

doi:10.3969/j.issn.1673-9833.2021.03.009

# 时变时滞广域电力系统稳定性分析

彭思源, 肖会芹, 林惠潮

(湖南工业大学 电气与信息工程学院, 湖南 株洲 412007)

**摘要:** 针对含有时变时滞的广域电力系统稳定性进行了分析。首先, 建立含有时变时滞的广域电力系统模型, 构建新型 L-K 泛函。然后, 引入一个关于时变时滞的二次函数, 再通过积分不等式得到更低保守性的时变时滞广域电力系统的稳定性判据。最后, 采用典型的二阶系统和四机十一节点系统, 在 Matlab 上进行仿真, 并将所得结果与其他文献结果进行比较分析, 证明了所提出方法的可行性和优越性。

**关键词:** 时变时滞; 电力系统; L-K 泛函; 积分不等式

**中图分类号:** TP273

**文献标志码:** A

**文章编号:** 1673-9833(2021)03-0062-06

**引文格式:** 彭思源, 肖会芹, 林惠潮. 时变时滞广域电力系统稳定性分析 [J]. 湖南工业大学学报, 2021, 35(3): 62-67.

## Stability Analysis of the Wide-Area Power System with Time-Varying Delay

PENG Siyuan, XIAO Huiqin, LIN Huichao

(College of Electrical and Information Engineering, Hunan University of Technology, Zhuzhou Hunan 412007, China)

**Abstract:** An analysis has been made of the stability of a wide-area power system with time-varying delay. First, a wide-area power system model with time-varying delay is to be established, followed by the construction of a new L-K functional. Then, by introducing a quadratic function with respect to time-varying delay, a more conservative stability criterion can be obtained through integral inequality of the wide area power system with time-varying delay. Finally, the typical second-order system and four machine eleven bus system are simulated on Matlab, with the results compared with the results of other literatures, thus verifying the feasibility and superiority of the currently proposed method.

**Keywords:** time-varying delay; power system; L-K functional; integral inequality

## 1 研究背景

在自然界中, 系统未来的发展趋势由当前状态和过去状态共同决定, 这类系统称为时滞系统<sup>[1]</sup>。随着电力系统的发展和扩大, 以及基于相量测量单元 (phasor measurement unit, PMU) 的广域量测技术

(wide area measurement system, WAMS) 的应用<sup>[2]</sup>, 导致信号传输的距离变远, 然后产生延时, 影响电力系统的稳定性。因此, 研究时滞对电力系统稳定性的影响以及获取对应的时滞上界, 有重要的现实意义。

目前, 广大国内外学者对时滞系统稳定性判据推导的研究已经取得了许多成果。积分不等式被广泛地

收稿日期: 2020-03-12

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (61703153); 湖南省研究生科研创新基金资助项目 (CX20201048)

作者简介: 彭思源 (1996-), 男, 湖南双峰人, 湖南工业大学硕士生, 主要研究方向为电力系统, 时滞系统, 神经网络等, E-mail: 1105577081@qq.com

通信作者: 肖会芹 (1977-), 女, 河北定州人, 湖南工业大学副教授, 博士, 主要从事电力系统, 时滞系统, 网络控制系统等方面的教学与研究, E-mail: xiaohq\_610@126.com

应用于时滞系统稳定性判据的推导中, 主要有 Jensen 不等式、Wirtinger 不等式等。文献 [3] 指出, 获取更大的时滞上界主要采取两种方法: 其一为构建合适的 L-K (Lyapunov-Krasovskii) 泛函, 其二为运用保守性更低的方法来处理泛函求导后产生的积分项。文献 [4] 在 Wirtinger 不等式的基础上, 提出了一种新的积分不等式, 它比以往的更为严密, 求得的时滞上界更大, 并且可以用来对含有离散分布时滞的线性系统稳定性进行研究。文献 [5] 选用单机无穷大系统为算例系统, 分析出励磁放大系数中的扰动项与系统时滞上界之间的变化关系, 并且通过引用自由权矩阵积分不等式的方法来得到更大的时滞上界。文献 [6] 讨论了含扰动的时滞电力系统稳定裕度求解方法, 提出了双层优化的追踪算法, 可用于求解含扰动的时滞电力系统的时滞上界。文献 [7] 提出了一种新的改进型积分不等式, 其中包含了 Jensen 不等式, 稳定性判据结论得到了很大的提高。文献 [8] 在考虑广域电力系统多条回路存在时滞的情况下, 建立了含有多个时滞的系统模型, 在构建 L-K 泛函时舍掉了一些冗余项, 然后加入二重积分项使系统保守性大大降低。文献 [9] 设计了一个含区间变时滞的广域电力系统控制器, 采用扩展型积分不等式和凸组合等方法来降低稳定性判据的保守性。文献 [10] 根据广域电力系统测量的一些特点, 考虑到本地信号传输时没有时滞, 而区域间的信号传输有多个时滞, 建立了含有多个时滞的电力系统模型, 并根据 Lyapunov 理论和线性矩阵不等式 (linear matrix inequality, LMI) 理论求出系统能承受的时滞上界。文献 [11] 先取得二次型积分项的极大值, 再采用“时滞分割”的思想来获取稳定性判据, 其计算效率更高, 获得的结果也更好。文献 [12] 通过 Pade 近似方法, 可以将时滞部分转换成状态空间形式, 然后建立含时滞的电力系统线性化模型, 设计了一个阻尼控制器, 能有效地减小系统时滞对阻尼控制效果的影响。文献 [13] 对时变时滞系统的稳定性问题进行了研究, 通过提出一个基于广义自由权矩阵的积分不等式, 得到了较大的时滞上界。文献 [14] 提出了一种基于改进自由权矩阵的时滞上界求取方法, 在求解导函数时加入了一些必要的松散项, 使得系统保守性降低。文献 [15-16] 研究了时变时滞电力系统的稳定性, 但在处理泛函导数产生的积分项时, 采用的方法过于保守, 导致所求的时滞上界较低。

