

doi:10.3969/j.issn.1673-9833.2021.02.006

# 基于分离-重构技术的6R机器人逆解新方法

于权伟, 李光, 肖帆, 杨加超, 谢楚政

(湖南工业大学 机械工程学院, 湖南 株洲 412007)

**摘要:** 提出一种利用分离-重构技术求6R机器人逆解的新方法。首先利用螺旋理论对机器人进行正向运动学建模, 然后利用指数积公式的变换, 证明了 $n$ 自由度机器人的可分离性, 以及重构连接的通用几何约束; 最后以PUMA-560机器人为例, 给出其分离及重新连接的几何约束条件。在满足约束条件的前提下, 推导出各个关节角求解公式, 最终求得机器人逆运动学解, 且实际位姿与目标位姿误差数量级为 $10^{-13}$ 。所提出的新算法与D-H坐标法相比, 计算速度提高了12%, 且可避免奇异点的影响。

**关键词:** 螺旋理论; 分离-重构; 逆运动学; PUMA-560机器人

**中图分类号:** TP242.2

**文献标志码:** A

**文章编号:** 1673-9833(2021)02-0038-08

**引文格式:** 于权伟, 李光, 肖帆, 等. 基于分离-重构技术的6R机器人逆解新方法[J]. 湖南工业大学学报, 2021, 35(2): 38-45.

## A New Method of Inverse Kinematics of 6R Robots Based on Separation-Reconstruction Technique

YU Quanwei, LI Guang, XIAO Fan, YANG Jiachao, XIE Chuzheng

(College of Mechanical Engineering, Hunan University of Technology, Zhuzhou Hunan 412007, China)

**Abstract:** A new method has been proposed for the solution of the inverse kinematics of 6R robots. Firstly, the forward kinematics model of robots is established by adopting the screw theory, and then by using the transformation of the exponential product formula, the separability of the  $n$ -degree-of-freedom robots and the general geometric constraints of the reconfigurable connection thus can be verified. Taking PUMA-560 robots as an example, the geometric constraints for its separation and reconnection are given. On the premise of satisfying the constraint conditions, the solution formula of each joint angle can be derived, thus consequently obtaining the inverse kinematics solution of the robots, with the error of calculating pose restricted within  $10^{-13}$  degree of magnitude. Compared with the D-H coordinate method, the speed of the proposed algorithm is increased by 12%, thus avoiding the influence of singular points.

**Keywords:** screw theory; separation and recombination; inverse kinematics; PUMA-560 robot

收稿日期: 2020-05-11

基金项目: 湖南省自然科学基金资助项目(2018JJ4079)

作者简介: 于权伟(1995-), 男, 陕西渭南人, 湖南工业大学硕士生, 主要研究方向为机器人的智能控制,  
E-mail: 907741033@qq.com

通信作者: 李光(1963-), 男, 湖北孝感人, 湖南工业大学教授, 博士, 硕士生导师, 主要从事机器人智能控制方面的教学与研究, E-mail: liguang@hut.edu.cn

## 1 研究背景

机器人运动学包括正运动学和逆运动学。正运动学是通过在工作空间内选择一组关节角来获得机器人末端执行器的姿态, 对应于一个唯一解。逆运动学是给定目标位姿求解对应的关节角, 其解有多个。

目前, 运动学建模主要采用D-H坐标法<sup>[1]</sup>和螺旋法<sup>[2]</sup>。D-H坐标法虽然应用更广泛, 但也存在一些不足之处, 主要体现在用于标定D-H模型的运动学参数不连续, 当机器人相邻关节轴平行或接近平行时, 会产生奇异性; 而且D-H坐标法需要为每个连杆建立局部坐标系, 导致坐标系不灵活。而螺旋理论是应用李群知识和旋量理论提出的一种依据旋量指数积公式的运动学模型, 从而推导出机器人运动方程的完整几何表示, 简化机器人机构的分析, 并提供串联机器人的机构参数化表示方法; 利用螺旋理论建立机器人正向运动学模型, 仅需要建立基础坐标系和工具坐标系, 便能从整体上描述机器人的运动。

