doi:10.3969/j.issn.1673-9833.2021.06.011

基于 3 阶模糊张量的广义加权几何算子及其应用

方世林[1]，邓胜岳[2]，吴海燕[3]

（1. 湖南理工学院 信息科学与工程学院，湖南 岳阳 414006；2. 湖南工业大学 理学院，湖南 株洲 412007；
3. 株洲市第二中学，湖南 株洲 412007）

摘 要：针对具有高维数据特征的多属性群决策问题，定义了 3 阶模糊张量，建立了基于 3 阶模糊张量的广义加权几何算子，探索了该类算子的性质，提出了一种解决多属性群决策问题的新方法，并通过算例验证了该方法的有效性。

关键词：3 阶模糊张量；广义加权几何算子；多属性决策；群决策

中图分类号：O159；C934 **文献标志码**：A **文章编号**：1673-9833(2021)06-0079-05

引文格式：方世林，邓胜岳，吴海燕．基于 3 阶模糊张量的广义加权几何算子及其应用 [J]. 湖南工业大学学报，2021，35(6)：79-83.

Generalized Weighted Geometric Operator Based on the Third-Order Fuzzy Tensor with Its Application

FANG Shilin[1]，DENG Shengyue[2]，WU Haiyan[3]

（1. School of Information Science and Engineering，Hunan Institute of Science and Technology，Yueyang Hunan 414006，China；
2. College of Science，Hunan University of Technology，Zhuzhou Hunan 412007，China；
3. No.2 Middle School of Zhuzhou Hunan，Zhuzhou Hunan 412007，China）

Abstract：In view of the flaw of the multiple attribute decision making with high-dimension data characteristics, the third-order fuzzy tensor has thus been defined, with the generalized weighted geometric (GWG) operator based on third-order fuzzy tensor subsequently established. By exploring the properties of GWG operator, a novel method is proposed to solve the multiple attribute decision making problems, with examples provided to verify the efficiency of the proposed method.

Keywords：third-order fuzzy tensor；generalized weighted geometric operator (GWG)；multiple attribute decision making；group decision making

0 引言

多属性群决策作为现代决策科学的重要分支，一直是决策理论的研究热点[1]。信息集成技术是目前处理多属性决策问题的主要技术手段之一，也是决策理论与实践中的关键问题。因此，国内外许多专家学者针对决策信息集成的问题进行了较深入的研究，获得了一系列的研究成果。T. L. Saaty[2] 于 1980 年首次提

收稿日期：2021-06-25

基金项目：湖南省自然科学基金资助项目（2020JJ4264）；湖南省教育厅科学研究优秀青年项目（20B180）

作者简介：方世林（1981-），男，湖南岳阳人，湖南理工学院高级实验师，硕士，主要从事多属性决策与计算机网络通信方面的教学与研究，E-mail：36662628@qq.com

通信作者：邓胜岳（1981-），男，湖南岳阳人，湖南工业大学讲师，博士，硕士生导师，主要从事张量理论与多层规划方面的教学与研究，E-mail：dsy110@163.com

出并研究了加权几何算子。Xu Z. S. 等 [1,3–5] 先后定义并研究了直觉模糊混合几何算子、最大和最小有序加权几何算子、直觉模糊有序加权几何算子等多属性决策方法。Chen S. M. 等 [6] 构建了基于直觉模糊数和直觉模糊几何平均算子变换技术的多属性模糊决策方法。此外，针对实际决策环境的不同，专家们也提出了一些新颖的多属性决策方法和技术 [7–9]。然而，以上研究工作的决策数据处理技术，均建立在矩阵分析理论的基础上。由于实际模糊多属性群决策中决策信息的模糊性和复杂性、决策数据规模的高维性，上述方法难以高效地处理此类问题。自 Qi L. Q. [10] 与 Lim L. H. [11] 分别独立提出了张量特征值和张量特征向量的概念，进而吸引了许多专家从事张量理论及应用的研究。张量作为矩阵的推广具有高阶多维的特征，能将高维数据表示成非常简洁的形式；通俗来讲向量是一阶张量、矩阵是二阶张量，并且高阶张量能有效且简洁地解决具有高维数据特征的各类实际应用问题，如量子计算、图像降噪、晶体聚类等。

为了解决上述具有高维数据特征的多属性群决策问题，本文在已有研究成果的基础 [12–14] 上，定义了 3 阶模糊张量的一般形式，建立了基于 3 阶模糊张量的广义加权几何算子，探索了该算子的相关性质，进而提出了以广义加权几何算子为核心的决策方法，并通过数值算例验证了所提方法的有效性。

