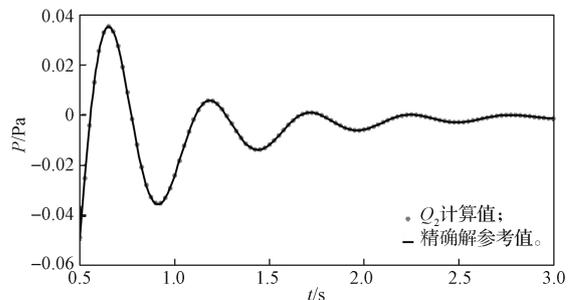
域内声压精确解为

$$\psi(x, y, t) = e^{x+y-\sqrt{2}t} \sin(x+y-\sqrt{2}t) + e^{x+y-\sqrt{2}t} \cos(x+y-\sqrt{2}t).$$

计算采用在频率区间 1~4 内等间隔取 7 个频率点, 计算时间区间为 0.5~3.0 s, 在域内选取两个观察点, 分别为  $Q_1(0.4, 1.2)$  与  $Q_2(0.5, 1.2)$ , 计算两个内部观察点声压值随时间变化的过程,  $Q_1$ 、 $Q_2$  声压值随时间变化的情况, 如图 2 所示。



a)  $Q_1$



b)  $Q_2$

图 2  $Q_1$ 、 $Q_2$  声压值随时间变化情况

Fig. 2 Variation of  $Q_1$  and  $Q_2$  sound pressure value with time change

从图 2 中可以看到, 在该方法下两个取样点上的声压计算值与精确值吻合较好。为更准确直观地展示计算结果和精确解的差异, 于表 1~2 中列出了随机选取的部分时间点上, 对于  $Q_1$  和  $Q_2$  两个内部观察点的声压以及通量计算结果与精确解数值。

从图 2 以及表 1 与表 2 中可以得出, 在该分析方法下旋转 L 形边界区域内部点的计算结果和精确解不仅在变化趋势上基本保持一致, 而且其具体计算数值与精确解下的精确值较为吻合, 误差较小, 充分说

明该方法的准确度较高。

表1 内部取样点  $Q_1$  和  $Q_2$  上声压计算值与精确值

Table 1 Calculated and exact values of sound pressure at internal sampling points  $Q_1$  and  $Q_2$

时间 /s	$Q_1$ 声压		$Q_2$ 声压	
	计算值	精确值	计算值	精确值
0.65	0.031 624	0.030 739	0.035 267	0.038 199
1.10	-0.001 735	-0.001 773	-0.001 825	-0.002 003
1.35	-0.011 019	-0.012 608	-0.009 157	-0.010 490
1.70	-0.000 067	-0.000 599	-0.000 295	-0.001 307
2.15	-0.001 203	-0.001 176	-0.001 341	-0.001 454

表2 内部取样点  $Q_1$  和  $Q_2$  上通量计算值与精确值

Table 2 Calculated and exact values of flux at internal sampling points  $Q_1$  and  $Q_2$

时间 /s	$Q_1$ 通量		$Q_2$ 通量	
	计算值	精确值	计算值	精确值
0.65	0.037 571	0.044 338	0.035 275	0.041 574
1.10	-0.000 957	-0.001 494	-0.000 850	-0.001 334
1.35	0.018 490	0.016 480	0.018 747	0.018 577
1.70	0.001 810	0.001 982	0.001 744	0.001 981
2.15	-0.001 430	-0.001 656	-0.001 342	-0.001 579

### 4.2 凸形边界区域内部声压变化

在一个凸形边界区域条件下进行内点声压变化情况的分析, 其边界节点之间间距同样设为 0.1 cm, 区域声速设为 1 个标准单位, 计算求解过程中一共采用了 80 个边界节点, 凸形边界区域的节点分布情况如图 3 所示。

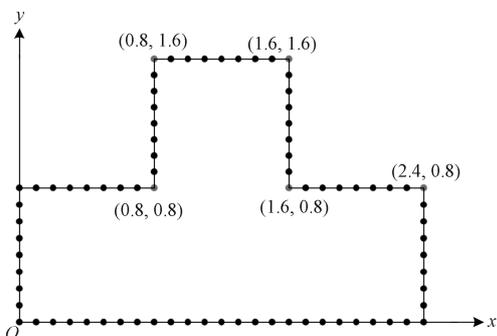


图3 凸形边界节点分布图

Fig. 3 Distribution diagram of convex boundary nodes

图3所示凸形边界上声压分布按如下公式给出:

