

doi:10.3969/j.issn.1673-9833.2021.06.012

# 具有外部干扰的离散时间多智能体系统包含控制

刘东南<sup>1</sup>, 李博凡<sup>1</sup>, 李玲<sup>2</sup>

(1. 湖南工业大学 理学院, 湖南 株洲 412007;  
2. 湖南铁路科技职业技术学院 铁道供电与电气学院, 湖南 株洲 412006)

**摘要:** 对具有外部干扰的高阶线性离散时间多智能体系统的包含控制进行了研究, 设计了一种离散时间干扰观测器, 利用该观测器提出了基于状态反馈的包含控制协议。运用李雅普诺夫稳定性理论, 对该系统进行了收敛性分析, 得到了包含达到的条件。最后, 利用数值模拟验证了所得理论结果的正确性。

**关键词:** 离散时间多智能体系统; 包含控制; 外部干扰; 干扰观测器

**中图分类号:** O231

**文献标志码:** A

**文章编号:** 1673-9833(2021)06-0084-05

**引文格式:** 刘东南, 李博凡, 李玲. 具有外部干扰的离散时间多智能体系统包含控制 [J]. 湖南工业大学学报, 2021, 35(6): 84-88.

## Containment Control of Discrete Time Multi-Agent Systems Under External Disturbances

LIU Dongnan<sup>1</sup>, LI Bofan<sup>1</sup>, LI Ling<sup>2</sup>

(1. College of Science, Hunan University of Technology, Zhuzhou Hunan 412007, China; 2. School of Railway Power Supply and Electric Engineering, Hunan Vocational College of Railway Technology, Zhuzhou Hunan 412006, China)

**Abstract:** A research has been carried out on the containment control of high-order linear discrete-time multi-agent systems under external disturbances, followed by the design of a discrete-time disturbance observer. By using the observer, an containment control protocol based on state feedback has thus been proposed. With Lyapunov stability theory applied, an analysis has been made of the convergence of the system, thus obtaining the conditions for containment. Finally, the validity of the theoretical results is verified by a numerical simulation.

**Keywords:** discrete time multi-agent system; containment control; external disturbances; disturbance observer

### 1 研究背景

近年来, 高阶离散时间多智能体系统 (multi-agent systems, MAS) 的分布式协同控制引起了学者的广泛关注。一致性是分布式协同控制问题中的一个基

础问题, 即使智能体间达成一种共同状态。学者们在同步、群集、编队等方面, 关于一致性的研究成果<sup>[1-6]</sup>较多。

根据领导者的数量, 一致性可以分为无领导者一致性、跟随领导者一致性和包含控制。所谓包含控

收稿日期: 2021-04-03

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (6207132); 湖南省教育厅科研基金资助项目 (18C0543)

作者简介: 刘东南 (1983-), 男, 湖南邵阳人, 湖南工业大学讲师, 硕士, 主要研究方向为系统的稳定性与控制,  
E-mail: ladn55555@163.com

通信作者: 李玲 (1983-), 女, 河北石家庄人, 湖南铁路科技职业技术学院讲师, 硕士, 主要研究方向为智能控制,  
E-mail: 279935312@qq.com

制是指网络中所有跟随者渐近进入到网络中的多个领导者所形成的凸包之中。由于包含控制在许多领域都具有良好的应用前景, 受到了许多学者们的关注。Cao Y. C. 等<sup>[7]</sup>研究了在不同拓扑下具有多个静态或动态领导者的 MAS 的分布式包含控制。Liu H. Y. 等<sup>[8]</sup>通过连续控制和采样控制, 分别研究了 MAS 的包含控制, 并得到了包含达到的充要条件。Li Z. K. 等<sup>[9]</sup>在有向拓扑的条件下, 研究了一般线性 MAS 的干扰抑制问题, 提出了状态反馈协议和基于观测器的协议。M. Asgari 等<sup>[10]</sup>考虑了在有向拓扑下具有固定时间延迟的异构 MAS 的包含性。Liu H. Y. 等<sup>[11]</sup>研究了基于采样数据的分数阶 MAS 包含控制。Wang Y. W. 等<sup>[12]</sup>通过脉冲控制, 研究了异源多智能体系统的输出编队包含性问题。