1 预备知识

本节将简要介绍 3 阶模糊张量的一般形式、运算法则以及相关性质，并规定文中将要涉及的符号。

F 表示论域 U 上的模糊集合，$\boldsymbol{F}^n$ 表示 n 维模糊向量，$[n]=\{1, 2, \cdots, n\}$，$T_F(3, n_1\times n_2\times n_3)$ 表示 3 阶模糊张量集合。

定义 1[12] 设 $\tilde{\boldsymbol{A}}=\left(a_{i_1i_2i_3}\right)_{n_1\times n_2\times n_3}$，其中 $a_{i_1i_2i_3}\in[0,1]$，且 $i_1\in[n_1]$，$i_2\in[n_2]$，$i_3\in[n_3]$，则 $\tilde{\boldsymbol{A}}$ 是 3 阶模糊张量。

定义 2[12] 设 $\tilde{\boldsymbol{A}}=\left(a_{i_1i_2i_3}\right)_{n_1\times n_2\times n_3}$ 和 $\tilde{\boldsymbol{B}}=\left(b_{i_1i_2i_3}\right)_{n_1\times n_2\times n_3}$ 分别为 3 阶模糊张量，规定如下运算法则：

1）相等。$\tilde{\boldsymbol{A}}=\tilde{\boldsymbol{B}}$ 当且仅当 $a_{i_1i_2i_3}=b_{i_1i_2i_3}$，其中 $i_1\in[n_1]$，$i_2\in[n_2]$，$i_3\in[n_3]$。

2）包含。$\tilde{\boldsymbol{A}}\leqslant\tilde{\boldsymbol{B}}$ 当且仅当 $a_{i_1i_2i_3}\leqslant b_{i_1i_2i_3}$，其中 $i_1\in[n_1]$，$i_2\in[n_2]$，$i_3\in[n_3]$。

3）并。$\tilde{\boldsymbol{A}}\cup\tilde{\boldsymbol{B}}=\left(a_{i_1i_2i_3}\vee b_{i_1i_2i_3}\right)_{n_1\times n_2\times n_3}$。

4）交。$\tilde{\boldsymbol{A}}\cap\tilde{\boldsymbol{B}}=\left(a_{i_1i_2i_3}\wedge b_{i_1i_2i_3}\right)_{n_1\times n_2\times n_3}$。

5）余。$\tilde{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{C}}=\left(1-a_{i_1i_2i_3}\right)_{n_1\times n_2\times n_3}$。

定义 3[2] 令 $\mathrm{WG}:(\mathbf{R}^+)^n\to\mathbf{R}^+$，如果 $\mathrm{WG}_\omega(a_1, a_2,\cdots,a_n)=\prod_{j=1}^{n}a_j^{\omega_j}$，其中 $\boldsymbol{\omega}=(\omega_1, \omega_2,\cdots, \omega_n)$ 是 $a_j(j\in[n])$ 的指数加权向量，且 $\omega_j\in[0, 1]$，$\sum_{j=1}^{n}\omega_j=1$；则函数 WG 为加权几何算子。

定义 4 令 $\tilde{\boldsymbol{A}}\in T_F(3, n_1\times n_2\times n_3)$，若函数 $\mathrm{GWG}:\boldsymbol{F}^{n_2\times n_3}\to\boldsymbol{F}^{n_1}$，且 GWG 的第 i_1 个分量表达式为

$$\mathrm{GWG}_{i_1}\left(a_{i_111},\cdots,a_{i_1i_2i_3},\cdots,a_{i_1n_2n_3}\right)=\prod_{i_2=1}^{n_2}\prod_{i_3=1}^{n_3}\left(a_{i_1i_2i_3}\right)^{x_{i_2}^{(2)}\cdot x_{i_3}^{(3)}}，\quad(1)$$

其中 $\boldsymbol{X}_2=\left(x_1^{(2)},\cdots,x_{i_2}^{(2)},\cdots,x_{n_2}^{(2)}\right)$，$\boldsymbol{X}_3=\left(x_1^{(3)},\cdots,x_{i_3}^{(3)},\cdots,x_{n_3}^{(3)}\right)$，分别是 $a_{:i_2:}(i_2=[n_2])$，$a_{::i_3}(i_3=[n_3])$ 的指数加权向量，且 $x_{i_2}^{(2)},x_{i_3}^{(3)}\in[0,1]$，$\sum_{i_2=1}^{n_2}x_{i_2}^{(2)}=1$，$\sum_{i_3=1}^{n_3}x_{i_3}^{(3)}=1$，则函数 GWG 为广义加权几何算子。