逆运动学是已知末端执行器的位姿, 求解相应关节变量的过程<sup>[3]</sup>。逆运动学求解的实质是完成机器人工作空间到关节空间的映射。逆运动学方程组具有高维、非线性的特点, 求解复杂且不易求出。在逆运动学中, 多采用解析法、几何法、代数法和矩阵理论相结合<sup>[4]</sup>来求解6R机器人的逆运动学问题, 从而进一步求得逆运动学解。

文献[5]中采用的封闭解法, 在通用性上不如数值法, 但其函数构造简便、计算方便快捷。其对满足pieper准则的机器人具有通用性, 利用矩阵求逆的方法生成12组非线性方程, 并利用代数法求解该方程, 获得机器人各关节角度变量的8组解。文献[6]中利用齐次坐标变换矩阵推导出逆运动学问题的解析解, 其方法在计算逆向运动学的过程中需要进行多次矩阵变换, 导致求逆解速率较低。文献[7]中采用几何、代数方法和子问题进行逆运动学求解, 在Matlab中利用代数消元法求解关节4和5中的奇异点; 当 $\theta_5=90^\circ$ 时, 导致 $\theta_4$ 无法进行求解。文献[8]中针对后3个关节轴线相交于一点的6R工业机器人, 采用臂腕分离的方法求其逆解, 即将其分为两个3R部分, 虽然该方法可以避免矩阵求逆的运算, 但在求逆解中: 若末端位置的 $x$ 、 $y$ 都为0, 则 $\theta_1$ 的变化不影响腕点的位置; 若连杆坐标系原点连线 $O_2O_3$ 与 $O_3O_4$ 共线, 则 $\theta_2$ 的两个解相等; 若 $\theta_5$ 为零, 则关节4和6的转轴共线, 导致 $\theta_4$ 和 $\theta_6$ 无法进行求解。文献[9]中将PUMA-560机器人逆运动学求解分为位置求解和姿态求解两个过程, 首先使用D-H坐标法进行位

置求解得到关节角 $\theta_1$ 、 $\theta_2$ 和 $\theta_3$ , 然后使用单位四元数的方法求解出 $\theta_4\sim\theta_6$ , 但求逆解过程中表达式繁琐, 导致运算速率较低。文献[10]中将机器人末端执行器位姿 ${}^0T_h$ 逆解问题转化为末端腕部点位姿 ${}^0T_6$ 的逆解问题, 排除 ${}^0T_h$ 中含常量 $d_6$ 的多项式, 简化求运动学逆解复杂度。通过反变换法求6R机器人逆解, 但求解关节4中存在奇异点; 当 $s_5=0$ 时, 导致 $\theta_4$ 无法进行求解。

针对上述问题, 在文献[5-10]的基础下, 本文提出一种利用分离-重构技术求后3个连续关节轴线相交于一点的6R机器人逆解新方法。首先, 采用螺旋理论的POE(exponential of product)法对PUMA-560机器人进行正向运动学建模, 为后续求逆向运动学解提供必要准备; 然后通过公式变形, 推导出机器人可分离的结论, 并详细介绍分离点的选取与重连的几何约束条件; 其次, 证明了以子机器人重新结合为一个完整机器人的几何约束条件, 推导出关节角的求解公式, 并对每个关节角进行求解; 最后, 以仿真实验结果证明了本文所提方法的有效性。

## 2 机器人结构分离

在研究机器人运动学中, 主要采用D-H坐标法建立正向运动学模型, 然后通过矩阵逆乘推导出求逆解的方程。事实上, 这其中已体现将机器人结构分离的思想, 但由于D-H坐标法不具备直观的几何意义, 从而导致该思想没被提炼出来。虽然文献[11]已经提出将6R机器人分离为两个3R子机器人的方法, 但并未从理论上对其进行推广。腕部关节结构简图如图1所示。