在  $y=0$  的边界上,

$$\psi = -e^{x+y-\sqrt{2}t} \sin(x+y-\sqrt{2}t) - e^{x+y-\sqrt{2}t} \cos(x+y-\sqrt{2}t) - \sin(t) \cos(y);$$

在  $x=2.4$  的边界上,

$$\psi = e^{x+y-\sqrt{2}t} \sin(x+y-\sqrt{2}t) + e^{x+y-\sqrt{2}t} \cos(x+y-\sqrt{2}t) + \sin(t) \cos(x);$$

在  $y=0.8$  的边界上,

$$\psi = e^{x+y-\sqrt{2}t} \cos(x+y-\sqrt{2}t) + e^{x+y-\sqrt{2}t} \sin(x+y-\sqrt{2}t) + \sin(t) \cos(y);$$

在  $x=1.6$  的边界上,

$$\psi = e^{x+y-\sqrt{2}t} \cos(x+y-\sqrt{2}t) + e^{x+y-\sqrt{2}t} \sin(x+y-\sqrt{2}t) + \sin(t) \cos(x);$$

在  $y=1.6$  的边界上,

$$\psi = e^{x+y-\sqrt{2}t} \cos(x+y-\sqrt{2}t) + e^{x+y-\sqrt{2}t} \sin(x+y-\sqrt{2}t) + \sin(t) \cos(y);$$

在  $x=0.8$  的边界上,

$$\psi = -e^{x+y-\sqrt{2}t} \cos(x+y-\sqrt{2}t) - e^{x+y-\sqrt{2}t} \sin(x+y-\sqrt{2}t) - \sin(t) \cos(x);$$

在  $x=0$  的边界上,

$$\psi = -e^{x+y-\sqrt{2}t} \cos(x+y-\sqrt{2}t) - e^{x+y-\sqrt{2}t} \sin(x+y-\sqrt{2}t) - \sin(t) \cos(x)。$$

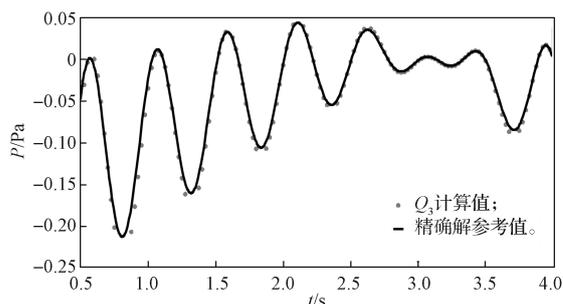
此域内声压精确解为

$$\psi(x, y, t) = e^{x+y-\sqrt{2}t} \sin(x+y-\sqrt{2}t) + \sin(t) \cdot (\sin(x) + \sin(y))。$$

计算时间区域为 0.5~4.0 s, 取两个域内点  $Q_3(1.5, 0.4)$ 、 $Q_4(1.6, 0.4)$  作为该边界条件下的观察点, 在频率区间 1~4 内等间隔取 7 个频率点计算。分析  $Q_3$  及  $Q_4$  声压值随时间变化的过程, 比较结果如图 4 所示。表 3 中列出  $Q_3$  和  $Q_4$  的部分计算结果与精确解的对比。

由图 4 和表 3 可知, 在凸形边界条件下选取的两个域内取样点上声压计算值与精确值吻合情况也是较为理想的。

比较旋转 L 形与凸形算例的结果, 发现在不同边界条件下其域内点的计算结果都能够和精确解基本保持一致, 而且在合理的采样区间内能达到较高的计算精度, 这充分说明了所提方法的可行性以及其具有较高的时域解计算准确度。



a)  $Q_3$

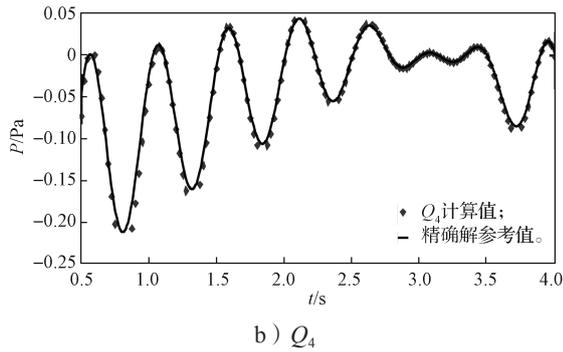


图4 内部观察点  $Q_3$ 、 $Q_4$  声压值随时间变化情况

Fig. 4 Variation of sound pressure value at internal observation point  $Q_3$  and  $Q_4$  with time change