此外, 在近年内, 关于离散时间 MAS 的包含控制问题, 学者们也进行了大量研究, 取得了较多的成果。Ma Q. 等<sup>[13]</sup>研究了离散时间 MAS 的包含控制问题, 并在所提出的协议下得到了低保守的充要条件。Wang D. 等<sup>[14]</sup>利用  $z$  变换研究了具有时滞的离散时间 MAS 的包含性。Zhao Z. Y. 等<sup>[15]</sup>研究了具有执行器位置和速率饱和的离散时间 MAS 的半全局包含控制。

干扰常常存在于各类系统中, 是系统不稳定的重要因素。因此, 研究具有干扰的多智能体系统协调控制具有重要意义, 对具有外部干扰的多智能体系统的研究尤为重要。Guo L. 等<sup>[16]</sup>提出了基于干扰观测器 (disturbance observer, DO) 的控制方法, 以稳定具有外部干扰的非线性系统。Yang H. Y. 等<sup>[17]</sup>提出了求解具有外部干扰的二阶 MAS 的一致性的方法。Xu C. J. 等<sup>[18]</sup>利用 DO 技术研究了具有外部干扰的连续时间 MAS 的包含控制问题。

目前, 已有的包含控制研究主要是针对连续时间多智能体系统的。在上述文献的启发下, 本文研究具有外部干扰的离散时间线性 MAS 的包含控制。

## 2 模型介绍和预备知识

设图  $G=(V, E, A)$  表示一个网络拓扑, 它包括一组节点  $V=\{1, 2, \dots, N+M\}$ , 一组边  $E \subseteq V \times V$ , 以及相邻矩阵  $A=[a_{ij}]$ 。对于有向图,  $a_{ij}>0 \Leftrightarrow (j, i) \in E$ , 即  $j$  向  $i$  发送信息; 对于无向图,  $a_{ij}>0$ , 即  $j$  不仅向  $i$  发送信息, 而且还接收来自  $i$  的信息。  $N_i=\{j|(j, i) \in E\}$  是第  $i$  个节点的邻居集。

$L=D-A=[l_{ij}]$  是拉普拉斯矩阵, 式中  $D=\text{diag}\left(\sum_{j=1, j \neq i}^{N+M} a_{ij}\right)$ , 所以  $l_{ii}=\sum_{j=1, j \neq i}^{N+M} a_{ij}$ ,  $l_{ij}=-a_{ij}$  ( $i \neq j$ )。

设  $\Sigma_1=\{1, 2, \dots, N\}$  和  $\Sigma_2=\{N+1, N+2, \dots, N+M\}$  分别为追随者和领导者集合, 即追随者和领导者的编号分别记为  $1, 2, \dots, N$  和  $N+1, N+2, \dots, N+M$ 。追随者之间的网络拓扑是无向的, 领导者和每个追随者之间的拓扑是有向的。因此,  $L$  可以重写为

$$L=\begin{bmatrix} L_1 & L_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

式中:  $L_1$  为跟随者所对应的 Laplacian 矩阵子块;

$L_2$  为跟随者与领导者间邻接关系所对应的 Laplacian 矩阵子块。

第  $i$  个跟随者的动力学方程描述为

$$\dot{x}_i(k+1)=Ax_i(k)+B(u_i(k)+d_i(k)); \quad (1)$$

第  $i$  个领导者的动力学方程描述为

$$\dot{x}_i(k+1)=Ax_i(k). \quad (2)$$

式 (1)~(2) 中:  $x_i$ 、 $u_i$ 、 $d_i$  分别为第  $i$  个智能体的状态、控制输入、外部干扰, 且  $x_i \in \mathbf{R}^n$ 、 $u_i \in \mathbf{R}^m$ 、 $d_i \in \mathbf{R}^m$ ;

$A$ 、 $B$  都为常数矩阵, 且  $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 、 $B \in \mathbf{R}^{n \times m}$ 。

设干扰  $\omega_i(t)$  ( $i=1, 2, \dots, N$ ) 由外部系统 (3) 所生成,

$$\begin{cases} \dot{\omega}_i(k+1)=S\omega_i(k), \\ \dot{d}_i(k)=F\omega_i(k), \end{cases} \quad (3)$$

式中:  $\omega_i$  为外部系统的状态, 且  $\omega_i \in \mathbf{R}^l$ ;