本文通过引入一个关于时变时滞的二次函数, 以典型的二阶系统和四机十一节点系统为算例, 再构建出新的 Lyapunov 泛函, 引用文献 [4] 和文献 [7] 的积分不等式和二次型稳定性判定方法, 使得时滞电力系

统稳定性判据的保守性明显降低。最后, 通过仿真实例, 说明采用本文方法得到的稳定裕度具有更低的保守性, 证明所提方法的可行性和优越性。

标号注释:  $\mathbf{R}^{n \times m}$  表示  $n \times m$  阶矩阵空间; 上标  $-1$  为矩阵的逆,  $\mathbf{T}$  为矩阵转置;  $\mathbf{R} > \mathbf{0}$  表示矩阵  $\mathbf{R}$  对称且正定;  $\mathbf{I}$  表示合适维度的单位矩阵,  $\mathbf{0}$  表示零矩阵;  $\text{sym}\{\mathbf{X}\} = \mathbf{X} + \mathbf{X}^{\mathbf{T}}$ 。

## 2 系统建模

一般情况下, 时变时滞电力系统模型可用如下微分方程组表示:

$$\dot{\delta} = \omega_B \omega, \quad (1)$$

$$\dot{\omega} = \frac{1}{M} \{-D\omega + (P_m - P_G)\}, \quad (2)$$

$$\dot{E}' = \frac{1}{T'_{d0}} \{-E' - (x_d - x'_d)I_d + E_{fd}\}, \quad (3)$$

$$\dot{E}_{fd} = \frac{1}{T_A} \{-K_A(V_G(t-d(t)) - V_{ref}) - (E_{fd} - E_{fd0})\}, \quad (4)$$

式 (1) ~ (4) 中:  $\omega$  为发电机功角;

$\omega_B$  为发电机角速度;

$M$  为惯性时间常数;

$D$  为阻尼系数;

$P_m$  为原动机输出电磁功率;

$T'_{d0}$  为发电机定子开路时间常数;

$E'$  为电抗后电势;

$x_d$  为发电机稳态电抗;

$x'_d$  为发电机暂态电抗;

$K_A$  为励磁回路放大系数;

$T_A$  为自动调节器的时间常数;

$E_{fd}$  为线路励磁电势;

$E_{fd0}$  为励磁电势的参考值;

$V_{ref}$  为机端电压参考值;

$I_d$  为纵轴输出电流, 且

$$I_d = (E' - V_0 \cos \delta) / (x_e + x'_d), \quad (5)$$

其中,  $V_0$  为无穷大母线端电压,  $x_e$  为线路电抗,  $\delta$  为系统额定角速度;

$P_G$  为发电机输出功率, 且

$$P_G = (E' V_0 \sin \delta) / (x_e + x'_d); \quad (6)$$

$V_G$  为发电机机端电压, 且

$$V_G = \frac{\sqrt{(x'_d + x_e E' \cos \delta)^2 + (x_e E' \sin \delta)^2}}{x_e + x'_d}; \quad (7)$$

将式 (1) ~ (4) 进行线性化处理, 可以得到如下含时变时滞的系统模型:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + A_d x(t-d(t)), & t > 0; \\ x(t) = \phi(t), & t \in [-h, 0]. \end{cases} \quad (8)$$

式中:  $x(t) = [\Delta\delta \quad \Delta\omega \quad \Delta E' \quad \Delta E_{\text{fld}}]^\top$ , 为系统中的状态向量;