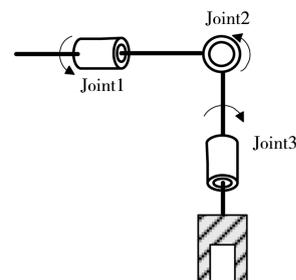


图1 腕部关节结构简图

Fig. 1 Schematic diagram of wrist joints

从图1可以看出, 6R机器人腕部关节结构中, 后3个关节为轴线交于一点。本文使用几何意义更明确的螺旋理论, 首先证明 $n$ 自由度机器人的可分离性, 再详细证明如何分离最后3个关节为轴线交于一点的6R机器人。

### 2.1 旋量和刚体运动

根据旋量理论, 刚体空间运动可描述为由绕某一

轴的旋转和平移复合而成。设  $\omega = [\omega_x, \omega_y, \omega_z]^T$  表示刚体旋转轴的方向,  $r$  为轴上的一点, 则刚体运动旋量可用  $\xi = [\omega, v]^T$  表示, 其中  $v = q \times \omega$ ,  $\xi$  同样可以被称为刚体的螺旋轴, 则  $\omega$  的反对称矩阵为

$$[\omega] = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \circ \quad (1)$$

以反对称矩阵为推广, 可将运动旋量  $\xi$  的矩阵形式记为

$$[\xi] = \begin{bmatrix} [\omega] & v \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix} \circ \quad (2)$$

刚体运动指数坐标如下: 设  $\omega (\omega \in \mathbf{R}^3)$  表示旋转轴方向的单位矢量,  $\theta (\theta \in \mathbf{R})$  为转角。对于刚体每一个旋转运动, 都有一个旋转矩阵  $R (R \in \mathbf{SO}(3))$  与之对应, 具体关系由 Rodrigues 公式<sup>[12]</sup> 给出:

$$e^{\theta[\omega]} = I + [\omega] \sin \theta + [\omega]^2 (1 - \cos \theta) \circ$$

式中  $\|\omega\|=1$ 。

所以一般刚体运动指数坐标可表示为

$$e^{\theta[\xi]} = \begin{bmatrix} e^{\theta[\omega]} (I - e^{-\theta[\omega]}) (\omega \times v) + \theta \omega \omega^T v \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \circ \quad (3)$$

## 2.2 串联机器人正向运动学的指数积公式

各关节运动由相关联关节轴线的运动旋量产生, 如果用  $\xi$  表示该关节轴线的单位运动旋量坐标, 则沿此轴线的刚体运动可表示为

$$g(\theta) = e^{\theta \xi} g(0) \circ \quad (4)$$

定义机器人的初始位形为机器人当  $\theta=0$  时的位形, 并用  ${}^S g(0)$  表示机器人位于初始位形时的惯性坐标系与工具坐标系间的刚体变换。对于每个关节都可构造一个单位运动旋量, 这时除第  $i$  个关节的其他关节均固定于初始位形 ( $\theta_j=0$ ), 结合公式, 可得到机器人正向运动学的指数积公式, 为

$$e^{\theta_1[\xi_1]} e^{\theta_2[\xi_2]} e^{\theta_3[\xi_3]} \dots e^{\theta_n[\xi_n]} {}^S g(0) = {}^S g(\theta) \circ \quad (5)$$

## 2.3 $n$ 自由度机器人可分离证明

式 (5) 可变形为

$$Q_L = {}^S g(\theta) {}^S g^{-1}(0) Q_R \circ \quad (6)$$

式中:  $Q_L = e^{\theta_1[\xi_1]} \dots e^{\theta_i[\xi_i]} g_{i+1}(0)$ ;

$$Q_R = e^{(-\theta_n)[\xi_n]} \dots e^{(-\theta_{i+1})[\xi_{i+1}]} g_{i+1}(0) \circ$$

$Q_L$  表示前  $i$  个关节的正向运动学,  $Q_R$  表示后  $n-i$  个关节的正向运动学。式中  $g_i(0)$  是一个可逆的位姿矩阵, 其原点位于第  $i+1$  个关节轴轴线的原点, 姿态

与惯性坐标系一致, 其中, 第  $i+1$  个关节轴线的原点, 定义为关节  $i$  与关节  $i+1$  两轴轴线的公垂线与关节  $i+1$  轴线的交点。下文中所说原点均以此定义。图 2 为子机器人 R 基座坐标系未变换的情况。

