

doi:10.3969/j.issn.1673-9833.2021.06.013

SIR/IR 模型的新型冠状病毒肺炎疫情研究

——基于湖北省 2020 年 1—5 月数据

邹浩越, 李世霖, 刘韩坤

(湖南工业大学 理学院, 湖南 株洲 412007)

摘要: 基于 SIR/IR 传染病模型, 根据湖北省 2020 年 1—5 月新型冠状病毒肺炎 (COVID-19) 公开数据, 对湖北疫情变化和防控开展建模实证研究。首先, 采用 SIR 模型对数据进行拟合, 得到疫情变化曲线; 然后, 通过线性最小二乘法推导出 COVID-19 的基本传染系数 R_0 , 并以此系数具体化疫情防疫程度; 最后, 通过 IR 模型分析采取不同强度的管制和防控隔离措施对疫情的影响。演化结果表明, 严格的管控会大大减少疫情的感染情况, 缩短疫情结束时间。

关键词: SIR 模型; IR 模型; 新型冠状病毒肺炎疫情; 防疫效果

中图分类号: R181; O175 **文献标志码:** A **文章编号:** 1673-9833(2021)06-0089-06

引用格式: 邹浩越, 李世霖, 刘韩坤. SIR/IR 模型的新型冠状病毒肺炎疫情研究: 基于湖北省 2020 年 1—5 月数据 [J]. 湖南工业大学学报, 2021, 35(6): 89-94.

Prediction of Novel Coronavirus Pneumonia Epidemic Based on SIR/IR Model: Based on the Epidemic Data of Hubei Province from January to May 2020

ZOU Haoyue, LI Shilin, LIU Hankun

(College of Science, Hunan University of Technology, Zhuzhou Hunan 412007, China)

Abstract: Based on the SIR/IR infectious disease model, and according to the public data of the new coronavirus pneumonia (COVID-19) in Hubei Province from January to May 2020, a modeling empirical research has been carried out on the changes and prevention and control of the epidemic situation in Hubei. First, the SIR model is used to fit the data to obtain the epidemic change curve; then, the linear least square method is used to derive the basic infection coefficient R_0 of COVID-19, and this coefficient is used to specify the degree of epidemic prevention; finally, the IR model is used to analyze and adopt the impact of different intensities of control and prevention and isolation measures on the epidemic. The evolution results show that strict control will greatly reduce the infection of the epidemic and shorten the time for the end of the epidemic.

Keywords: SIR model; IR model; COVID-19; effect of prevention and control

收稿日期: 2021-04-21

基金项目: 湖南工业大学大学生创新创业训练计划基金资助项目 (湖工大创字 [2020] 1 号 -74)

作者简介: 邹浩越 (2000-), 男, 广东深圳人, 湖南工业大学学生, 主要研究方向为数学模型,

E-mail: 970432388@qq.com

通信作者: 李世霖 (1979-), 男, 湖南醴陵人, 湖南工业大学讲师, 硕士, 主要研究方向为泛函微分方程的数值解,

E-mail: 49847417@qq.com

0 引言

2019年,一类意想不到的 COVID-19 病毒给中国乃至世界经济造成了严重损失, COVID-19 病毒具有非常强的空气传染能力,其通过与人体黏膜细胞上的血管紧张素转化酶 II (angiotensin converting enzyme-II, ACE-II) 特异性结合,从而引发呼吸系统病变^[1]。新型冠状病毒肺炎的潜伏期一般为 14 d 左右,病毒传染能力非常强,因其传染性较强而使得防疫非常困难。但是中国政府通过宏观调控,运用政策手段限制住了病毒的传播范围,使得我国的疫情形势转好。

为了探求如何有效进行防控防疫,本文拟基于 SIR/IR 模型进行分析^[2-3],通过 Matlab 对现有数据进行分析 and 评价,评估政府干预对公共安全的影响,为此后类似疫情的防疫和救治工作提供理论支持和实践参考。

1 模型的建立

1.1 模型前提

SIR 模型,是由 W. O. Kermack 等^[4]于 1927 年建立的,用于研究传染病动力学传播的经典仓室模型。仓室模型的基本思想,是将自然状态下的人群分为若干仓室,再对仓室建立模型和进行分析。仓室模型中最具代表性的模型是 SIR 模型。