$d(t)$  是一个连续函数, 且满足

$$0 \leq d(t) \leq h, \quad \mu_1 \leq \dot{d}(t) \leq \mu_2;$$

$\phi(t)$  是一个初始向量函数, 且  $t \in [-h, 0]$ 。

$A$ 、 $A_d$  为系统矩阵。

引理 1 定义  $x$  在区间  $[\alpha, \beta] \rightarrow \mathbf{R}^n$  上是可导函数,

当对称矩阵  $Z (\in \mathbf{R}^{n \times n}) > 0$ ,  $N_1, N_2, N_3 \in \mathbf{R}^{4n \times n}$  时, 则有以下不等式成立<sup>[4]</sup>:

$$-\int_{\alpha}^{\beta} \dot{x}^\top(s) Z \dot{x}(s) ds \leq \mathbf{g}^\top \mathbf{\Omega} \mathbf{g}. \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \text{式中: } \mathbf{\Omega} = & \tau \left( N_1 Z^{-1} N_1^\top + \frac{1}{3} N_2 Z^{-1} N_2^\top + \frac{1}{5} N_3 Z^{-1} N_3^\top \right) + \\ & \text{sym} \{ N_1 \bar{\Pi}_1 + N_2 \bar{\Pi}_2 + N_3 \bar{\Pi}_3 \}; \end{aligned}$$

其中,  $\tau = \beta - \alpha$ ;

$$\bar{\Pi}_1 = e_1 - e_2;$$

$$\bar{\Pi}_2 = e_1 + e_2 - 2e_3;$$

$$\eta_1(t) =$$

$$\left[ x^\top(t) \quad x^\top(t-d(t)) \quad x^\top(t-h) \quad \int_{t-d(t)}^t x^\top(s) ds \quad \int_{t-h}^{t-d(t)} x^\top(s) ds \quad \frac{1}{d(t)} \int_{t-d(t)}^t \int_{t-d(t)}^s x^\top(\theta) d\theta ds \quad \frac{1}{h-d(t)} \int_{t-h}^{t-d(t)} \int_{t-h}^s x^\top(\theta) d\theta ds \right];$$

$$\eta_2(t, s) = \left[ \dot{x}(s) \quad x(s) \quad \eta_0(t) \quad \int_{t-h}^s \dot{x}(\theta) d\theta \quad \int_{t-d(t)}^s \dot{x}(\theta) d\theta \quad \int_{t-d(t)}^s x(\theta) d\theta \right];$$

$$\eta_3(t, s) = \left[ \dot{x}(s) \quad x(s) \quad \eta_0(t) \quad \int_{t-h}^s \dot{x}(\theta) d\theta \quad \int_{t-d(t)}^s \dot{x}(\theta) d\theta \quad \int_{t-h}^s x(\theta) d\theta \right];$$

$$\xi_a(t) = \left[ x(t)^\top \quad x(t-d(t))^\top \quad x(t-h)^\top \quad \dot{x}(t-d(t))^\top \quad \dot{x}(t-h)^\top \right]^\top;$$

$$\xi_b(t) = \left[ \frac{1}{d(t)} \int_{t-d(t)}^t x(s)^\top ds \quad \frac{1}{h-d(t)} \int_{t-h}^t x(s)^\top ds \right]^\top;$$

$$\xi_c(t) = \left[ \frac{1}{d(t)^2} \int_{t-d(t)}^t (t-s) x(s)^\top ds \quad \frac{1}{(h-d(t))^2} \int_{t-h}^t (t-d(t)-s) x(s)^\top ds \right]^\top;$$

$$\xi(t) = \left[ \xi_a^\top(t) \quad \xi_b^\top(t) \quad \xi_c^\top(t) \right]^\top;$$

$$e_i = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n \times (i-1)} & \mathbf{I}_n & \mathbf{0}_{n \times (9-i)} \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, 9.$$

下面给出本文定理:

定理 1 给定标量  $\mu_1 < \mu_2 < 1$ ,  $h > 0$ , 如果存在矩阵

$$P (\in \mathbf{R}^{5n \times 5n}) > 0, \quad Q_1 (\in \mathbf{R}^{8n \times 8n}) > 0, \quad Q_2 (\in \mathbf{R}^{8n \times 8n}) > 0,$$

$Z (\in \mathbf{R}^{n \times n}) > 0$ , 任意矩阵  $N_1, N_2, N_3, M_1, M_2, M_3 \in \mathbf{R}^{9n \times n}$ , 对于满足约束条件  $0 \leq d(t) \leq h$ ,  $\mu_1 \leq \dot{d}(t) \leq \mu_2$  时, 使得 LMIs(10)~LMIs(12) 有可行解, 则系统 (8) 是渐近稳定的。

$$\bar{\Pi}_3 = e_1 - e_2 - 6e_3 + 6e_4;$$

$$e_i = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n \times (i-1)} & \mathbf{I}_n & \mathbf{0}_{n \times (4-i)} \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, 4;$$