2 基于三阶模糊张量的广义加权几何算子

本节将利用数学归纳法证明定义 4 中表达式的正确性，并给出定理 1。此外，探索广义加权几何算子的基本性质，为后续算法设计提供理论基础。

定理 1 设 $\tilde{\boldsymbol{A}}=\left(a_{i_1i_2i_3}\right)_{n_1\times n_2\times n_3}\in T_F(3, n_1\times n_2\times n_3)$ 为 3 阶模糊张量，且 $\boldsymbol{X}_2=\left(x_1^{(2)},\cdots,x_{i_2}^{(2)},\cdots,x_{n_2}^{(2)}\right)$，$\boldsymbol{X}_3=\left(x_1^{(3)},\cdots,x_{i_3}^{(3)},\cdots,x_{n_3}^{(3)}\right)$ 分别是 $a_{:i_2:}(i_2=[n_2])$，$a_{::i_3}(i_3=[n_3])$ 的指数加权向量，其中 $x_{i_2}^{(2)},x_{i_3}^{(3)}\in[0,1]$，$\sum_{i_2=1}^{n_2}x_{i_2}^{(2)}=1$，$\sum_{i_3=1}^{n_3}x_{i_3}^{(3)}=1$，则广义加权几何算子 GWG 第 i_1 个分量的集成值为

$$\mathrm{GWG}_{i_1}\left(a_{i_111},\cdots,a_{i_1i_2i_3},\cdots,a_{i_1n_2n_3}\right)=\prod_{i_2=1}^{n_2}\prod_{i_3=1}^{n_3}\left(a_{i_1i_2i_3}\right)^{x_{i_2}^{(2)}\cdot x_{i_3}^{(3)}}，\quad(2)$$

证明 对 n_2, n_3 用数学归纳法证明等式（2）。

1）当 $n_2=n_3=1$，则 $\mathrm{GWG}_{i_1}\left(a_{i_111}\right)=\left(a_{i_111}\right)^{x_1^{(2)}\cdot x_1^{(3)}}$。

2）假设 $n_2=K_2$，$n_3=K_3$，等式（2）成立，即

$$\mathrm{GWG}_{i_1}\left(a_{i_111},\cdots,a_{i_1i_2i_3},\cdots,a_{i_1K_2K_3}\right)=\prod_{i_2=1}^{K_2}\prod_{i_3=1}^{K_3}\left(a_{i_1i_2i_3}\right)^{x_{i_2}^{(2)}\cdot x_{i_3}^{(3)}}。$$

3）当 n_2, n_3 中至少有一个元素加 1，则考虑如下 3 种情况：

ⅰ）若 $n_2=K_2+1$，则有

$$\mathrm{GWG}_{i_1}\left(a_{i_111},\cdots,a_{i_1i_2i_3},\cdots,a_{i_1K_2K_3},a_{i_1(K_2+1)1},\cdots,a_{i_1(K_2+1)K_3}\right)=$$

$$\prod_{i_2=1}^{K_2}\prod_{i_3=1}^{K_3}\left(a_{i_1i_2i_3}\right)^{x_{i_2}^{(2)}\cdot x_{i_3}^{(3)}}\cdot\prod_{i_3=1}^{K_3}\left(a_{i_1(K_2+1)i_3}\right)^{x_{i_2}^{(2)}\cdot x_{i_3}^{(3)}}=$$

$$\prod_{i_2=1}^{K_2+1}\prod_{i_3=1}^{K_3}\left(a_{i_1i_2i_3}\right)^{x_{i_2}^{(2)}\cdot x_{i_3}^{(3)}}。$$

ⅱ）若 $n_3=K_3+1$，则有

$$\mathrm{GWG}_{i_1}\left(a_{i_111},\cdots,a_{i_1i_2i_3},\cdots,a_{i_1K_2K_3},a_{i_11(K_3+1)},\cdots,a_{i_1K_2(K_3+1)}\right)=$$

$$\prod_{i_2=1}^{K_2}\prod_{i_3=1}^{K_3}\left(a_{i_1i_2i_3}\right)^{x_{i_2}^{(2)}\cdot x_{i_3}^{(3)}}\cdot\prod_{i_2=1}^{K_2}\left(a_{i_1i_2(K_3+1)}\right)^{x_{i_2}^{(2)}\cdot x_{i_3}^{(3)}}=$$

$$\prod_{i_2=1}^{K_2}\prod_{i_3=1}^{K_3+1}\left(a_{i_1i_2i_3}\right)^{x_{i_2}^{(2)}\cdot x_{i_3}^{(3)}}。$$

