第 35 卷第 3 期 湖 南 工 业 大 学 学 报 Vol.35 No.3
2021 年 5 月 Journal of Hunan University of Technology May 2021

doi:10.3969/j.issn.1673-9833.2021.03.014

特殊图类的生成树数目

谢尘倩，陈平鸽

（湖南工业大学 理学院，湖南 株洲 412007）

摘 要：基于 Kirchhoff 矩阵树定理，研究一些特殊图类的生成树数目问题，结合平面图的对偶图对应的 Kirchhoff 矩阵，得到有关递推关系方程，进而得到其生成树数目的通项公式。

关键词：对偶图；生成树数目；Kirchhoff 矩阵

中图分类号：O175.5 **文献标志码**：A **文章编号**：1673-9833(2021)03-0095-04

引文格式：谢尘倩，陈平鸽 . 特殊图类的生成树数目 [J]. 湖南工业大学学报，2021，35(3)：95-98.

Total Number of Spanning Trees of Special Graphs

XIE Chenqian，CHEN Pingge

（College of Science，Hunan University of Technology，Zhuzhou Hunan 412007，China）

Abstract：Based on Kirchhoff matrix tree theorem, a research has been conducted on the number of spanning trees of some special graphs. With the Kirchhoff matrix corresponding to the dual graph of planar graph combined together, the recursive relation equation can be worked out, thus obtaining the general formula of the number of spanning trees as well.

Keywords：dual graph；number of spanning tree；Kirchhoff matrix

0 引言

在实际应用当中，只要是描述两个事物之间的关系，均能够将其抽象概括为图论中的模型。有关图的生成树数目问题，涉及多个领域且极具实践应用价值，从而是图论研究中十分活跃的课题之一。例如，在网络系统的应用中，图（网络）生成树的数目是评估图可靠性的一个重要指标。对于一个通信网络而言，其可靠性主要由生成树的个数决定。因此，在网络可靠性的研究中，人们十分关心一个图（网络）生成树的数目问题。研究图生成树的计数对网络的可靠性研究有着十分重要的现实价值。

计算一个图的生成树数目不是件容易的事情。文献 [1] 利用 Feussner 公式计算了一些特殊图类的生成树数目。文献 [2] 通过 Cayley 公式求出了 3 类特殊平面图的生成树数目，并且给出了它们的递推关系式及通项表达式。文献 [3] 通过引入收缩团，探讨了完全图的生成树数目问题，并利用归纳法得到了比 Cayley 公式更一般的公式。文献 [4] 给出了上述公式的概率求法。文献 [5] 将图的生成树数目问题归结为其块图的生成树数目问题，从而提供了一种较简便的计算图生成树数目的方法。文献 [6-9] 利用平面图的

收稿日期：2020-09-11

基金项目：湖南省教育厅科学研究基金资助项目（20C0595）

作者简介：谢尘倩（1997-），女，浙江温州人，湖南工业大学学生，主要研究方向为应用数学，E-mail：542889685@qq.com

通信作者：陈平鸽（1981-），女，湖南常德人，湖南工业大学讲师，博士，主要从事组合图论方面的教学与研究，E-mail：chenpingge@hut.edu.cn

对偶图的 Kirchhoff 矩阵，求出了一些特殊图类的生成树数目。

1 预备知识

定义 1 包含图 G 所有顶点的子图称为图 G 的生成子图，若图 G 的一个生成子图 T 恰为一棵树，则称 T 是图 G 的一棵生成树。图 G 的生成树数目用 $\tau(G)$ 表示 [10]。

定义 2 设图 G 是一个平面图的平面嵌入，则 G 的对偶图 G^* 定义为：对于平面图 G 的每个面 f 都有 G^* 的顶点 f^* 与之对应，对于 G 的每条边 e 都有 G^* 的边 e^* 与之对应，且 G^* 中顶点 f_1^* 与 f_2^* 被 e^* 连接，当且仅当 G 中的面 f_1 与 f_2 被边 e 所分隔 [10]。