$\mathbf{g} =$

$$\left[ x^\top(\beta) \quad x^\top(\alpha) \quad \frac{1}{\tau} \int_{\alpha}^{\beta} x^\top(s) ds \quad \frac{2}{\tau^2} \int_{\alpha}^{\beta} \int_{\alpha}^s x^\top(u) du ds \right]^\top.$$

引理 2 考虑二次函数  $f(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ , 其中  $x \in [h_1, h_2]$ ,  $a_2, a_1, a_0 \in \mathbf{R}$ . 对于给定一个非负整数  $N$ , 假设  $i = 1, 2, \dots, 2^N$ , 满足以下条件<sup>[17]</sup>:

$$\text{I) } f(h_1) < 0,$$

$$\text{II) } f(h_2) < 0,$$

$$\text{III) } \frac{h_{12}}{2^{N+1}} \dot{f} \left( \frac{i-1}{2^N} h_2 + h_1 \right) + f \left( \frac{i-1}{2^N} h_2 + h_1 \right) < 0,$$

则  $f(x) < 0$ 。

注释 文献 [7] 给出的条件仅使用一条切线约束二次函数, 引理 2 与文献 [7] 的方法相比较, 使用了  $2N+1$  条切线约束二次函数, 随着  $N$  的增加, 引理 2 给出的条件保守性越低。

### 3 主要结论

本节先给出以下向量和矩阵的定义:

$$\begin{bmatrix} \Phi(0, \mu_i) & \sqrt{h} M_1 & \sqrt{h} M_2 & \sqrt{h} M_3 \\ \sqrt{h} M_1^\top & -Z & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \sqrt{h} M_2^\top & \mathbf{0} & -3Z & \mathbf{0} \\ \sqrt{h} M_3^\top & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -5Z \end{bmatrix} < 0, \quad (10)$$

$$\begin{bmatrix} \Phi(h, \mu_i) & \sqrt{h} N_1 & \sqrt{h} N_2 & \sqrt{h} N_3 \\ \sqrt{h} N_1^\top & -Z & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \sqrt{h} N_2^\top & \mathbf{0} & -3Z & \mathbf{0} \\ \sqrt{h} N_3^\top & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -5Z \end{bmatrix} < 0, \quad (11)$$

$$\begin{bmatrix} 0.5h\Psi(\mu_i) + \Phi(0, \mu_i) & \sqrt{h}M_1 & \sqrt{h}M_2 & \sqrt{h}M_3 \\ \sqrt{h}M_1^\top & -Z & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \sqrt{h}M_2^\top & \mathbf{0} & -3Z & \mathbf{0} \\ \sqrt{h}M_3^\top & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -5Z \end{bmatrix} < 0, \quad (12)$$

这里  $i=1, 2$ , 且式 (10) ~ (12) 中:

$$\begin{aligned} \Phi(d(t), \dot{d}(t)) = & \text{sym}\{\Theta_1^\top(d(t))P\Theta_2(\dot{d}(t))\} + \\ & \Pi_1^\top Q_1 \Pi_1 - \Pi_2^\top Q_2 \Pi_2 - (1-\dot{d}(t))\Pi_3^\top Q_1 \Pi_3 + \\ & (1-\dot{d}(t))\Pi_4^\top Q_2 \Pi_4 + h e_0^\top Z e_0 + \\ & \text{sym}\{\Pi_5^\top Q_1 \Pi_6 + \Pi_7^\top Q_2 \Pi_8\} + \\ & \text{sym}\{M_1 \Pi_{b1} + M_2 \Pi_{b2} + M_3 \Pi_{b3}\} + \end{aligned}$$

$$\Pi_5 = [0 \quad 0 \quad e_0^\top \quad (1-\dot{d}(t))e_4^\top \quad e_5^\top \quad -e_5^\top \quad -(1-\dot{d}(t))e_4^\top \quad (\dot{d}(t)-1)e_2^\top]^\top,$$

$$\Pi_6 = [e_1^\top \quad -e_2^\top \quad d(t)e_6^\top \quad d(t)e_1 \quad d(t)e_2^\top \quad d(t)e_3^\top \quad d(t)(e_6^\top - e_3^\top) \quad d(t)(e_6^\top - e_2^\top) \quad d(t)^2 e_8^\top]^\top,$$

$$\Pi_7 = [0 \quad 0 \quad e_0^\top \quad (1-\dot{d}(t))e_4^\top \quad e_5^\top \quad -e_5^\top \quad (\dot{d}(t)-1)e_4^\top \quad -e_3^\top]^\top,$$