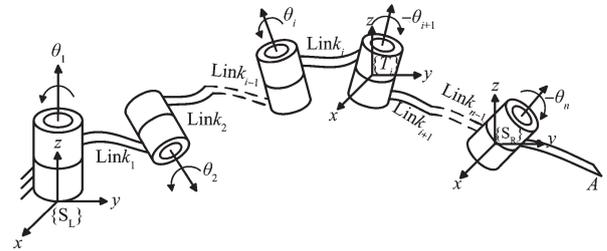


图 2 子机器人 R 基座坐标系未变换的情况

Fig. 2 R-based coordinate system of sub-robots without transformation

从图 2 可以看出,  $Q_L$  表示一个  $i$  自由度机器人正向运动学, 其基座坐标系与原  $n$  自由度机器人的惯性坐标系  $\{S_L\}$  重合, 其工具坐标系  $\{T_i\}$  则为  $g_i(0)$ 。  $Q_R$  则表示一个  $(n-i)$  自由度机器人正向运动学, 其基座坐标系  $\{S_R\}$  位于关节  $n$  的原点, 姿态与  $\{S_L\}$  一致, 其工具坐标系也为  $\{T_i\}$ , 该机器人各关节的旋转方向为负方向。式 (5) 右端整体可理解为  $Q_R$  所表示机器人的基座坐标系作  ${}^S g(\theta) {}^S g^{-1}(0)$  变换后所得结果, 如图 3 所示。

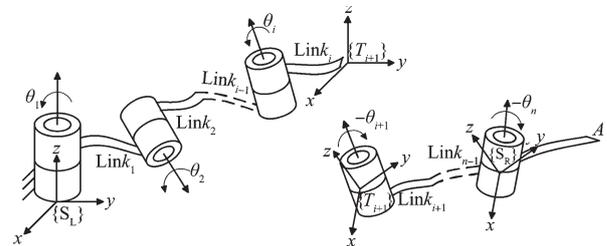


图 3 子机器人变换后的情况

Fig. 3 Sub-robots under the transformation

综上所述,  $n$  自由度机器人可分离为两个低自由度的子机器人, 上述理论同样适用含移动副的机器人。

即对  $n$  自由度机器人逆运动学求解, 可理解为寻找使得两个子机器人重新结合为  $n$  自由度机器人的关节组合, 可以重新结合的几何约束条件为两子机器人的工具坐标系位姿重合。该约束条件也是机器人分离的通用准则, 尤其适用于分离点处的相邻关节轴轴线为共线、平行或垂直关系的机器人。

## 3 6R 机器人的结构分离

本节将以 PUMA-560 为例, 介绍 6R 机器人的具体分离方法, 为后面章节的逆运动学求解奠定基础。为方便描述, 下文将关节 1 至分离点组成的部分记为子机器人 L, 将分离点至关节 6 组成的部分记为子机

器人R。

### 3.1 正向运动学

图4描述了PUMA-560机器人在初始时各关节的螺旋轴。

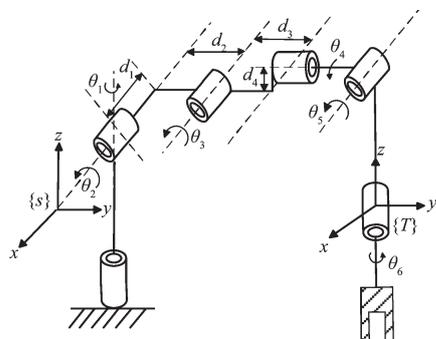


图4 PUMA-560机器人的结构简图

Fig. 4 Structure schematic diagram of PUMA-560 robots

选择  $\{S\}$  作为惯性坐标系,  $\{T\}$  作为工具坐标系,  $\{T\}$  的原点与关节6的原点重合。则机器人的初始位形为

$${}^S_T g(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -d_1 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 + d_3 \\ 0 & 0 & 1 & d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