定理 1（矩阵树定理） 图 G 的生成树数目等于其 Kirchhoff 矩阵 $\boldsymbol{K}(G)$ 的任何一个 $(n-1)$ 级主子式的值，即 $\tau(G)=\det\boldsymbol{K}_r(G)$。其中：$\boldsymbol{K}(G)=\boldsymbol{D}(G)-\boldsymbol{A}(G)$，$\boldsymbol{D}(G)$ 为度矩阵，$\boldsymbol{A}(G)$ 为 G 的邻接矩阵；$\boldsymbol{K}_r(G)$ 为 $\boldsymbol{K}(G)$ 的任何一个 $(n-1)$ 级主子阵 [11]。

定理 2 设平面图 G 的平面对偶图为 G^*，则 $\tau(G)=\tau(G^*)$ [11]。

2 主要结果与证明

定义 3 设 $P=u_0u_1u_2\cdots u_n$ 和 $Q=v_0v_1v_2\cdots v_n$ $(n\geqslant 1)$ 是两条长度为 n 且顶点互不相交的路，则称并图 $P\cup Q\cup\{u_iv_i\,|\,i=1,2,\cdots,n\}$ 为梯形图，记为 L_n。将 3 个两两互不相交的梯形图分别与三角形的每条边的两端点相接，得到的图称为 Y 形图，如图 1 所示，记为 Y_n。

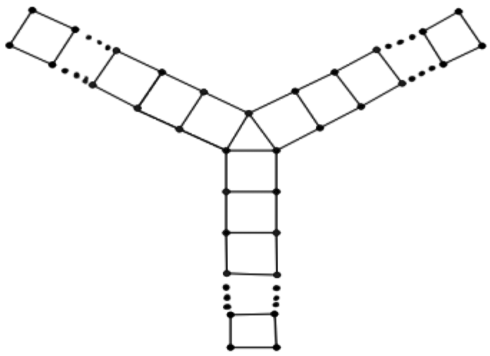

图 1 Y 形图

Fig. 1 Y-shaped graph

定义 4 设 $P=u_0u_1u_2\cdots u_nv$ 和 $Q=v_0v_1v_2\cdots v_nv$（$n\geqslant 1$）是两条终点相同，但起点以及内部顶点不交的路，则称并图 $P\cup Q\cup\{u_iv_i\,|\,i=1,2,\cdots,n\}$ 为箭形图，记为 S_n。将 4 个两两互不相交的箭形图分别与四边形每条边的两端点相接，得到的图称为十字形图，如图 2 所示，记为 T_n。

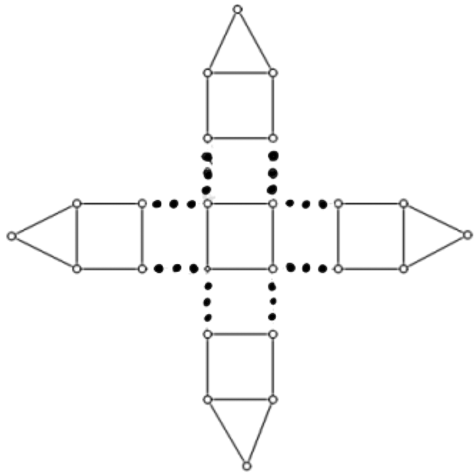

图 2 十字形图

Fig. 2 Cross graph

定理 3 对 $n\geqslant 1$，有

$$\tau\left(Y_n\right)=3y_n^2\left(y_n-y_{n-1}\right),$$

其中 $y_n=\dfrac{3+2\sqrt{3}}{6}\left(2+\sqrt{3}\right)^n+\dfrac{3-2\sqrt{3}}{6}\left(2-\sqrt{3}\right)^n$。

证明 根据图 Y_n 的特征可知，其对偶图 Y_n^* 是有 $3n+2$ 个顶点的平面图，且 Y_n^* 的 Kirchhoff 矩阵 $\boldsymbol{K}\left(Y_n^*\right)$ 为 $3n+2$ 阶矩阵。对 Y_n^* 的顶点进行适当标号，使其对应的 Kirchhoff 矩阵 $\boldsymbol{K}\left(Y_n^*\right)$ 为

$$\boldsymbol{K}\left(Y_n^*\right)=\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -3 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 & -3 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 4 & 0 & \cdots & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 4 & \cdots & 0 & -2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 & 0 \\ -3 & -3 & -3 & -2 & -2 & -2 & \cdots & 0 & 6n+3 \end{bmatrix}。$$