$\Pi_8 =$

$$[e_2^\top - e_3^\top \quad (h-d(t))e_7^\top \quad (h-d(t))e_1 \quad (h-d(t))e_2^\top \quad (h-d(t))e_3^\top \quad (h-d(t))(e_7^\top - e_3^\top) \quad (h-d(t))(e_7^\top - e_2^\top) \quad (h-d(t))^2 e_9^\top]^\top,$$

$$\Theta_1^\top(d(t)) = [e_1^\top \quad e_2^\top \quad e_3^\top \quad d(t)e_6^\top \quad (h-d(t))e_7^\top \quad d(t)e_8^\top \quad (h-d(t))e_9^\top]^\top,$$

$\Theta_2^\top(\dot{d}(t)) =$

$$[e_0^\top \quad (1-\dot{d}(t))e_4^\top \quad e_5^\top \quad e_1 - (1-\dot{d}(t))e_2^\top \quad (1-\dot{d}(t))e_2^\top \quad -e_3^\top \quad -\dot{d}(t)e_8^\top + e_6^\top - (1-\dot{d}(t))e_2^\top \quad \dot{d}(t)e_9^\top + (1-\dot{d}(t))e_7^\top - e_3^\top]^\top,$$

$$\Pi_{01} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad e_6^\top \quad -e_7^\top \quad e_8^\top \quad -e_9^\top]^\top,$$

$$\Pi_{11} = [e_0^\top \quad e_1^\top \quad e_1^\top \quad e_2^\top \quad e_3^\top \quad e_1^\top \quad -e_3^\top \quad e_1^\top \quad -e_2^\top \quad 0]^\top,$$

$$\Pi_{12} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad e_6^\top]^\top,$$

$$\Pi_{41} = [e_4^\top \quad e_2^\top \quad e_1^\top \quad e_2^\top \quad e_3^\top \quad e_2^\top \quad -e_3^\top \quad 0 \quad h e_7^\top]^\top,$$

$$\Pi_{42} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -e_7^\top]^\top,$$

$$\Pi_{61} = [0 \quad e_6^\top \quad e_1 \quad e_2^\top \quad e_3^\top \quad e_6^\top - e_3^\top \quad e_6^\top - e_2^\top \quad 0]^\top,$$

$\Pi_{81} =$

$$[0 \quad -e_7^\top \quad -e_1^\top \quad -e_2^\top \quad -e_3^\top \quad e_3^\top - e_7^\top \quad e_2^\top - e_7^\top \quad -h e_9^\top]^\top,$$

$$\Pi_{a1} = [e_1^\top \quad -e_2^\top]^\top,$$

$$\Pi_{a2} = [e_1^\top - e_2^\top - 2e_6^\top]^\top,$$

$$\Pi_{a3} = [e_1^\top - e_2^\top - 6e_6^\top + 12e_9^\top]^\top,$$

$$\Pi_{b1} = [e_2^\top - e_3^\top]^\top,$$

$$\Pi_{b2} = [e_2^\top + e_3^\top - 2e_7^\top]^\top,$$

$$\Pi_{b3} = [e_2^\top - e_3^\top - 6e_7^\top + 12e_9^\top]^\top,$$

$$e_0 = A e_1 + A_d e_2.$$

证明 构建如下 Lyapunov-Krasovskii 泛函:

$$N_1 \Pi_{a1} + N_2 \Pi_{a2} + N_3 \Pi_{a3};$$

$$\Psi(\dot{d}(t)) = \text{sym}\{\Pi_{01}^\top P \Theta_2(\dot{d}(t)) + \Pi_{11}^\top Q_1 \Pi_{12}\} +$$

$$(1-\dot{d}(t))\text{sym}\{\Pi_{41}^\top Q_2 \Pi_{42}\} +$$

$$\text{sym}\{\Pi_5^\top Q_1 \Pi_{61} + \Pi_7^\top Q_2 \Pi_{81}\};$$

其中:

$$\Pi_1 = [e_0^\top \quad e_1^\top \quad e_1^\top \quad e_2^\top \quad e_3^\top \quad e_1^\top - e_3^\top \quad e_1^\top - e_2^\top \quad d(t)e_6^\top]^\top,$$

$$\Pi_2 = [e_5^\top \quad e_3^\top \quad e_1^\top \quad e_2^\top \quad e_3^\top \quad \mathbf{0} \quad e_3^\top - e_2^\top \quad \mathbf{0}]^\top,$$

$$\Pi_3 = [e_4^\top \quad e_2^\top \quad e_1^\top \quad e_2^\top \quad e_3^\top \quad e_2^\top - e_3^\top \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0}]^\top,$$

$$\Pi_4 = [e_4^\top \quad e_2^\top \quad e_1^\top \quad e_2^\top \quad e_3^\top \quad e_2^\top - e_3^\top \quad 0 \quad (h-d(t))e_7^\top]^\top,$$

$$\begin{aligned} V(t) = & \eta_1^\top(t) P \eta_1(t) + \int_{t-d(t)}^t \eta_2^\top(t, s) Q_1 \eta_2(t, s) ds + \\ & \int_{t-h}^{t-d(t)} \eta_3^\top(t, s) Q_2 \eta_3(t, s) ds + \int_{-h}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{x}^\top(s) Z \dot{x}(s) ds d\theta. \end{aligned} \quad (13)$$