大多数感染性疾病都是免疫的——即患者治愈后,在被感染的系统中立即被移除,称为移除者。而患者在治愈后具有非常强的免疫力(默认不会再次患病),可以认为康复后的患者既非健康者也非不患病者,退出了传染病体系。

SIR 模型是常见的一种描述传染病传播的数学模型,其基本假设是将人群(总人数 N 不变)分为以下 3 类^[5]:

1) 易感者(susceptible)。文中以 S 表示,指未感染,因自身免疫力低下或者缺乏免疫力,而与患病的人接触后易受感染的人。 S 占 N 的比例,即 S/N 以 $S(t)$ 表示。

2) 感染者(infectious)。文中以 I 表示,指已经感染上传染病的人,他们可以通过接触传染等传播方式将病毒传染给易感人群。 I 占 N 的比例,即 I/N 以 $I(t)$ 表示。

3) 移除人群(recovered)。文中以 R 表示,指从系统中移除的人,包括在疾病中康复或死亡的人。这些人不再参与模型的后续过程。 R/N 占 N 的比例,即 R/N 以 $R(t)$ 表示。

1.2 模型特征

本研究基于仓室 SIR 模型模拟 COVID-19 的传播情况。以 β 表示日接触率(平均每日每名感染者感染易感染者数量),用以反映疾病传播的强度;以 γ 表示日恢复率(平均每日移除感染体系的感染者数量),取决于系统感染发展时间的平均值。模型建立在以下假设基础之上。

1) 不考虑所取得样本区域的人数总量改变,假设本区域人口总数为常数且为定值。故本模型设定研究期间湖北省的人口数总量为定值。

2) 此种病必须为传染病,且假设病人一旦与易感者接触后就必然发展成为具有一定的传染力的感染者,系统初始时的样本空间人群都没有这种疾病的抗体。假设单位时间 t 内,一个病人能传染的易感者数目与系统环境内的易感者总数 $S(t)$ 成正比,且比例系数为 β 。故在单位时间 t 内被所有病人传染的总人数为 $\beta \cdot S(t) \cdot I(t)$ ^[6]。

3) 疾病可以被治愈或导致死亡,从而产生 $R(t)$ 人群。在 t 时刻,单位时间内从染病者中移除的人数与病人数量成正比,比例系数为 γ 。故单位时间内移除者的数量为 $\gamma \cdot I(t)$ 。

SIR 模型中 3 种人群之间存在如图 1 所示的转换关系。

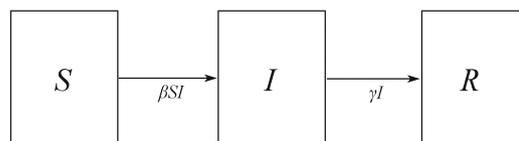


图 1 SIR 状态迁移图

Fig. 1 SIR state transition diagram

为了简化,用 3 组人群的第一个字母 S 、 I 、 R 分别表示 3 组人群的总人数。 N 表示人口总数^[7],系统中的 3 类人群可用以下形式的常微分方程组体现出数量随时间的动态发展变化规则:

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = -\beta I(t)S(t), \\ \frac{dI(t)}{dt} = \beta I(t)S(t) - \gamma I(t), \\ \frac{dR(t)}{dt} = \gamma I(t). \end{cases} \quad (1)$$

2 实验结果分析和图像处理

2.1 数据处理

由于自 2020 年 1 月 23 日 10 时起湖北省关闭了省内的大部分出城通道,因此可将此阶段的湖北省视为一个暂时封闭的整体。此外,由于湖北省的疫情数

据在 5 月 1 日之后没有大的变化, 因此课题组选择将 1 月 22 日—4 月 30 日 (1 月 22 日就有检疫数据) 的数据作为所要处理的数据, 部分具体数据见表 1, 数据来源于腾讯新闻新型冠状病毒肺炎实时更新^[8]。