ⅲ）若 $n_2=K_2+1$，$n_3=K_3+1$，则有

$$\mathrm{GWG}_{i_1}\left(a_{i_111},\cdots,a_{i_1K_2K_3},a_{i_11(K_3+1)},\cdots,a_{i_1K_2(K_3+1)},\right.$$

$$\left.a_{i_1(K_2+1)1},\cdots,a_{i_1(K_2+1)K_3},a_{i_1(K_2+1)(K_3+1)}\right)=$$

$$\prod_{i_2=1}^{K_2}\prod_{i_3=1}^{K_3}(a_{i_1i_2i_3})^{x_{i_2}^{(2)}\cdot x_{i_3}^{(3)}}\cdot\prod_{i_2=1}^{K_2}(a_{i_1i_2(K_3+1)})^{x_{i_2}^{(2)}\cdot x_{i_3}^{(3)}}\cdot$$

$$\prod_{i_3=1}^{K_3}(a_{i_1(K_2+1)i_3})^{x_{i_2}^{(2)}\cdot x_{i_3}^{(3)}}\cdot(a_{i_1(K_2+1)(K_3+1)})^{x_{(K_2+1)}^{(2)}\cdot x_{(K_3+1)}^{(3)}}=$$

$$\prod_{i_2=1}^{K_2+1}\prod_{i_3=1}^{K_3+1}(a_{i_1i_2i_3})^{x_{i_2}^{(2)}\cdot x_{i_3}^{(3)}}。$$

综上所述，对任意的 n_2, n_3，等式（2）成立。

性质 1　定理 1 的集成值是 n_1 维的模糊向量。

证明　根据定理 1，有

$\mathrm{GWG}_{i_1}\left(a_{i_111},\cdots,a_{i_1i_2i_3},\cdots,a_{i_1n_2n_3}\right)=\prod_{i_2=1}^{n_2}\prod_{i_3=1}^{n_3}\left(a_{i_1i_2i_3}\right)^{x_{i_2}^{(2)}\cdot x_{i_3}^{(3)}}$，其中 $i_1\in[n_1]$，且 $a_{i_1i_2i_3},x_{i_2}^{(2)},x_{i_3}^{(3)}\in[0, 1]$，即有 $\prod_{i_2=1}^{n_2}\prod_{i_3=1}^{n_3}\left(a_{i_1i_2i_3}\right)^{x_{i_2}^{(2)}\cdot x_{i_3}^{(3)}}\in[0,1]$，则

$$\mathrm{GWG}\left(a_{111},\cdots,a_{i_1i_2i_3},\cdots,a_{n_1n_2n_3}\right)=$$

$$\left(\prod_{i_2=1}^{n_2}\prod_{i_3=1}^{n_3}\left(a_{1i_2i_3}\right)^{x_{i_2}^{(2)}\cdot x_{i_3}^{(3)}},\cdots,\prod_{i_2=1}^{n_2}\prod_{i_3=1}^{n_3}\left(a_{i_1i_2i_3}\right)^{x_{i_2}^{(2)}\cdot x_{i_3}^{(3)}},\cdots,\right.$$

$$\left.\prod_{i_2=1}^{n_2}\prod_{i_3=1}^{n_3}\left(a_{n_1i_2i_3}\right)^{x_{i_2}^{(2)}\cdot x_{i_3}^{(3)}}\right)^{\mathrm{T}}\in\boldsymbol{F}^{n_1}。$$

因此，定理 1 的计算值为 n_1 维的模糊向量。

性质 2　设 $\tilde{\boldsymbol{A}}=\left(a_{i_1i_2i_3}\right)_{n_1\times n_2\times n_3}\in T_F(3,\ n_1\times n_2\times n_3)$ 是 3 阶模糊张量，且 $\boldsymbol{X}_2=\left(x_1^{(2)},\cdots,x_{i_2}^{(2)},\cdots,x_{n_2}^{(2)}\right)$，$\boldsymbol{X}_3=\left(x_1^{(3)},\cdots,x_{i_3}^{(3)},\cdots,x_{n_3}^{(3)}\right)$ 分别是 $a_{:i_2:}(i_2=[n_2])$，$a_{::i_3}(i_3=[n_3])$ 的指数加权向量，其中 $x_{i_2}^{(2)},x_{i_3}^{(3)}\in[0,1]$，$\sum_{i_2=1}^{n_2}x_{i_2}^{(2)}=1$，$\sum_{i_3=1}^{n_3}x_{i_3}^{(3)}=1$，则广义加权几何算子（GWG）有如下性质：

1）幂等性。若 $a_{i_1i_2i_3}=a$，$i_1\in[n_1]$，$i_2\in[n_2]$，$i_3\in[n_3]$ 则有

$$\mathrm{GWG}\left(a_{111},\cdots,a_{i_1i_2i_3},\cdots,a_{n_1n_2n_3}\right)=(a,\cdots,a)^{\mathrm{T}}\in\boldsymbol{F}^{n_1}。$$