对式 (13) 求导, 可得:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) = & 2\eta_1^\top(t) P \dot{\eta}_1(t) + \eta_2^\top(t, t) Q_1 \eta_2(t, t) - \\ & \eta_3^\top(t, t-h) Q_2 \eta_3(t, t-h) - \\ & (1-\dot{d}(t))\eta_2^\top(t, t-d(t)) Q_1 \eta_2(t, t-d(t)) + \\ & (1-\dot{d}(t))\eta_3^\top(t, t-d(t)) Q_2 \eta_3(t, t-d(t)) + \\ & \int_{t-d(t)}^t 2\eta_2^\top(t, s) Q_1 \frac{\partial \eta_2(t, s)}{\partial t} ds + h \dot{x}^\top(t) Z \dot{x}(t) + \\ & \int_{t-h}^{t-d(t)} 2\eta_3^\top(t, s) Q_2 \frac{\partial \eta_3(t, s)}{\partial t} ds - \int_{t-h}^t \dot{x}^\top(t) Z \dot{x}(t) ds = \\ & \xi^\top(t) \Gamma_0(d(t), \dot{d}(t)) \xi(t) - \int_{t-h}^t \dot{x}^\top(t) Z \dot{x}(t) ds. \end{aligned} \quad (14)$$

式 (14) 中:

$$\begin{aligned} \Gamma_0(d(t), \dot{d}(t)) = & \text{sym}\{\Theta_1^\top(d(t))P\Theta_2(\dot{d}(t))\} + \Pi_1^\top Q_1 \Pi_1 - \\ & \Pi_2^\top Q_2 \Pi_2 - (1-\dot{d}(t))\Pi_3^\top Q_1 \Pi_3 + (1-\dot{d}(t))\Pi_4^\top Q_2 \Pi_4 + \\ & h e_0^\top Z e_0 + \text{sym}\{\Pi_5^\top Q_1 \Pi_6 + \Pi_7^\top Q_2 \Pi_8\}. \end{aligned}$$

然后把式(14)中  $[t-h, t]$  分为  $[t-h, t-d(t)]$  和  $[t-d(t), t]$  两个区间, 再对两个区间分别运用引理 1 可得:

$$-\int_{t-h}^t \dot{x}^T(t) Z \dot{x}(t) ds = -\int_{t-d(t)}^t \dot{x}^T(t) Z \dot{x}(t) ds - \int_{t-h}^{t-d(t)} \dot{x}^T(t) Z \dot{x}(t) ds \leq -\xi^T(t) \Gamma_1(d(t)) \xi(t). \quad (15)$$

式(15)中:

$$\Gamma_1(d(t)) = \text{sym}\{M_1 \Pi_{b1} + M_2 \Pi_{b2} + M_3 \Pi_{b3} + N_1 \Pi_{a1} + N_2 \Pi_{a2} + N_3 \Pi_{a3}\} + d(t) \left( N_1 Z^{-1} N_1^T + \frac{1}{3} N_2 Z^{-1} N_2^T + \frac{1}{5} N_3 Z^{-1} N_3^T \right) + (h-d(t)) \left( M_1 Z^{-1} M_1^T + \frac{1}{3} M_2 Z^{-1} M_2^T + \frac{1}{5} M_3 Z^{-1} M_3^T \right).$$

结合式(14)和(15)可得:

$$\dot{V}(t) \leq \xi^T(t) \left( \Gamma_0(d(t), \dot{d}(t)) - \Gamma_1(d(t)) \right) \xi(t).$$

应用引理 2, 当  $N=0$  时, 结合 Schur 补定理, 得到式(10)~(12)。如果存在矩阵  $P(\in \mathbf{R}^{5n \times 5n}) > 0$ ,  $Q_1(\in \mathbf{R}^{8n \times 8n}) > 0$ ,  $Q_2(\in \mathbf{R}^{8n \times 8n}) > 0$ ,  $Z(\in \mathbf{R}^{n \times n}) > 0$ , 任意矩阵  $N_1, N_2, N_3, M_1, M_2, M_3 \in \mathbf{R}^{9n \times n}$ , 当满足约束条件  $0 \leq d(t) \leq h, \mu_1 \leq \dot{d}(t) \leq \mu_2$ , 且式(10)~(12)成立时, 则  $\dot{V}(t) < 0$ 。再根据李雅普诺夫稳定性理论, 得到系统(8)为渐近稳定的, 证毕。