表 1 新型冠状病毒肺炎 1 月 22 日—4 月 30 日部份疫情数据

Table 1 Some COVID-19 epidemic data from January 22 to April 30

日期	新增	累计确诊	累计死亡	累计治愈
1 月 22 日	69	444	17	28
1 月 23 日	105	549	24	31
1 月 24 日	180	729	39	32
1 月 25 日	323	1 053	52	42
1 月 26 日	371	1 423	76	44
1 月 27 日	1 291	2 714	100	47
1 月 28 日	840	3 554	125	80
1 月 29 日	1 032	4 586	162	90
1 月 30 日	1 220	5 806	204	116
1 月 31 日	1 347	7 153	249	166
2 月 1 日	1 921	9 074	294	215
2 月 2 日	2 103	11 177	350	395
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
2 月 12 日	14 840	48 206	1 310	3 441
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
2 月 18 日	1 693	61 682	1 921	9 128
2 月 19 日	349	62 031	2 029	10 337
2 月 20 日	631	62 662	2 144	11 788
2 月 21 日	366	63 454	2 250	13 557
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
3 月 8 日	36	67 743	3 007	46 433
3 月 9 日	17	67 760	3 024	47 585
3 月 10 日	13	67 773	3 046	49 056
3 月 11 日	8	67 781	3 056	50 298
3 月 12 日	5	67 786	3 062	51 553
3 月 13 日	4	67 790	3 075	52 943
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
3 月 15 日	4	67 798	3 099	55 094
3 月 16 日	1	67 799	3 111	55 987
3 月 17 日	1	67 800	3 122	56 883
3 月 18 日	0	67 800	3 130	57 678
3 月 19 日	0	67 800	3 132	58 381
3 月 20 日	0	67 800	3 139	58 942
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
4 月 29 日	0	68 128	4 512	63 616
4 月 30 日	0	68 128	4 512	63 616
4 月 30 日	0	68 128	4 512	63 616

2.2 湖北境内患病人数分析

图 2 和图 3 分别为运用 Matlab 对表 1 中数据拟合湖北省境内患病累计确诊、治愈或死亡人数, 以及每日新增人数的情况, 起计日期为 1 月 22 日。

结合图 3 和表 1 中数据可以得知, 在 1 月 27 日之前, 每日新增确诊人数都是以十位或百位数量增

加, 然而自 1 月 29 日至 2 月 18 日, 每日新增确诊人数的量级从百位迅速提升到了千位。其中, 最为突出的是 2 月 12 日, 当天新增确诊人数高达 14 840, 查阅央视新闻报道以及湖北省卫健委发布的公告可知, 2 月 12 日, 湖北省 COVID-19 疫情防控局除了之前的试剂检查以外, 还增加了“临床诊断”, 于是出现了一轮新增病例数量的增加。自 2 月 19 日到 3 月 10 日, 每日新增病例的数量从千位量级回到了百位、十位, 且新增病例的数量逐步下降。从 3 月 11 日—3 月 17 日, 每日新增病例数基本稳定在个位数。3 月 18 日—4 月 30 日基本没有新增新型冠状病毒肺炎病例, 表明疫情已经基本得到了有效控制。