2）有界性。设 $a^-=\min\limits_{i_1i_2i_3}\{a_{i_1i_2i_3}\}$，$a^+=\max\limits_{i_1i_2i_3}\{a_{i_1i_2i_3}\}$，且 $(a^-,\cdots,a^-)^{\mathrm{T}}\in\boldsymbol{F}^{n_1}$，$(a^+,\cdots,a^+)^{\mathrm{T}}\in\boldsymbol{F}^{n_1}$，则对任意的 $\boldsymbol{X}_2$，$\boldsymbol{X}_3$，有

$$(a^-,\cdots,a^-)^{\mathrm{T}}\leqslant\mathrm{GWG}\left(a_{111},\cdots,a_{i_1i_2i_3},\cdots,a_{n_1n_2n_3}\right)\leqslant(a^+,\cdots,a^+)^{\mathrm{T}}。$$

3）单调性。设 $\tilde{\boldsymbol{A}}^*=\left(a_{i_1i_2i_3}^*\right)_{n_1\times n_2\times n_3}\in T_F(3,\ n_1\times n_2\times n_3)$，若对任意 i_1,i_2,i_3，满足 $a_{i_1i_2i_3}\leqslant a_{i_1i_2i_3}^*$，则有

$$\mathrm{GWG}\left(a_{111},\cdots,a_{i_1i_2i_3},\cdots,a_{n_1n_2n_3}\right)\leqslant$$

$$\mathrm{GWG}\left(a_{111}^*,\cdots,a_{i_1i_2i_3}^*,\cdots,a_{n_1n_2n_3}^*\right)。$$

证明　1）设 $a_{i_1i_2i_3}=a$，$i_1\in[n_1]$，$i_2\in[n_2]$，$i_3\in[n_3]$，根据定理 1 则有广义加权几何算子第 i_1 个分量

$$\mathrm{GWG}_{i_1}\left(a_{i_111},\cdots,a_{i_1i_2i_3},\cdots,a_{i_1n_2n_3}\right)=\prod_{i_2=1}^{n_2}\prod_{i_3=1}^{n_3}\left(a_{i_1i_2i_3}\right)^{x_{i_2}^{(2)}\cdot x_{i_3}^{(3)}}=$$

$$\prod_{i_2=1}^{n_2}\prod_{i_3=1}^{n_3}(a)^{x_{i_2}^{(2)}\cdot x_{i_3}^{(3)}}=(a)^{\sum_{i_2=1}^{n_2}x_{i_2}^{(2)}\cdot\sum_{i_3=1}^{n_3}x_{i_3}^{(3)}}=a,$$

且 $i_1\in[n_1]$，则有

$$\mathrm{GWG}\left(a_{111},\cdots,a_{i_1i_2i_3},\cdots,a_{n_1n_2n_3}\right)=(a,\cdots,a)^{\mathrm{T}}\in\boldsymbol{F}^{n_1}。$$

2）对任意的 i_1,i_2,i_3，$a^-=\min\limits_{i_1i_2i_3}\{a_{i_1i_2i_3}\}$，$a^+=\max\limits_{i_1i_2i_3}\{a_{i_1i_2i_3}\}$，有 $a^-\leqslant a_{i_1i_2i_3}\leqslant a^+$。

由定理 1 可知，广义加权几何算子第 i_1 个分量有关系式

$$\prod_{i_2=1}^{n_2}\prod_{i_3=1}^{n_3}(a^-)^{x_{i_2}^{(2)}\cdot x_{i_3}^{(3)}}\leqslant\prod_{i_2=1}^{n_2}\prod_{i_3=1}^{n_3}\left(a_{i_1i_2i_3}\right)^{x_{i_2}^{(2)}\cdot x_{i_3}^{(3)}}\leqslant\prod_{i_2=1}^{n_2}\prod_{i_3=1}^{n_3}(a^+)^{x_{i_2}^{(2)}\cdot x_{i_3}^{(3)}},$$

所以有 $a^-\leqslant\mathrm{GWG}_{i_1}\left(a_{i_111},\cdots,a_{i_1i_2i_3},\cdots,a_{i_1n_2n_3}\right)\leqslant a^+$，且 $i_1\in[n_1]$，则有

$$(a^-,\cdots,a^-)^{\mathrm{T}}\leqslant\mathrm{GWG}(a_{111},\cdots,a_{i_1i_2i_3},\cdots,a_{n_1n_2n_3})\leqslant(a^+,\cdots,a^+)^{\mathrm{T}}。$$

3）因为对任意的 i_1,i_2,i_3，满足 $a_{i_1i_2i_3}\leqslant a_{i_1i_2i_3}^*$。由定理 1 可知，广义加权几何算子第 i_1 个分量的关系式为 $\prod_{i_2=1}^{n_2}\prod_{i_3=1}^{n_3}\left(a_{i_1i_2i_3}\right)^{x_{i_2}^{(2)}\cdot x_{i_3}^{(3)}}\leqslant\prod_{i_2=1}^{n_2}\prod_{i_3=1}^{n_3}(a^*)^{x_{i_2}^{(2)}\cdot x_{i_3}^{(3)}}$，且 $i_1\in[n_1]$，则有

$$\mathrm{GWG}\left(a_{111},\cdots,a_{i_1i_2i_3},\cdots,a_{n_1n_2n_3}\right)\leqslant$$

$$\mathrm{GWG}\left(a_{111}^*,\cdots,a_{i_1i_2i_3}^*,\cdots,a_{n_1n_2n_3}^*\right)。$$