$S$ 、 $F$  都为干扰系统的矩阵, 且  $S \in \mathbf{R}^{l \times l}$ ,  $F \in \mathbf{R}^{m \times l}$ 。

定义 1<sup>[18]</sup> 设  $C$  是  $\mathbf{R}^n$  的子集, 如果  $C$  中的任何  $x$  和  $y$  以及任何  $\alpha \in [0, 1]$ , 满足  $(1-\alpha)x+\alpha y \in C$ , 则集合  $C$  称为凸集。一个点集  $X=\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  的凸包是指包含  $X$  中所有点的最小凸集,  $X$  的凸包记为  $\text{Co}(X)$ 。

假设 1 假设追随者之间的连边是无向的, 对于每个跟随者, 至少有一个领导者有指向该跟随者的定向路径。

假设 2 假设矩阵对  $(A, B)$  是稳定的。

引理 1<sup>[18]</sup> 若假设 2 成立, 则存在唯一的正定矩阵  $P$ , 满足改进的代数里卡提 (Ricatti) 方程

$$A^T P A - P - A^T P B (B^T P B + I)^{-1} B^T P A + I = 0. \quad (4)$$

引理 2<sup>[14]</sup> 若假设 1 成立, 则  $L_1$  是正定的, 矩阵  $-L_1^{-1}L_2$  中的每一项都是非负的, 且矩阵  $-L_1^{-1}L_2$  每一行的和都为 1。

## 3 基于干扰观测器的状态反馈包含控制

本章先提出基于干扰观测器 (DO) 的分布式状态反馈包含控制协议, 然后给出包含达到的条件。

依赖于状态的离散时间干扰观测器为

$$\begin{cases} \mathbf{v}_i(k+1) = (\mathbf{S} + \mathbf{HBF})(\mathbf{v}_i(k) - \mathbf{H}\mathbf{x}_i(k)) + \mathbf{H}(\mathbf{A}\mathbf{x}_i(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}_i(k)), \\ \hat{\boldsymbol{\omega}}_i(k) = \mathbf{v}_i(k) - \mathbf{H}\mathbf{x}_i(k), \\ \hat{\mathbf{d}}_i(k) = \mathbf{F}\hat{\boldsymbol{\omega}}_i(k), \end{cases} \quad (5)$$

式中:  $\mathbf{v}_i$  为观测器的内部状态变量,  $\mathbf{v}_i \in \mathbf{R}^l$ ;

$\hat{\boldsymbol{\omega}}_i$ 、 $\hat{\mathbf{d}}_i$  分别为  $\boldsymbol{\omega}_i$  和  $\mathbf{d}_i$  的估计值矩阵;

$\mathbf{H}$  为观测器的增益矩阵,  $\mathbf{H} \in \mathbf{R}^{l \times n}$ 。

注1 由于网络中的智能体无法获得干扰的信息, 智能体必须估计外部干扰的值。

由式(5)构造离散干扰观测器来估计干扰。

根据式(1)和式(5), 有

$$\hat{\boldsymbol{\omega}}_i(k+1) = (\mathbf{S} + \mathbf{HBF})\hat{\boldsymbol{\omega}}_i(k) - \mathbf{HBF}\hat{\boldsymbol{\omega}}_i(k). \quad (6)$$

定义  $\boldsymbol{\delta}_i = \boldsymbol{\omega}_i - \hat{\boldsymbol{\omega}}_i$ , 由式(3)和式(5), 得

$$\boldsymbol{\delta}_i(k+1) = (\mathbf{S} + \mathbf{HBF})\boldsymbol{\delta}_i(k). \quad (7)$$

基于分布式 DO 的状态反馈包含控制协议构造如下:

$$\mathbf{u}_i(k) = \mathbf{K} \left( \sum_{j \in N_i} (a_{ij}(\mathbf{x}_i(k) - \mathbf{x}_j(k))) - \hat{\mathbf{d}}_i(k) \right), \quad (8)$$

式中  $\mathbf{K}$  是要设计的增益。

注2 包含协议由两部分构成, 即包含协议依赖于  $\boldsymbol{\omega}_i$  的估计值和局部相关信息  $\sum_{j \in N_i} a_{ij}(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)$ 。