表3 内部取样点  $Q_3$  和  $Q_4$  上声压计算值与精确值

Table 3 Calculated and exact values of sound pressure at internal sampling points  $Q_3$  and  $Q_4$

时间 $t/s$	$Q_3$ 声压		$Q_4$ 声压	
	计算值	精确值	计算值	精确值
0.95	-0.102 995	-0.104 153	-0.103 541	-0.107 951
1.15	-0.031 229	-0.030 448	-0.031 363	-0.031 583
1.40	-0.131 940	-0.132 723	-0.132 620	-0.137 582
1.70	-0.029 459	-0.029 000	-0.029 594	-0.030 083
2.25	-0.018 452	-0.018 260	-0.018 540	-0.018 943

## 5 结语

针对含有复杂频率成分声源的辐射问题,采用离散傅里叶反变换和频域边界元法相结合,研究了一种二维多频声辐射问题的频域边界元分析方法。采用傅里叶变换将时域描述的波动方程转化为 Helmholtz 方程,并选取多个等间隔频率点作为采样频率,应用边界单元法求解各特征的 Helmholtz 方程,获得不同位置在各采样频率下的声压,采用离散傅里叶反变换将频域声压幅值和相位转化成时域声压。两个数值算例分析下的域内声压计算值和精确解吻合较好,误差较小,证明该方法具有可行性,并具有较高的时域解计算准确度。

### 参考文献:

- [1] COOX L, ATAK O, VANDEPITTE D, et al. An Isogeometric Indirect Boundary Element Method for Solving Acoustic Problems in Open-Boundary Domains[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2017, 316: 186–208.
- [2] 王现辉, 乔慧, 张小明, 等. 基于等几何分析的边界元法求解 Helmholtz 问题[J]. 计算物理, 2017,

34(1): 61–66.

WANG Xianhui, QIAO Hui, ZHANG Xiaoming, et al. An Isogeometric Boundary Element Method for 3D Helmholtz Problems[J]. Chinese Journal of Computational Physics, 2017, 34(1): 61–66.

- [3] 王现辉, 郑兴帅, 乔慧, 等. 二维 Helmholtz 边界超奇异积分方程解析研究[J]. 计算物理, 2017, 34(6): 666–672.  
WANG Xianhui, ZHENG Xingshuai, QIAO Hui, et al. Analytical Study of Hypersingular Integral Equations with Constant Element for 2D Helmholtz Problems[J]. Chinese Journal of Computational Physics, 2017, 34(6): 666–672.
- [4] CHEN X Z, LIU Y H, YIN C C, et al. Three-Dimensional Inversion of Controlled-Source Audio-Frequency Magnetotelluric Data Based on Unstructured Finite-Element Method[J]. Applied Geophysics, 2020, 17(3): 349–360.
- [5] 张雪. 基于矩量法的粗糙面宽带电磁散射研究[D]. 合肥: 安徽大学, 2020.  
ZHANG Xue. Study on the Electromagnetic Scattering from the Rough Surface over a Frequency Band Based on the Method of Moments[D]. Hefei: Anhui University, 2020.
- [6] 赵文畅. 基于快速多极边界元的声学及声振拓扑优化设计[D]. 合肥: 中国科学技术大学, 2019.  
ZHAO Wenchang. Acoustics and Acoustic Vibration Topology Optimization Design Based on Fast Multipole Boundary Element[J]. Hefei: University of Science and Technology of China, 2019.
- [7] HE D H, GUO Z, MA H. Penny-Shaped Crack Simulation with a Single High Order Smooth Boundary Element[J]. Engineering Analysis with Boundary Elements, 2021, 124: 211–220.
- [8] CARRER J A M, SOLHEID B S, TREVELYAN J, et al. The Boundary Element Method Applied to the Solution of the Diffusion-Wave Problem[J]. Engineering Analysis with Boundary Elements, 2020, 117: 13–25.
- [9] GUO S P, ZHANG J M, LI G Y, et al. Three-Dimensional Transient Heat Conduction Analysis by Laplace Transformation and Multiple Reciprocity Boundary Face Method[J]. Engineering Analysis with Boundary Elements, 2013, 37(1): 15–22.
- [10] 李善德. 大规模声学问题的快速多极边界元方法研究[D]. 武汉: 华中科技大学, 2011.  
LI Shande. Research on Fast Multipole Boundary Element Method for Large-Scale Acoustic Problems[D]. Wuhan: Huazhong University of Science and Technology, 2011.
- [11] 周枫林, 王炜佳, 廖海洋, 等. 标量波传播问题的双互易精细积分法[J]. 计算物理, 2020, 37(1): 26–36.  
ZHOU Fenglin, WANG Weijia, LIAO Haiyang, et