3 算法

本节将利用基于 3 阶模糊张量的广义加权几何算子设计算法，为解决多属性决策问题提供一种新的方法，该算法具体如下：

步骤 1 将决策数据的模糊矩阵表示法转换为 3 阶模糊张量 $\tilde{\boldsymbol{A}}$ 的表示；

步骤 2 根据定理 1 的结论，利用广义加权几何算子（GWG），将模糊张量 $\tilde{\boldsymbol{A}}$ 表示的决策数据 $a_{i_1i_2i_3}$（$i_1\in[n_1]$，$i_2\in[n_2]$，$i_3\in[n_3]$）进行数据集成，从而获得与备选方案对应的模糊数值；

步骤 3 根据步骤 2 的计算结果，进行模糊数排序，进而得到最优的排序方案。

4 数值算例

本节采用文献 [15] 中的例题作为算例来说明本文所提方法的可行性。

5 个备选方案 B_{i_1} (i_1=1, 2, 3, 4, 5) 由 3 个决策者 D_{i_2} (i_2=1, 2, 3)，基于 8 个不同的属性 S_{i_3} (i_3=1, 2, …, 8) 进行评价，其中决策者权重向量为 $\boldsymbol{X}_2$=(0.2, 0.5, 0.3)$^{\mathrm{T}}$，属性的权重向量为 $\boldsymbol{X}_3$=(0.10, 0.08, 0.12, 0.13, 0.17, 0.15, 0.11, 0.14)$^{\mathrm{T}}$。

表 1~3 为决策者 D_{i_2} (i_2=1, 2, 3) 的标准决策矩阵 $\boldsymbol{R}_l$(l=1, 2, 3)（来自文献 [15] 中表 8~10）。

表 1 决策者 D_1 的标准决策矩阵 $\boldsymbol{R}_1$

Table 1 Standardized decision matrix $\boldsymbol{R}_1$ for decision maker D_1

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
S_1	0.575 0	0.937 5	0.387 5	0.033 3	0.354 2
S_2	0.116 6	0.391 7	0.591 7	0.799 9	0.250 0
S_3	0.916 7	0.033 7	0.212 5	0.804 2	0.625 0
S_4	1.000 0	0.021 5	0.111 8	0.836 3	0.440 2
S_5	0.255 0	0.050 0	0.870 0	1.000 0	0.576 7
S_6	0.970 5	0.000 0	0.522 5	0.776 3	0.971 4
S_7	0.033 3	0.900 0	0.950 0	0.687 5	0.212 5
S_8	0.487 5	0.175 0	0.300 0	0.725 0	1.000 0

表 2 决策者 D_2 的标准决策矩阵 $\boldsymbol{R}_2$

Table 2 Standardized decision matrix $\boldsymbol{R}_2$ for decision maker D_2

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
S_1	0.325 0	0.937 5	0.137 5	0.199 8	0.562 7
S_2	0.283 1	0.475 2	0.841 7	0.633 5	0.250 0
S_3	0.750 2	0.200 2	0.087 5	0.762 7	0.875 0
S_4	1.000 0	0.021 5	0.134 8	0.840 3	0.496 2
S_5	0.155 0	0.300 0	0.970 0	1.000 0	0.710 2
S_6	0.970 5	0.000 0	0.451 0	0.669 4	0.828 4
S_7	0.199 8	0.650 0	0.700 0	0.812 5	0.087 5
S_8	0.112 5	0.425 0	0.550 0	0.600 0	1.000 0

表 3 决策者 D_3 的标准决策矩阵 $\boldsymbol{R}_3$

Table 3 Standardized decision matrix $\boldsymbol{R}_3$ for decision maker D_3

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
S_1	0.825 0	0.812 5	0.262 5	0.033 3	0.479 2
S_2	0.283 1	0.141 7	0.675 3	0.466 5	0.750 0
S_3	0.816 7	0.033 7	0.187 5	0.929 2	0.775 0
S_4	1.000 0	0.064 5	0.040 3	0.793 3	0.440 2
S_5	0.405 0	0.050 0	0.970 0	1.000 0	0.876 7
S_6	0.911 5	0.000 0	0.595 9	0.871 9	0.971 4
S_7	0.033 3	0.800 0	0.950 0	0.512 5	0.187 5
S_8	0.112 5	0.425 0	0.300 0	0.725 0	1.000 0