令

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_F &= (\mathbf{x}_1^T, \mathbf{x}_2^T, \dots, \mathbf{x}_N^T)^T, \\ \mathbf{x}_L &= (\mathbf{x}_{N+1}^T, \mathbf{x}_{N+2}^T, \dots, \mathbf{x}_{N+M}^T)^T, \\ \boldsymbol{\delta} &= (\boldsymbol{\delta}_1^T, \boldsymbol{\delta}_2^T, \dots, \boldsymbol{\delta}_N^T)^T, \end{aligned}$$

则

$$\begin{cases} \mathbf{x}_i(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}_i(k) + \mathbf{BK} \sum_{j \in N_i} (a_{ij}(\mathbf{x}_i(k) - \mathbf{x}_j(k))) + \mathbf{BF}\boldsymbol{\delta}_i(k), & i \in \Sigma_1; \\ \mathbf{x}_i(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}_i(k), & i \in \Sigma_2; \\ \boldsymbol{\delta}_i(k+1) = (\mathbf{S} + \mathbf{HBF})\boldsymbol{\delta}_i(k), & i \in \Sigma_1. \end{cases} \quad (9)$$

定理1 若假设1和假设2成立, 在基于离散时间 DO 状态反馈包含协议(8)下,

$$\mathbf{K} = -\frac{1}{\lambda_1}(\mathbf{B}^T \mathbf{PB} + \mathbf{I})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{PA},$$

$\mathbf{P} > 0$  是代数里卡提方程(4)的唯一解,  $\lambda_1$  是  $\mathbf{L}_1$  的最小特征值;  $\mathbf{S} + \mathbf{HBF}$  是舒尔(Schur)稳定的。则系统(1)可以实现包含控制, 而且

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}_j + (\mathbf{L}_1^{-1} \mathbf{L}_2 \otimes \mathbf{I}_n) \mathbf{x}_i\| = 0.$$

证明 令

$$\mathbf{e}_i = \sum_{j \in N_i} a_{ij}(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j), \quad i \in \Sigma_1; \quad \mathbf{e} = (\mathbf{e}_1^T, \mathbf{e}_2^T, \dots, \mathbf{e}_N^T)^T,$$

根据  $\mathbf{L}$  的定义, 有

$$\mathbf{e}(k) = (\mathbf{L}_1 \otimes \mathbf{I}_n) \mathbf{x}_F(k) + (\mathbf{L}_2 \otimes \mathbf{I}_n) \mathbf{x}_L(k). \quad (10)$$

根据式(9)和式(10), 有

$$\begin{cases} \mathbf{e}(k+1) = ((\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{A}) + (\mathbf{L}_1 \otimes \mathbf{BK}))\mathbf{e}(k) + (\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{BF})\boldsymbol{\delta}(k), \\ \boldsymbol{\delta}(k+1) = (\mathbf{I}_N \otimes (\mathbf{S} + \mathbf{HBF}))\boldsymbol{\delta}(k). \end{cases} \quad (11)$$

因此, 误差系统可以改写为

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}(k+1) \\ \boldsymbol{\delta}(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_N \otimes \mathbf{A} + \mathbf{L}_1 \otimes \mathbf{BK} & \mathbf{I}_N \otimes \mathbf{BF} \\ 0 & \mathbf{I}_N \otimes (\mathbf{S} + \mathbf{HBF}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}(k) \\ \boldsymbol{\delta}(k) \end{pmatrix}. \quad (12)$$

系统(12)是 Schur 稳定的, 当且仅当  $\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{A} + \mathbf{L}_1 \otimes \mathbf{BK}$  和  $\mathbf{I}_N \otimes (\mathbf{S} + \mathbf{HBF})$  都是 Schur 稳定的。 $\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{A} + \mathbf{L}_1 \otimes \mathbf{BK}$  是 Schur 稳定的, 当且仅当  $\mathbf{A} + \lambda_i \mathbf{BK}$  是 Schur 稳定的, 其中  $\lambda_i (i=1, 2, \dots, N)$  是  $\mathbf{L}_1$  的特征值, 且  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ 。

根据引理2, 若假设1成立, 则  $\mathbf{L}_1$  是正定且非奇异的, 从而得  $\lambda_i > 0 (i=1, 2, \dots, N)$ 。

对于离散时间系统  $\mathbf{x}(k+1) = (\mathbf{A} + \lambda_1 \mathbf{BK})\mathbf{x}(k)$ ,