各关节螺旋轴如表1所示。

表1 PUMA-560机器人的各关节螺旋轴

Table 1 Spiral axes of each joint of PUMA-560 robots

$i$	$\omega_i$	$r_i$	$i$	$\omega_i$	$r_i$
1	0	0	4	0	$-d_1$
	0	0		1	$d_2 + d_3$
	1	0		0	$d_4$
2	1	0	5	1	$-d_1$
	0	0		0	$d_2 + d_3$
	0	0		0	$d_4$
3	1	0	6	0	$-d_1$
	0	$d_2$		0	$d_2 + d_3$
	0	0		1	$d_4$

PUMA-560机器人的正向运动学公式为:

$$e^{\theta_1[\xi_1]} e^{\theta_2[\xi_2]} e^{\theta_3[\xi_3]} \dots e^{\theta_n[\xi_n]} {}^S_T g(0) = {}^S_T g(\theta) \quad (8)$$

### 3.2 结构分离

已有文献多采用臂腕分离法<sup>[13]</sup>求6R机器人的逆运动学解, 即分为两个3R部分, 但在求逆解中  $\theta_5$  不能为0, 否则会使关节4和6转轴共线, 导致  $\theta_4$  和  $\theta_6$  无法进行求解。为避免奇异点, 本文分离点选取关节4的原点, 将其分为4R子机器人L和2R子机器人R。

由图3可知, 机器人关节1至关节4组成部分与

3R仿人臂结构类似, 该类型机器人逆运动学已有完备的解法<sup>[14]</sup>。

由于此分离点相邻关节不满足图1所示, 因此子机器人末端工具坐标系需重新设定。图5中原6自由度机器人的工具坐标系变为子机器人R的基座坐标系, 关节5与关节6轴线的单位向量不变, 但旋转变为负方向, 此时子机器人R的基座坐标系还未变换。

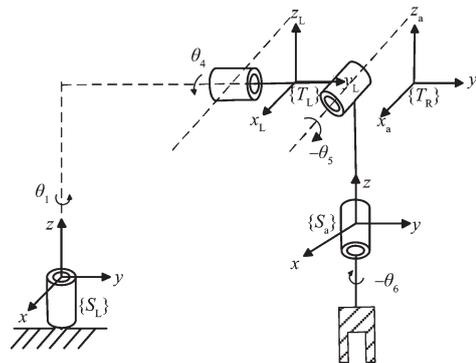


图5 工具坐标系间的几何关系

Fig. 5 Geometric relations among tool coordinate systems

$\{T_L\}$  与  $\{T_R\}$  分别表示两个子机器人的工具坐标系, 二者的原点事实上是重合的, 为便于观察, 将  $\{T_L\}$  向右进行平移。图中  $y_L$  和  $y_R$  与关节4轴线重合, 其方向不受  $\theta_4$  影响,  $x_L$  和  $x_R$  与关节5轴线重合, 其方向不受  $\theta_5$  影响; 并且  $x_L$  与  $y_R$  共面且垂直,  $z_R$  与  $z_L$  重合。  $\{T_R\}$  和  $\{T_L\}$  两个子机器人的工具坐标系重合, 即  $T_R = T_L$ 。故两个子机器人正向运动学可表示如下:

$$G(\theta)_L = e^{\theta_1[\xi_1]} e^{\theta_2[\xi_2]} e^{\theta_3[\xi_3]} e^{\theta_4[\xi_4]} T_L \quad (9)$$

$$G(\theta)_R = {}^S_T g(\theta) {}^S_T g^{-1}(0) e^{(-\theta_6)[\xi_6]} e^{(-\theta_5)[\xi_5]} T_R \quad (10)$$

式(9)~(10)中:

$$T_L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -d_1 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 + d_3 \\ 0 & 0 & 1 & d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$T_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -d_1 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 + d_3 \\ 0 & 0 & 1 & d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$${}^S_T g(\theta) = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & p_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & p_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 & p_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ 为原机器人的目标}$$