由定理 1 知，图 Y_n^* 的生成树数目 $\tau\left(Y_n^*\right)$ 等于 $\boldsymbol{K}\left(Y_n^*\right)$ 的 $3n+1$ 阶顺序主子式，即

$$\tau\left(Y_n^*\right)=\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 4 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 4 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 \end{vmatrix}=$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{15}{4} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{15}{4} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{15}{4} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{3(y_n - y_{n-1})}{y_n} \end{vmatrix},$$

其中 $y_n = 4y_{n-1} - y_{n-2}$，且 $y_1 = 4$，$y_2 = 15$。

递推关系式 $y_n - 4y_{n-1} + y_{n-2} = 0$ 的特征多项式及其因子分解为

$$\lambda^n - 4\lambda^{n-1} + \lambda^{n-2} = \lambda^{n-2}(\lambda^2 - 4\lambda + 1) = \lambda^{n-2}\left(\lambda - \left(2+\sqrt{3}\right)\right)\left(\lambda - \left(2-\sqrt{3}\right)\right),$$

因此

$$y_n = c_1\left(2+\sqrt{3}\right)^n + c_2\left(2-\sqrt{3}\right)^n。$$

将 $y_1 = 4$，$y_2 = 15$ 代入 y_n 得

$$\begin{cases} c_1\left(2+\sqrt{3}\right) + c_2\left(2-\sqrt{3}\right) = 4, \\ c_1\left(2+\sqrt{3}\right)^2 + c_2\left(2-\sqrt{3}\right)^2 = 15。\end{cases}$$

解得

$$c_1 = \frac{3+2\sqrt{3}}{6}，\quad c_2 = \frac{3-2\sqrt{3}}{6}，$$

因此

$$y_n = \frac{3+2\sqrt{3}}{6}\left(2+\sqrt{3}\right)^n + \frac{3-2\sqrt{3}}{6}\left(2-\sqrt{3}\right)^n。$$

再由定理 2 得

$$\tau\left(Y_n\right) = \tau\left(Y_n^*\right) = 3y_n^2\left(y_n - y_{n-1}\right)。$$

定理 4　对 $n \geqslant 1$，有

$$\tau\left(T_n\right) = \tau\left(T_n^*\right) = 4t_n^3\left(t_n - t_{n-1}\right),$$

其中 $t_n = \frac{3+\sqrt{3}}{6}\left(2+\sqrt{3}\right)^n + \frac{3-\sqrt{3}}{6}\left(2-\sqrt{3}\right)^n$。

证明　根据图 T_n 的特征可知，其对偶图 T_n^* 是有 $4n$+6 个顶点的平面图，且 T_n^* 的 Kirchhoff 矩阵 $\boldsymbol{K}\left(T_n^*\right)$为 $4n$+6 阶矩阵。对 T_n^* 的顶点进行适当标号，使其对应的 Kirchhoff 矩阵 $\boldsymbol{K}\left(T_n^*\right)$为

$$\boldsymbol{K}\left(T_n^*\right) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & \cdots & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 4 & \cdots & 0 & -2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 4 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & -2 & -2 & -2 & -2 & -2 & \cdots & 0 & 8n+8 \end{bmatrix}。$$

由定理 1 知，图 T_n^* 的生成树数目 $\tau\left(T_n^*\right)$ 等于 $\boldsymbol{K}\left(T_n^*\right)$的 $4n$+5 阶顺序主子式，即

$$\tau\left(T_n^*\right) = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 4 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 4 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{11}{3} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{11}{3} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{11}{3} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{11}{3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{4(t_n - t_{n-1})}{t_n} \end{vmatrix},$$

其中 $t_n = 4t_{n-1} - t_{n-2}$，且 $t_1 = 3$，$t_2 = 11$。

递推关系式 $t_n - 4t_{n-1} + t_{n-2} = 0$ 的特征多项式及其因子分解为

$$\lambda^n - 4\lambda^{n-1} + \lambda^{n-2} = \lambda^{n-2}(\lambda^2 - 4\lambda + 1),$$

因此$t_n = c_1\left(2+\sqrt{3}\right)^n + c_2\left(2-\sqrt{3}\right)^n$。

将 $t_1=3$，$t_2=11$ 代入 t_n 得

$$\begin{cases} c_1\left(2+\sqrt{3}\right)+c_2\left(2-\sqrt{3}\right)=3, \\ c_1\left(2+\sqrt{3}\right)^2+c_2\left(2-\sqrt{3}\right)^2=11。\end{cases}$$