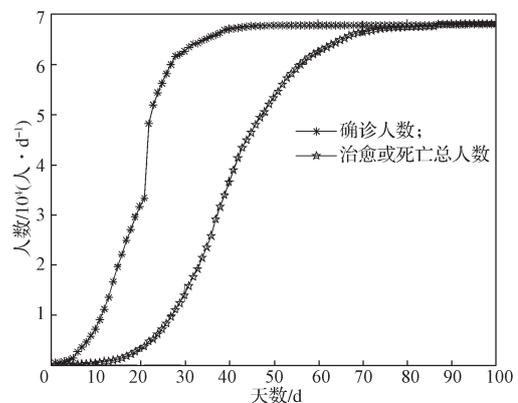


图 2 累计确诊、治愈或死亡人数拟合曲线

Fig. 2 Cumulative number of diagnoses, cures and deaths

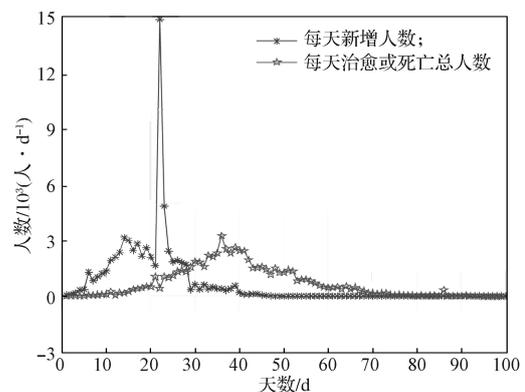


图 3 每日新增疫情情况拟合曲线

Fig. 3 Daily new epidemic tendency

2.3 传染病辨识结果分析

在经典模型当中, 利用 Matlab 使用线性最小二乘法对待定参数进行估计, 由图 2 可以得出, 一般情况下, 正常病毒性肺炎的恢复周期为 14 d 左右, 故将此次病毒性肺炎恢复周期估计为 14 d, 而由移除率的定义可以得出恢复系数 $\gamma \approx 1/14$, 通过 Matlab 进行拟合可得传染率 $\beta=0.291\ 32$ 。同时可以采用如下公式估算出新型冠状病毒肺炎的基本传染数。

$$R_0 = \frac{\beta}{\gamma} = 4.07848。$$

R_0 为基本传染数, 是指在没有外力介入, 所有人都没有免疫力的情况下, 一个感染某种传染病的人会传染给其他多少个人的平均数^[9]。通过计算得出 COVID-19 的初始基本传染系数为 4.07848。

基本传染数的一个重要指标是衡量疾病传染性。 R_0 的一个重要临界点是 $R_0=1$, R_0 的数字越大, 代表流行病越难以控制。若 $R_0<1$ 则传染病将会随着时间的推移而逐渐消失; 若 $R_0>1$ 则传染病会以指数形式传播, 最终演变成流行病。非典(严重性呼吸综合症, SARS-Cov) 的基本传染系数约为 0.8~3.0, 埃博拉病毒的基本传染系数约为 1.5~2.5。由此可看出新型冠状病毒的感染力较强^[10]。

3 模型的分析及讨论

3.1 用 SIR 模型拟合湖北省患病人数

通过式(1)进行模型拟合, 即可得出由 SIR 模型预测的武汉市患病人数, 如图 4 所示, 其中监测天数起计日期为 1 月 22 日。

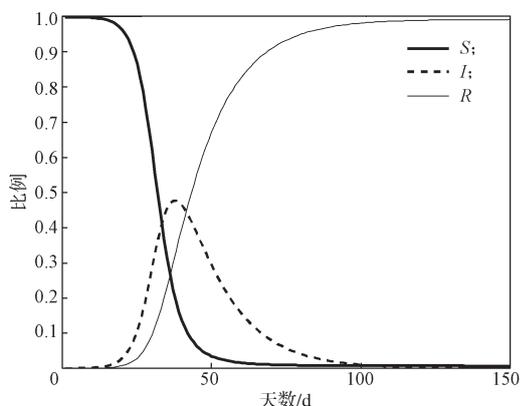


图 4 监测期内 SIR 模型的数值变化曲线

Fig. 4 SIR model numerical change curves

由图 4 可知, 随着时间增长, 易感人数比 $S(t)$ 从 1 逐渐降低至 0; 感染人数比 $I(t)$ 则是先增长, S 达到峰值后逐步下降至 0; 而移除人数比 $R(t)$ 是从 0 缓慢增长至 1。但 SIR 模型的感染来源为感染人群 (I) 感染易感人群 (S), 而实际情况下新冠病毒的感染人群增加的主要原因为隔离人群在隔离期确诊, 并且我们国家新冠防控的 R_0 是变化的, 随着时间推移逐渐缩小(防疫越来越严格), 而 SIR 模型的 R_0 是一个定值, 因此 SIR 模型与实际情况间会出现一定的误差。