## 4 算例分析

### 4.1 典型二阶系统

本节采用典型的二阶时滞系统进行仿真分析, 并将仿真结果与文献[7]、[13]和[15]中的结果进行比较, 取  $\mu = \mu_2 = -\mu_1$  时, 得到在不同  $\mu$  值下时滞上界的大小, 如表 1 所示。

表 1 不同  $\mu$  值时求得的时滞上界

Table 1 Upper bound of time delay for different values  $\mu$

方法	$\mu$ 值			
	0.1	0.2	0.5	0.8
文献 [7]	4.753	2.429	2.183	2.182
文献 [13]	4.921	4.218	3.221	2.792
文献 [15]	4.724	3.870	2.670	2.560
定理 1	4.948	4.277	3.321	2.890

分析表 1 中的数据可知, 根据定理 1 得到的不同  $\mu$  值下的时滞上界比相关文献得出的数据大, 即定理 1 可以得到更大的时滞上界, 说明相比已有研究, 本文给出的方法获得的结果具有一定的优越性。

其中:  $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -0.9 \end{bmatrix}, A_d = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$

### 4.2 四机十一节点系统

本节采用四机十一节点系统进行仿真分析, 并将

仿真结果与文献[14]~[16]的结果进行比较, 系统模型如图 1 所示。

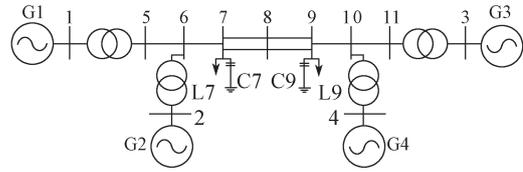


图 1 四机十一节点系统示意图

Fig. 1 Four-generator eleven-bus power system

接下来采用文献[15]中降维后的状态矩阵  $A$ 、时滞矩阵  $A_d$  进行仿真分析获得结果,  $A$ 、 $A_d$  描述如下:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 376.9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 376.9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 376.9 \\ -0.073 & 0.065 & 0.004 & -0.730 & 0.272 & 0.076 \\ 0.058 & -0.065 & 0.009 & 1.160 & -0.343 & -0.134 \\ 0.008 & 0.011 & -0.082 & -0.020 & 0.047 & -0.554 \end{bmatrix},$$

$$A_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.234 & -0.839 & 0.010 \\ 0 & -0.001 & 0.001 & -0.348 & -1.362 & -0.138 \\ 0 & 0.001 & 0 & 0.049 & -0.290 & -0.638 \end{bmatrix}.$$

根据定理 1, 当  $\mu=0$  时, 得到如表 2 所示结果, 从表中数据可以得知, 本文方法所得时滞上界相比其他文献的时滞上界更大、保守性更小, 进一步说明了本文方法的可行性和优越性。

表 2 不同方法获得的四机十一节点系统的时滞上界

Table 2 Upper bound of time delay obtained by this method with other literature methods

方法	文献 [14]	文献 [15]	文献 [16]	定理 1
时滞上界 /s	0.288	0.440	0.328	0.448

## 5 结语

本研究以典型的二阶系统和四机十一节点系统为算例, 研究了含时变时滞的电力系统稳定性判据。首先, 建立含有时变时滞的广域电力系统模型, 构建出新型 L-K 泛函; 然后, 通过引入一个关于时变时滞的二次函数和积分不等式, 得到一种保守性更小的稳定性判据; 最后, 通过仿真分析, 并与已有文献方法比较, 得知本文给出的方法能够获得更大的时滞上界, 说明了本文方法的可行性和优越性。