$\mathbf{K} = -\frac{1}{\lambda_1}(\mathbf{B}^T \mathbf{PB} + \mathbf{I})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{PA}$ , 选择离散时间李雅普诺夫函数为  $V(k) = \mathbf{x}^T(k) \mathbf{P} \mathbf{x}(k)$ , 其中  $\mathbf{P}$  是改进的离散时间代数里卡提方程的唯一解, 则有

$$\begin{aligned} V(k+1) - V(k) &= \mathbf{x}^T(k+1) \mathbf{P} \mathbf{x}(k+1) - \mathbf{x}^T(k) \mathbf{P} \mathbf{x}(k) = \\ &= \mathbf{x}^T(k) \left( (\mathbf{A} + \lambda_1 \mathbf{BK})^T \mathbf{P} (\mathbf{A} + \lambda_1 \mathbf{BK}) - \mathbf{P} \right) \mathbf{x}(k) = \\ &= \mathbf{x}^T(k) (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} + 2\lambda_1 \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{BK} + \lambda_1^2 \mathbf{K}^T \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{BK} - \mathbf{P}) \mathbf{x}(k) \leq \\ &= \mathbf{x}^T(k) (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{P} - 2\lambda_1 \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{B} (\mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B} + \mathbf{I})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{A} - \\ &= \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{B} (\mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B} + \mathbf{I})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B} (\mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B} + \mathbf{I})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{A}) \mathbf{x}(k) \leq \\ &= \mathbf{x}^T(k) (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{P} - \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{B} (\mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B} + \mathbf{I})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{A}) \mathbf{x}(k) = \\ &= -\mathbf{x}^T(k) \mathbf{x}(k). \end{aligned} \quad (13)$$

当  $k \rightarrow \infty$  时,  $V(k) \rightarrow 0$ , 因此  $\mathbf{A} + \lambda_1 \mathbf{BK}$  是 Schur 稳定的。于是可以得出结论: 对于  $i=2, 3, \dots, N$ ,  $\mathbf{A} + \lambda_i \mathbf{BK}$  是 Schur 稳定的。从而得到  $\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{A} + \mathbf{L}_1 \otimes \mathbf{BK}$  是 Schur 稳定的。

另一方面,  $\mathbf{S} + \mathbf{HBF}$  是 Schur 稳定的, 因此  $\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{A} + \mathbf{L}_1 \otimes \mathbf{BK}$  和  $\mathbf{S} + \mathbf{HBF}$  都是 Schur 稳定的, 从而误差系统(12)为 Schur 稳定的。

当  $t \rightarrow \infty$  时,  $\delta(k) \rightarrow 0, e(k) \rightarrow 0$ , 则  $x_F \rightarrow -(L_1^{-1}L_2 \otimes I_n)x_L$ 。根据引理 2,  $-L_1^{-1}L_2$  每一行的和等于 1。再由定义 1 知,  $-(L_1^{-1}L_2 \otimes I_n)x_L$  在由领导者和干扰观测器渐近收敛于 0 的误差所张成的凸包里, 所以定理 1 成立。

注 3 当  $d_i(k)=0$  时, 不妨设  $F=0$ , 此时  $\hat{d}_i(k)=0$ 。包含控制协议 (8) 依已有多智能体系统 (4) 达到包含, 相关结果见式 (13), 系统 (1)~(2) 具有如下形式:

$$\begin{cases} x_i(k+1) = Ax_i(k) + Bu_i(k), & i \in \Sigma_1; \\ x_i(k+1) = Ax_i(k), & i \in \Sigma_2. \end{cases} \quad (14)$$

注 4 当领导者个数为 1 时, 包含控制问题转化为一般性问题, 系统 (1)~(2) 具有如下形式:

$$\begin{cases} x_i(k+1) = Ax_i(k) + B(u_i(k) + d_i(k)), \\ x_0(k+1) = Ax_0(k). \end{cases} \quad (15)$$