由于 SIR 模型不能很好地体现出由基本传染系数的变化而使模型对未来预测发生改变, 所以课题组选择舍去易感者 $S(t)$ 再进行模型拟合, 即可得出 IR

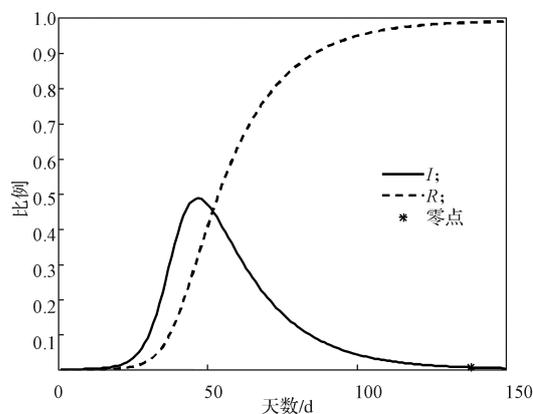
模型, 该模型的常微分方程如下:

$$\begin{cases} \frac{dI(t)}{dt} = \beta I(t) - \gamma I(t), \\ \frac{dR(t)}{dt} = \gamma I(t). \end{cases} \quad (2)$$

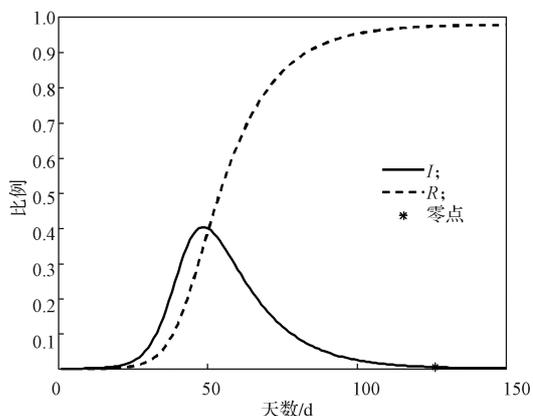
3.2 用 IR 模型拟合湖北省患病人数

基本传染系数 R_0 , 为每个患病人员每天会接触并感染的正常人个数, 即为病毒的基本传染系数, R_0 可以从侧面显示防疫管控程度的好坏, 即 R_0 越大, 表明隔离和管控措施越差; R_0 越小, 则表明对疫情防控起到了出色的效果。通过 R_0 变量能清楚地认识到疫情隔离防控的好坏对疫情未来发展趋势的影响, 不同 R_0 下 IR 模型拟合结果如图 5 所示, 其中监测天数起始日期为 1 月 22 日。

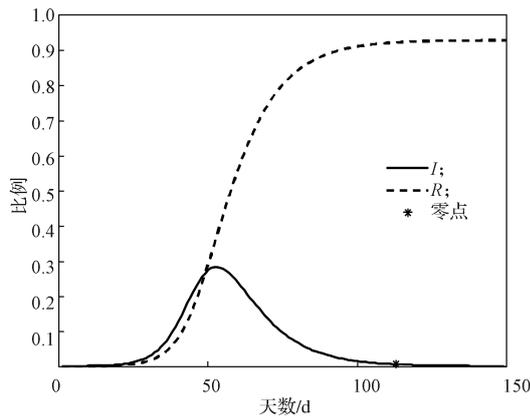
由图 5 可以看出, 随着 R_0 数值的减少, 患病人数比 $I(t)$ 达到的最大值减小, 当 $R_0=2.29$ 时患病人数比 $I(t)$ 甚至不超过 25%, 随着疫情管控增强 (R_0 减少), 感染人群从骤增到达高点至最后减少到 0 所用的时间在减少, 说明采取严厉的管制和防控隔离措施对控制新型冠状病毒肺炎患病人数的增加和缩短疫情结束时间有着显著的效果^[11]。



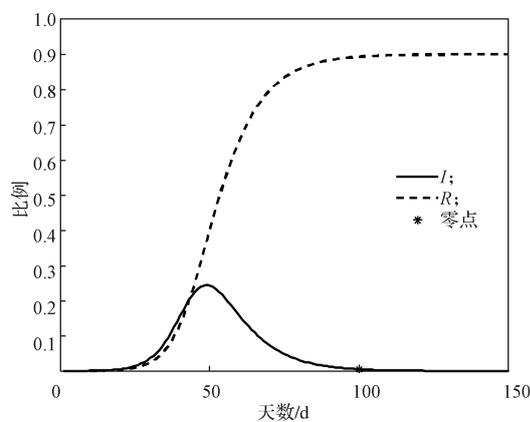
a) $R_0=5.14$ (不采取任何管制和防控措施的条件)



b) $R_0=4.00$ (当前情况)



c) $R_0=2.86$ (比当前情况严厉的隔离和管制措施)



d) $R_0=2.29$ (已采用了比较严厉的隔离和管制措施)