## 参考文献:

- [1] WU L G, SU X J, SHI P, et al. A New Approach to Stability Analysis and Stabilization of Discrete-Time T-S Fuzzy Time-Varying Delay Systems[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics Part B, 2011, 41(1): 273-286.
- [2] 李婷, 吴敏, 何勇. 计及广域测量系统时滞影响的灵活交流输电系统阻尼控制器多目标设计[J]. 电工技术学报, 2014, 29(8): 227-234.  
LI Ting, WU Min, HE Yong. Multi-Objective Design of FACTS Damping Controller Based on WAMS with Signal Transmission Delay[J]. Transactions of China Electrotechnical Society, 2014, 29(8): 227-234.
- [3] ZENG H B, HE Y, WU M, et al. Free-Matrix-Based Integral Inequality for Stability Analysis of Systems with Time-Varying Delay[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2015, 60(10): 2768-2772.
- [4] ZENG H B, HE Y, WU M M, et al. New Results on Stability Analysis for Systems with Discrete Distributed Delay[J]. Automatica, 2015, 60(10): 189-192.
- [5] 刘晓桂, 王炜, 曾红兵, 等. 不确定时滞电力系统鲁棒稳定性分析[J]. 湖南工业大学学报, 2018, 32(4): 40-44.  
LIU Xiaogui, WANG Wei, ZENG Hongbing, et al. Robust Stability Analysis of the Uncertain Time-Delay Power System[J]. Journal of Hunan University of Technology, 2018, 32(4): 40-44.
- [6] 贾宏杰, 谢星星, 余晓丹. 考虑时滞影响的电力系统小扰动稳定域[J]. 电力系统自动化, 2006, 30(21): 1-5.  
JIA Hongjie, XIE Xingxing, YU Xiaodan. Power System Small Signal Stability Region with Time Delay Considered[J]. Automation of Electric Power Systems, 2006, 30(21): 1-5.
- [7] KIM J H. Further Improvement of Jensen Inequality and Application to Stability of Time-Delayed Systems[J]. Automatica, 2016, 64(2): 121-125.
- [8] 李啸懿, 王夏明. 基于积分不等式多时滞电力系统的改进稳定判据[J]. 电力系统自动化, 2020, 44(1): 59-66.  
LI Xiaocong, WANG Xiaming. Integral Inequality Based Improved Stability Criterion for Power System with Multiple Time Delays[J]. Automation of Electric Power Systems, 2020, 44(1): 59-66.
- [9] 钱伟, 王晨晨, 费树岷. 区间变时滞广域电力系统稳定性分析与控制器设计[J]. 电工技术学报, 2019, 34(17): 3640-3650.  
QIAN Wei, WANG Chenchen, FEI Shumin. Stability Analysis and Controller Design of Wide-Area Power System with Interval Time-Varying Delay[J]. Transactions of China Electrotechnical Society, 2019, 34(17): 3640-3650.
- [10] 古丽扎提·海拉提, 王杰. 多时滞广域测量电力系统稳定分析与协调控制器设计[J]. 电工技术学报, 2014, 29(2): 279-289.  
GULIZHATI Hailati, WANG Jie. Multiple Time Delays Analysis and Coordinated Stability Control for Power System Wide Area Measurement[J]. Transactions of China Electrotechnical Society, 2014, 29(2): 279-289.
- [11] 李晓萌, 贾宏杰. 电力系统改进时滞依赖型鲁棒稳定判据[J]. 电力系统及其自动化学报, 2018, 30(4): 114-120.  
LI Xiaomeng, JIA Hongjie. Improved Time-Delay-Dependent Robust Stability Criteria for Power System[J]. Proceedings of the CSU-EPSA, 2018, 30(4): 114-120.
- [12] 聂永辉, 张艺川, 马彦超, 等. 计及时滞影响的电力系统  $H_\infty$  阻尼控制[J]. 电力自动化设备, 2018, 38(10): 96-100.  
NIE Yonghui, ZHANG Yichuan, MA Yanchao, et al.  $H_\infty$  Damping Control of Power System with Time Delay Effects[J]. Electric Power Automation Equipment, 2018, 38(10): 96-100.
- [13] ZENG H B, LIU X G, WANG W. A Generalized Free-Matrix-Based Integral Inequality for Stability Analysis of Time-Varying Delay Systems[J]. Applied Mathematics and Computation, 2019, 354: 1-8.
- [14] 马静, 李俊臣, 李益楠, 等. 基于改进自由权矩阵与广义特征值的时滞稳定上限计算方法研究[J]. 电力系统保护与控制, 2014, 42(18): 1-8.  
MA Jing, LI Junchen, LI Yinan, et al. Research on Time-Delay Upper-Bound of Power System Wide-Area Damping Controllers Based on Improved Free-Weighting Matrices and Generalized Eigenvalue Problem[J]. Power System Protection and Control, 2014, 42(18): 1-8.
- [15] 钱伟, 蒋鹏冲, 车凯. 基于 Wirtinger 不等式的时变时滞电力系统稳定性分析[J]. 电力系统保护与控制, 2016, 44(23): 79-85.  
QIAN Wei, JIANG Pengchong, CHE Kai. Stability Analysis for Power System with Time-Delay Based on Wirtinger Inequality[J]. Power System Protection and Control, 2016, 44(23): 79-85.
- [16] CHAIBI N, TISSIR E H. Delay Dependent Robust Stability of Singular Systems with Time-Varying Delay[J]. International Journal of Control, Automation and Systems, 2012, 10(3): 632-638.
- [17] ZENG H B, LIN H C, HE Y, et al. Hierarchical Stability Conditions for Time-Varying Delay Systems via an Extended Reciprocally Convex Quadratic Inequality[J]. Journal of the Franklin Institute, 2020, 357(4): 9930-9941.

(责任编辑: 廖友媛)