此时假设 1 退化为全局可达。相应地, 由定理 1 及其证明可得如下推论 1。

推论 1 在假设 1 和假设 2 成立的条件下, 多智能体系统 (15), 在干扰观测器 (5) 的作用下可达到一致。

### 4 数值仿真

本章通过数值模拟来验证前述理论的正确性。

设多智能体系统由 6 个追随者和 3 个领导者组成, 其拓扑结构如图 1 所示。

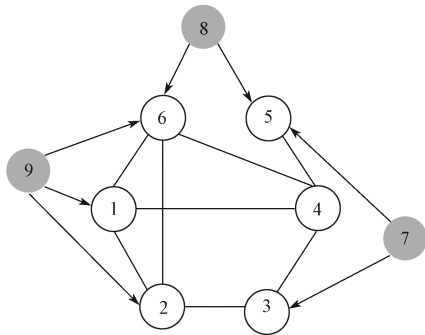


图 1 多智能体系统的拓扑结构图

Fig. 1 Topological graph of the multi-agent system

选择系统矩阵  $A, B, C, D, F$  和  $S$  如下:

$$A = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.4 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0.4 & -0.5 \\ -0.1 & 1.4 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} -1.7 & -0.9 \\ 0.2 & -1.5 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 1.2 \end{bmatrix}, S = \begin{bmatrix} 1.1 & 0.3 \\ -0.1 & 0.6 \end{bmatrix}.$$

从而可得以下动态方程:

若  $i \in F$ ,

$$\begin{cases} x_{i1}(k+1) = 0.8x_{i1}(k) + 0.3x_{i2}(k) + 0.3(u_i(k) + d_i(k)), \\ x_{i2}(k+1) = -0.1x_{i1}(k) + 1.2x_{i2}(k) + 0.4(u_i(k) + d_i(k)); \end{cases}$$

若  $i \in L$ ,

$$\begin{cases} x_{i1}(k+1) = 0.8x_{i1}(k) + 0.3x_{i2}(k), \\ x_{i2}(k+1) = -0.1x_{i1}(k) + 1.2x_{i2}(k); \end{cases}$$

易证  $(A, B)$  是稳定的。 $S$  的特征值为 1.030 3 和 0.669 7, 这表明  $S$  不是 Schur 稳定的。

选择增益矩阵

$$H = \begin{bmatrix} -0.3 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix},$$

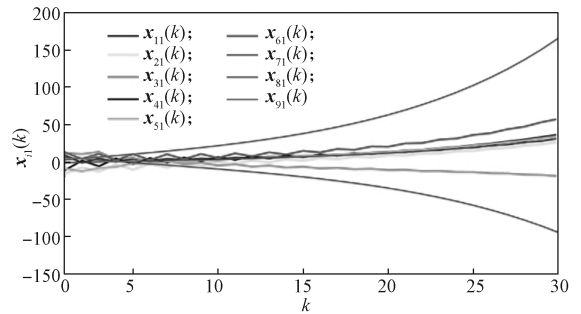
则  $A+DC$  的特征值为  $-0.988 1$  和  $0.198 1$ ,  $S+HBF$  的特征值为  $0.997 3$  和  $0.708 7$ , 从而  $A+DC$  和  $S+HBF$  都是 Schur 稳定的, 因此满足定理 1 的条件。根据 Ricatti 代数方程 (4), 有如下正定矩阵:

$$P = \begin{bmatrix} 3.432 8 & -1.317 8 \\ -1.317 8 & 5.328 1 \end{bmatrix}.$$

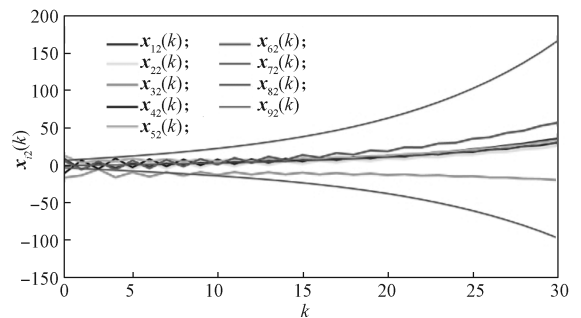
矩阵  $P$  的最大特征值  $\lambda_{\max}(P)=6.003 6$ , 根据拉普拉斯矩阵, 可得  $\lambda_1=1.615 3$ , 可以获得相应的控制器 (8), 其中

$$K = [-0.076 7 \quad -0.745 9].$$

对应的领导者和跟随者的运动轨迹仿真结果如图 2 所示。



a)  $x_i$  的第一个分量轨迹图



b)  $x_i$  的第二个分量轨迹图

图 2 基于 DO 的状态反馈包含控制仿真结果图

Fig. 2 DO-based simulation diagram of state feedback containment control



由图 2 可知, 所有追随者都聚集在由领导者所张成的凸包内。

## 5 结语

本文研究了具有外部干扰的离散时间高阶 MAS 的包含控制, 利用基于对状态信息的干扰观测器, 提出了相应的包含控制协议, 不仅有效抑制了干扰, 同时还能使系统达到包含。利用李雅普诺夫方法对系统的稳定性进行分析, 得到了包含达到的充分条件。最后通过数值模拟验证了理论结果的正确性。