- al. A Time Domain Dual Reciprocity Precise Integration Method for Scalar Wave Propagation Problems[J]. Chinese Journal of Computational Physics, 2020, 37(1): 26-36.
- [12] CAMPOS L S, LOEFFLER C F, NETTO F O, et al. Testing the Accomplishment of the Radial Integration Method with the Direct Interpolation Boundary Element Technique for Solving Helmholtz Problems[J]. Engineering Analysis with Boundary Elements, 2020, 110: 16-23.
- [13] 孟智娟. 三维问题的维数分裂无单元 Galerkin 方法研究 [D]. 上海: 上海大学, 2019.  
MENG Zhijuan. Researches on the Dimension Splitting Element-Free Galerkin Method for Three-Dimensional Problems[D]. Shanghai: Shanghai University, 2019.
- [14] ZHANG X Y, LIANG H Q, ZHAO M J. Fundamental Solution and Its Validation by Numerical Inverse Laplace Transformation and FEM for a Damped Timoshenko Beam Subjected to Impact and Moving Loads[J]. Journal of Vibration and Control, 2019, 25(3): 593-611.
- [15] 刘利强. 拉普拉斯反变换的一种数值算法 [J]. 内蒙古工业大学学报 (自然科学版), 2002, 21(1): 47-49.  
LIU Liqiang. An Algorithm for Numerical Inversion of Laplace Transforms[J]. Journal of Inner Mongolia Polytechnic University, 2002, 21(1): 47-49.
- [16] 王彦杰. 离散傅里叶变换在实际中的应用 [J]. 宁德师范学院学报 (自然科学版), 2019, 31(4): 337-343.  
WANG Yanjie. Application of Discrete Fourier Transform in Practice[J]. Journal of Ningde Normal University (Natural Science), 2019, 31(4): 337-343.
- [17] PANG H S, LIM J S, LEE S. Discrete Fourier Transform-Based Method for Analysis of a Vibrato Tone[J]. Journal of New Music Research, 2020, 49(4): 307-319.
- [18] JOSHI A B, KUMAR D, GAFFAR A, et al. Triple Color Image Encryption Based on 2D Multiple Parameter Fractional Discrete Fourier Transform and 3D Arnold Transform[J]. Optics and Lasers in Engineering, 2020, 133: 106139.
- [19] 王志灵, 程玉民. 拉氏反变换的数值并行算法及其在弹性动力学边界元法中的应用 [J]. 力学季刊, 2005, 26(2): 224-230.  
WANG Zhiling, CHENG Yumin. Numerical Parallel Algorithm of Laplace Inverse Transform and Its Application in Boundary Element Method for Elastodynamics[J]. Chinese Quarterly of Mechanics, 2005, 26(2): 224-230.
- [20] 滕岩梅. 拉普拉斯反变换的计算 [J]. 高等数学研究, 2016, 19(6): 20-21, 23.  
TENG Yanmei. Computation of Inverse Laplace Transform[J]. Studies in College Mathematics, 2016, 19(6): 20-21, 23.
- [21] HORVÁTH G, HORVÁTH I, ALMOUSA S A D, et al. Numerical Inverse Laplace Transformation Using Concentrated Matrix Exponential Distributions[J]. Performance Evaluation, 2020, 137: 102067.

(责任编辑: 申 剑)