图 5 不同 R_0 下湖北省患病人数比例随监测天数变化的 IR 曲线

Fig. 5 IR curves of the proportion of patients in Hubei Province with different R_0 with the number of days

图 6 为除中国以外的部分国家感染人数变化趋势图, 时间为 2020 年 3 月至 12 月。

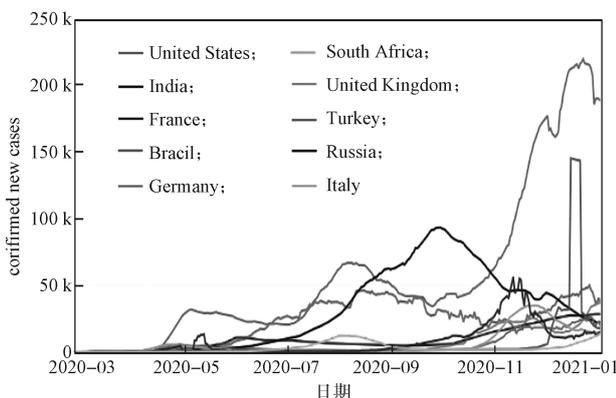


图 6 美国等国家的新型冠状病毒肺炎感染人数趋势图

Fig. 6 Trends in the number of COVID-19 in the United States and other countries

由图 6 可以看出, 美国的新型冠状病毒肺炎变化趋势十分严峻, 归根根本是因为在疫情初期没有尽可能的在政策上加强管制和防控隔离, 同时民众大多不

能正确地认识到疫情的严重性, 将其戏称为“大号流感”, 这造成了病毒在人群中大肆传播, 给本国经济、群众就业造成了巨大压力。同时, 中国与美国两种截然不同的疫情发展趋势, 从侧面体现出在疫情初期做好隔离管控的重要性。

4 结语

SIR 模型是一种非常有效的传染病分析模型。为了简化传染病的传染规律, 得到更为精确的解, 课题组将人口结构划分为易感人群 (S)、感染人群 (I) 和移除人群 (R) 3 类, 从而得到更适合实际情况的传染病传播规律。本文利用该模型的优势拟合新型冠状病毒肺炎疫情在湖北省的发展规律。从拟合曲线可以看出, 如果不加干预, 该次疫情将造成较大伤亡。而实际情况与拟合情况间较大差异的原因在于, 我国政府在疫情发生后, 采取了严格的疫情管控措施, 致使疫情能够在短时间内得到有效控制。

虽然 SIR 模型能非常直观地展示传染病的过程, 但是应注意到, 该模型对人群的分类不够细致, 未能清晰考虑出隔离这一重要因素。而实际情况下对疑似病人采取隔离措施是阻止疫情传播最有效的方法, 同时模型没有引入反应机制, 在对模型进行拟合的情况下, 单就依据已有数据猜测未来较长一段时间的数据, 必定会使得准确度下降, 同时 SIR 模型没有考虑到移除人群再次感染的情况。此外, 微分方程组求解较为困难, 且模型对初值比较敏感, 这对模型的稳定性有极大影响^[12]。

由于模型仍然是一个粗略的模型, 主要是未能考虑到 COVID-19 病毒存在潜伏期这种情况。一般情况下, 3~7 d 为 COVID-19 病毒的平均潜伏期, 最长的甚至达到 24 d。而假若忽略了潜伏期, 那么会造成模型拟合与事实情况出现一定的偏差。SEIR 模型则囊括了这一点, 将潜伏者 (exposed 指有接触过感染者但未发病, 可能与存在潜伏期的传染病) 变量引入模型当中, 此时模型的拟合将更为精确。课题组将在后续研究中使用 SEIR 模型进行研究, 以得到更为拟合的模型。

参考文献:

[1] HUANG C L, WANG Y M, LI X W, et al. Clinical Features of Patients Infected with 2019 COVID-19 in Wuhan, China[J]. The Lancet, 2020, 395: 497-506.