### 参考文献:

- [1] JADBABAIE A, LIN J, MORSE A S. Coordination of Groups of Mobile Autonomous Agents Using Nearest Neighbor Rules[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2003, 48(6): 988-1001.
- [2] REN W, BEARD R W. Consensus Seeking in Multiagent Systems Under Dynamically Changing Interaction Topologies[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2005, 50(5): 655-661.
- [3] LI Z K, CHEN J. Robust Consensus of Linear Feedback Protocols over Uncertain Network Graphs[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2017, 62(8): 4251-4258.
- [4] WU Z G, XU Y, PAN Y J, et al. Event-Triggered Pinning Control for Consensus of Multiagent Systems with Quantized Information[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, 2018, 48(11): 1929-1938.
- [5] YANG R H, ZHANG H, FENG G, et al. Robust Cooperative Output Regulation of Multi-Agent Systems via Adaptive Event-Triggered Control[J]. Automatica, 2019, 102: 129-136.
- [6] XU C J, ZHAO Y L, QIN B, et al. Adaptive Synchronization of Coupled Harmonic Oscillators Under Switching Topology[J]. Journal of the Franklin Institute, 2019, 356(2): 1067-1087.
- [7] CAO Y C, REN W, EGERSTEDT M. Distributed Containment Control with Multiple Stationary or Dynamic Leaders in Fixed and Switching Directed Networks[J]. Automatica, 2012, 48(8): 1586-1597.
- [8] LIU H Y, XIE G M, WANG L. Necessary and Sufficient Conditions for Containment Control of Networked Multi-Agent Systems[J]. Automatica, 2012, 48(7): 1415-1422.
- [9] LI Z K, REN W, LIU X D, et al. Distributed Containment Control of Multi-Agent Systems with General Linear Dynamics in the Presence of Multiple Leaders[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2013, 23(5): 534-547.
- [10] ASGARI M, ATRIANFAR H. Necessary and Sufficient Conditions for Containment Control of Heterogeneous Linear Multi-Agent Systems with Fixed Time Delay[J]. IET Control Theory & Applications, 2019, 13(13): 2065-2074.
- [11] LIU H Y, XIE G M, YU M. Necessary and Sufficient Conditions for Containment Control of Fractional-Order Multi-Agent Systems[J]. Neurocomputing, 2019, 323: 86-95.
- [12] WANG Y W, LIU X K, XIAO J W, et al. Output Formation-Containment of Interacted Heterogeneous Linear Systems by Distributed Hybrid Active Control[J]. Automatica, 2018, 93: 26-32.
- [13] MA Q, LEWIS F L, XU S Y. Cooperative Containment of Discrete-Time Linear Multi-Agent Systems[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2015, 25(7): 1007-1018.
- [14] WANG D, WANG D, WANG W. Necessary and Sufficient Conditions for Containment Control of Multi-Agent Systems with Time Delay[J]. Automatica, 2019, 103: 418-423.
- [15] ZHAO Z Y, YANG W, SHI H B. Semi-Global Containment Control of Discrete-Time Linear Systems with Actuator Position and Rate Saturation[J]. Neurocomputing, 2019, 349: 173-182.
- [16] GUO L, CHEN W H. Disturbance Attenuation and Rejection for Systems with Nonlinearity via DOBC Approach[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2005, 15(3): 109-125.
- [17] YANG H Y, ZHANG Z X, ZHANG S Y. Consensus of Second-Order Multi-Agent Systems with Exogenous Disturbances[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2011, 21(9): 945-956.
- [18] XU C J, ZHENG Y, SU H S, et al. Containment for Linear Multi-Agent Systems with Exogenous Disturbances[J]. Neurocomputing, 2015, 160: 206-212.

(责任编辑: 邓光辉)