解得 $c_1=\dfrac{3+\sqrt{3}}{6}$，$c_2=\dfrac{3-\sqrt{3}}{6}$，故

$$t_n=\frac{3+\sqrt{3}}{6}\left(2+\sqrt{3}\right)^n+\frac{3-\sqrt{3}}{6}\left(2-\sqrt{3}\right)^n。$$

再由定理 2 得

$$\tau\left(T_n\right)=\tau\left(T_n^*\right)=4t_n^3\left(t_n-t_{n-1}\right)。$$

3 结语

从理论上说，可以利用 Kirchhoff 矩阵树定理来确定任何图的生成树数目，但是对于一个高阶的一般图，计算其 Kirchhoff 矩阵的主子式相当困难。利用 Kirchhoff 矩阵树定理，结合平面图的对偶图对应的 Kirchhoff 矩阵，本文的定理 3 和定理 4，给出了两类具有一定对称性的平面图 Y_n 和 T_n 的生成树数目的通项公式，从而大大简化了对生成树数目的计算。

参考文献：

[1] 王维凡，才德军．若干图类的生成树数 [J]. 辽宁大学学报（自然科学版），1994，21(2)：12–19.
WANG Weifan，CAI Dejun. Number of Spanning Trees in Some Graphs[J]. Journal of Liaoning University (Natural Science Edition)，1994，21(2)：12–19.

[2] 王维凡．简单图类的生成树数(Ⅰ)[J]. 辽宁大学学报(自然科学版)，1995，22(3)：32–36.
WANG Weifan. Number of Spanning Trees for Some Simple Graph Classes(I)[J]. Journal of Liaoning University (Natural Science Edition)，1995，22(3)：32–36.

[3] 李成军．关于生成树数目的公式 [J]. 数学的实践与认识，1993，23(4)：63–66.
LI Chengjun. The Formula for the Number of Spanning Trees[J]. Mathematics in Practice and Theory，1993，23(4)：63–66.

[4] 吴黎军，王卫东．关于生成树数目公式的概率求法 [J]. 数学的实践与认识，1996，26(2)：82–83.
WU Lijun，WANG Weidong. The Method of Probabilistic Computation of Spanning Tree Numbers[J]. Mathematics in Practice and Theory，1996，26(2)：82–83.

[5] 孔庆新．关于生成树的计数问题 [J]. 青海师专学报，1990，10(2)：59–62.
KONG Qingxin. Enumeration of Spanning Trees[J]. Journal of Qinghai Junior Teachers' College，1990，10(2)：59–62.

[6] 徐幼专．几类平面图生成树数目的一种求法 [J]. 湖南科技学院学报，2006，27(5)：17–18.
XU Youzhuan. A Method for Calculating the Number of Spanning Trees of Simple Graphs[J]. Journal of Hunan University of Science and Engineering，2006，27(5)：17–18.

[7] 徐幼专，徐立新．利用对偶图求平面图的生成树数目 [J]. 邵阳学院学报（自然科学版），2006，3(3)：10–11.
XU Youzhuan，XU Lixin. Number of Spanning Trees of Planar Graphs by the Dual[J]. Journal of Shaoyang University (Sciences and Technology)，2006，3(3)：10–11.

[8] 严坤妹．几种图的生成树的数目 [J]. 福建商业高等专科学校学报，2009(5)：85–88.
YAN Kunmei. The Number of Spanning Trees in Some Graphs[J]. Journal of Fujian Commercial College，2009(5)：85–88.

[9] 赵继红，黎 颖，张 捷．一类平面图的生成树数目 [J]. 湖南文理学院学报（自然科学版），2008，20(3)：16–17，41.
ZHAO Jihong，LI Ying，ZHANG Jie. The Number of Spanning Trees of a Family of Plane Graph[J]. Journal of Hunan University of Arts and Science (Natural Science Edition)，2008，20(3)：16–17，41.

[10] BONDY J A，MURTY U S R. Graph Theory with Applications[M]. London：Macmillan Education UK，1976：34，149.

[11] 李晓明，黄振杰．图中树的数目 [M]. 哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，1993：150.
LI Xiaoming，HUANG Zhenjie. The Number of Trees in the Figure[M]. Harbin：Harbin Engineering University Press，1993：150.

（责任编辑：邓光辉）