利用本文的算法求解该问题，具体步骤如下。

步骤 1 利用 3 阶模糊张量 $\tilde{\boldsymbol{A}}$ 表示表 1~3 的数据，即 $\tilde{\boldsymbol{A}}=\left(a_{i_1i_2i_3}\right)_{5\times3\times8}\in T_F(3,\ 5\times3\times8)$，其中 $a_{i_1::}$ (i_1=1, 2, 3, 4, 5) 表示 5 个备选方案，$a_{:i_2:}$ (i_2=1, 2, 3) 表示 3 个决策者，$a_{::i_3}$ (i_3=1, 2, …, 8) 表示 8 个属性。

数据转换如下：

a_{111}=0.575 0, a_{112}=0.116 6, a_{113}=0.916 7, a_{114}=1.000 0, a_{115}=0.255 0, a_{116}=0.970 5, a_{117}=0.033 3, a_{118}=0.487 5;

a_{121}=0.325 0, a_{122}=0.283 1, a_{123}=0.750 2, a_{124}=1.000 0, a_{125}=0.155 0, a_{126}=0.970 5, a_{127}=0.199 8, a_{128}=0.112 5;

a_{131}=0.825 0, a_{132}=0.283 1, a_{133}=0.816 7, a_{134}=1.000 0, a_{135}=0.405 0, a_{136}=0.911 5, a_{137}=0.033 3, a_{138}=0.112 5;

a_{211}=0.937 5, a_{212}=0.391 7, a_{213}=0.033 7, a_{214}=0.021 5, a_{215}=0.050 0, a_{216}=0.000 0, a_{217}=0.900 0, a_{218}=0.175 0;

a_{221}=0.937 5, a_{222}=0.475 2, a_{223}=0.200 2, a_{224}=0.021 5, a_{225}=0.300 0, a_{226}=0.000 0, a_{227}=0.650 0, a_{228}=0.425 0;

a_{231}=0.812 5, a_{232}=0.141 7, a_{233}=0.033 7, a_{234}=0.064 5, a_{235}=0.050 0, a_{236}=0.000 0, a_{237}=0.800 0, a_{238}=0.425 0;

a_{311}=0.387 5, a_{312}=0.591 7, a_{313}=0.212 5, a_{314}=0.111 8, a_{315}=0.870 0, a_{316}=0.522 5, a_{317}=0.950 0, a_{318}=0.300 0;

a_{321}=0.137 5, a_{322}=0.841 7, a_{323}=0.087 5, a_{324}=0.134 8, a_{325}=0.970 0, a_{326}=0.451 0, a_{327}=0.700 0, a_{328}=0.550 0;

a_{331}=0.262 5, a_{332}=0.675 3, a_{333}=0.187 5, a_{334}=0.040 3, a_{335}=0.970 0, a_{336}=0.595 9, a_{337}=0.950 0, a_{338}=0.300 0;

a_{411}=0.033 3, a_{412}=0.799 9, a_{413}=0.804 2, a_{414}=0.836 3, a_{415}=1.000 0, a_{416}=0.776 3, a_{417}=0.687 5, a_{418}=0.725 0;

a_{421}=0.199 8, a_{422}=0.633 5, a_{423}=0.762 7, a_{424}=0.840 3, a_{425}=1.000 0, a_{426}=0.669 4, a_{427}=0.812 5, a_{428}=0.600 0;

a_{431}=0.033 3, a_{432}=0.466 5, a_{433}=0.929 2, a_{434}=0.793 3, a_{435}=1.000 0, a_{436}=0.871 9, a_{437}=0.512 5, a_{438}=0.725 0;

a_{511}=0.354 2, a_{512}=0.250 0, a_{513}=0.625 0, a_{514}=0.440 2, a_{515}=0.576 7, a_{516}=0.971 4, a_{517}=0.212 5, a_{518}=1.000 0;

a_{521}=0.562 7, a_{522}=0.250 0, a_{523}=0.875 0, a_{524}=0.496 2,

a_{525}=0.710 2, a_{526}=0.828 4, a_{527}=0.087 5, a_{528}=1.000 0;
a_{531}=0.479 2, a_{532}=0.750 0, a_{533}=0.775 0, a_{534}=0.440 2,
a_{535}=0.876 7, a_{536}=0.971 4, a_{537}=0.187 5, a_{538}=1.000 0。