[2] 罗荣桂, 江涛. 基于 SIR 传染病模型的技术扩散模

- 型的研究[J]. 管理工程学报, 2006, 20(1): 32-35.
- LUO Ronggui, JIANG Tao. The Research of Technology Diffusion Model Based on the SIR Epidemic Model[J]. Journal of Industrial Engineering and Engineering Management, 2006, 20(1): 32-35.
- [3] 李煜辉, 郭艺, 陆雨嘉. SIR模型在区域范围传染病疫情预测中的应用[J]. 大科技, 2015(20): 331.
- LI Yuhui, GUO Yi, LU Yujia. The Application of SIR Model in the Prediction of Epidemic Situation of Infectious Diseases in a Regional Area[J]. Super Science, 2015(20): 331.
- [4] KERMACK W O, MCKENDRICK A G. Contributions to the Mathematical Theory of Epidemics: -I[J]. Bulletin of Mathematical Biology, 1991, 53(1): 33-55.
- [5] 张本红. SIR传染病模型参数估计及其应用[D]. 济南: 山东大学, 2018.
- ZHANG Benhong. Parameter Estimation of SIR Epidemic Model and Its Application[D]. Jinan: Shandong University, 2018.
- [6] 王素霞, 吴正飞, 徐英. 一类免疫传染病模型的建模及分析[J]. 泰山学院学报, 2013, 35(3): 41-45.
- WANG Suxia, WU Zhengfei, XU Ying. Modeling and Analysis of a Class of Immune Epidemic Models[J]. Journal of Taishan University, 2013, 35(3): 41-45.
- [7] 张应. 基于SIR模型对COVID-19的研究[D]. 济南: 山东大学, 2020.
- ZHANG Ying. Research on COVID-19 Based on SIR Model[D]. Jinan: Shandong University, 2020.
- [8] 腾讯新闻. 新型冠状病毒肺炎实时更新[EB/OL]. [2021-02-12]. <https://news.qq.com/zt2020/page/feiyan.htm?from=timeline&isappinstalled=0#/global>.
- Tencent News. Update on New Coronavirus Pneumonia in Real Time[A/OL]. [2021-02-12]. <https://news.qq.com/zt2020/page/feiyan.htm?from=timeline&isappinstalled=0#/global>.
- [9] 程翠云, 董战峰, 李雅婷, 等. 新型冠状病毒肺炎疫情下的环境经济形势分析与对策研究[J]. 环境污染与防治, 2020, 42(5): 624-627, 633.
- CHENG Cuiyun, DONG Zanfeng, LI Yating, et al. Environmental and Economic Situation Analysis and Countermeasure Research During Novel Coronavirus Pneumonia Epidemic[J]. Environmental Pollution & Control, 2020, 42(5): 624-627, 633.
- [10] 韩晓娜. SARS流行病学传播动力模型研究[D]. 北京: 中国人民解放军军事医学科学院解放军军事医学科学院, 2006.
- HAN Xiaona. Research on SARS Epidemiological Transmission Dynamics Model[D]. Beijing: Chinese Academy of Military Medical Sciences, Chinese Academy of Military Medical Sciences, 2006.
- [11] 薛润生. SIR模型及其在新型冠状病毒肺炎疫情中的应用[D]. 济南: 山东大学, 2020.
- XUE Runsheng. Application of SIR Model in Covid-19[D]. Jinan: Shandong University, 2020.
- [12] 冯金明, 李遵先. 一类具扩散的传染病模型的稳定性分析[J]. 广西师范大学学报(自然科学版), 2018, 36(2): 63-68.
- FENG Jinming, LI Zunxian. Stability Analysis of a Class of Epidemic Model with Diffusion[J]. Journal of Guangxi Normal University (Natural Science Edition), 2018, 36(2): 63-68.

(责任编辑: 申剑)