步骤 2　由定理 1 可知 $\tilde{\boldsymbol{B}} = \tilde{\boldsymbol{A}} \circ \boldsymbol{X}_2 \circ \boldsymbol{X}_3 = (b_1, b_2, b_3, b_4, b_5)$，其中 $b_{i_1} = \prod_{i_2=1}^{3}\prod_{i_3=1}^{8}\left(a_{i_1 i_2 i_3}\right)^{x_{i_2}^{(2)} \cdot x_{i_3}^{(3)}}$，$i_1 \in [5]$，则有

$$\tilde{\boldsymbol{B}} = \tilde{\boldsymbol{A}} \circ \boldsymbol{X}_2 \circ \boldsymbol{X}_3 = (0.363, 0, 0.368, 0.617, 0.561)$$ 。

步骤 3　根据步骤 2 的计算结果，可以得到备选方案的排序为 $b_4 \succ b_5 \succ b_3 \succ b_1 \succ b_2$。

因此，本算例的最佳备选方案是 b_4。

5　结语

3 阶模糊张量作为高阶模糊张量的基础表示形式，是研究高阶模糊张量性质和特征的基础。本文着重研究了 3 阶模糊张量的一般形式，建立了基于 3 阶模糊张量的广义加权几何算子，探索了广义加权几何算子的相关性质，提出了基于 3 阶模糊张量的多属性决策方法，并通过数值算例验证了本文所提方法的可行性。

数值算例的研究结果表明：

1）本文所提方法的计算结果同文献 [15] 的最佳备选方案结果一致，说明本文所提方法能够解决多属性群决策问题。

2）与文献 [15] 相比，本文所提方法的模型建立和计算过程更为简洁。

3）文献 [12] 和 [14] 没有涉及基于模糊张量的广义加权几何算子的研究，而本文所提方法恰好是文献 [12] 和 [14] 的补充。

参考文献：

[1] XU Z S，CAI X Q. Intuitionistic Fuzzy Information Aggregation Theory and Applications[M]. Berlin：Springer，2012：12–39.

[2] SAATY T L. The Analytic Hierarchy Process[M]. New York：McGraw-Hill，1980：15–35.

[3] XU Z S，DA Q L. The Ordered Weighted Geometric Averaging Operators[J]. International Journal of Intelligent Systems，2002，17(7)：709–716.

[4] XU Z S，YAGER R R. Some Geometric Aggregation Operators Based on Intuitionistic Fuzzy Sets[J]. International Journal of General Systems，2006，35(4)：417–433.

[5] XU Z S，YAGER R R. Power-Geometric Operators and Their Use in Group Decision Making[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems，2010，18(1)：94–105.

[6] CHEN S M，CHANG C H. Fuzzy Multiattribute Decision Making Based on Transformation Techniques of Intuitionistic Fuzzy Values and Intuitionistic Fuzzy Geometric Averaging Operators[J]. Information Sciences，2016，352/353：133–149.

[7] JANA C，PAL M. Multi-Criteria Decision Making Process Based on some Single-Valued Neutrosophic Dombi Power Aggregation Operators[J]. Soft Computing，2021，25(7)：5055–5072.

[8] FAHMI A，AMIN F，ASLAM M，et al. T-Norms and T-Conorms Hesitant Fuzzy Einstein Aggregation Operator and Its Application to Decision Making[J]. Soft Computing，2021，25(1)：47–71.

[9] ABDULLAH S，FAHMI A，ASLAM M. Generalized Trapezoidal Cubic Linguistic Fuzzy Ordered Weighted Average Operator and Group Decision-Making[J]. Soft Computing，2020，24(5)：3155–3171.

[10] QI L Q. Eigenvalues of a Real Supersymmetric Tensor[J]. Journal of Symbolic Computation，2005，40(6)：1302–1324.

[11] LIM L H. Singular Values and Eigenvalues of Tensors: A Variational Approach[C]//1st IEEE International Workshop on Computational Advances in Multi-Sensor Adaptive Processing. Puerto Vallarta：IEEE，2005：129–132.

[12] DENG S Y，LIU J Z，WANG X F. The Properties of Fuzzy Tensor and Its Application in Multiple Attribute Group Decision Making[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems，2019，27(3)：589–597.

[13] DENG S Y，LIU J Z，TAN J T，et al. A Novel Method Based on Fuzzy Tensor Technique for Interval-Valued Intuitionistic Fuzzy Decision-Making with High-Dimension Data[J]. International Journal of Computational Intelligence Systems，2019，12(2)：580–596.

[14] 邓胜岳 . 模糊张量及其在直觉模糊信息集成理论中的应用 [D]. 湘潭：湘潭大学，2019.
DENG Shengyue. Fuzzy Tensor and Its Application in Intuitionistic Fuzzy Information Aggregation Theory[D]. Xiangtan：Xiangtan University，2019.

[15] XU Z S. An Automatic Approach to Reaching Consensus in Multiple Attribute Group Decision Making[J]. Computers & Industrial Engineering，2009，56(4)：1369–1374.

（责任编辑：邓光辉）