位姿。

将表1中螺旋轴参数代入式(1)(2)(3)(9)(10), 可得:

$$\mathbf{G}(\theta)_L = \begin{bmatrix} x_{L1} & y_{L1} & z_{L1} & p_{L1} \\ x_{L2} & y_{L2} & z_{L2} & p_{L2} \\ x_{L3} & y_{L3} & z_{L3} & p_{L3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (11)$$

$$\mathbf{G}(\theta)_R = \begin{bmatrix} x_{R1} & y_{R1} & z_{R1} & p_{R1} \\ x_{R2} & y_{R2} & z_{R2} & p_{R2} \\ x_{R3} & y_{R3} & z_{R3} & p_{R3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (12)$$

此时,两个子机器人可重新结合为后三关节轴线交于一点的6R机器人的几何约束条件,变为 $\{T_L\}$ 与 $\{T_R\}$ 重合, $x_L$ 与 $y_R$ 垂直, $z_R = z_L$ 。

## 4 求逆运动学解

### 4.1 $\theta_1$ 、 $\theta_2$ 、 $\theta_3$ 和 $\theta_6$ 的求解

子机器人L和子机器人R可重构为6自由度机器人应满足的第一个条件,是末端位置重合,故可令 $p_L = p_R$ ,组成方程组:

$$\begin{cases} -d_1 c_1 - s_1 A_3 = p_{R1}, \\ -d_1 s_1 + c_1 A_3 = p_{R2}, \\ d_2 s_2 + d_3 s_{23} + d_4 c_{23} = p_{R3}, \\ A_3 = d_2 c_2 + d_3 c_{23} - d_4 s_{23}. \end{cases} \quad (13)$$

式(13)中: $s_{ij}$ 、 $c_{ij}$ 、 $s_i$ 、 $c_i$ 分别表示 $\sin(\theta_i + \theta_j)$ 、 $\cos(\theta_i + \theta_j)$ 、 $\sin\theta_i$ 、 $\cos\theta_i$ ;  $i, j$ 为关节的序号;下文与此相同。

首先求式(13)的平方和,得:

$$A_3 = K_1 \sqrt{C_3}, \quad (14)$$

式中: $K_1 = \pm 1$ ;

$$C_3 = p_{R1}^2 + p_{R2}^2 - d_1^2. \quad (15)$$

再将式(13)先平方后相加,得:

$$d_3 c_3 - d_4 s_3 = B_3, \quad (16)$$

$$B_3 = \frac{C_3 + p_{R3}^2 - d_2^2 - d_3^2 - d_4^2}{2d_2}. \quad (17)$$

由上式得:

$$\theta_3 = \text{atan2}\left(K_2 \sqrt{d_3^2 + d_4^2 - B_3^2}, B_3\right) - \text{atan2}(d_4, d_3). \quad (18)$$

式中 $K_2 = \pm 1$ 。

由式(18)可得,当 $C_3 \geq 0$ 时 $\theta_3$ 才有解。

确定 $\theta_3$ 后,可通过计算式(13)(14)组成方程组,得到 $\theta_2$ :

$$s_2 = \frac{p_{R3} B_2 - A_2 A_3}{A_2^2 + B_2^2}, \quad (19)$$

$$s_2 = \frac{p_{R3} B_2 - A_2 A_3}{A_2^2 + B_2^2}, \quad (20)$$

$$A_2 = d_3 s_3 + c_3 d_4, \quad (21)$$

$$B_2 = d_2 + d_3 c_3 - d_4 s_3, \quad (22)$$

$$\theta_2 = \text{atan2}(s_2, c_2). \quad (23)$$

$\theta_1$ 可通过式(13)组成的方程组计算得出:

$$s_1 = \frac{-p_{R1} A_3 - p_{R2} d_1}{d_1^2 + A_3^2}, \quad (24)$$

$$c_1 = \frac{p_{R2} A_3 - p_{R1} d_1}{d_1^2 + A_3^2}, \quad (25)$$

$$\theta_1 = \text{atan2}(s_1, c_1). \quad (26)$$

根据 $K_1$ 和 $K_2$ 的符号可知, $\theta_1$ 、 $\theta_2$ 和 $\theta_3$ 可得到4组关于 $\theta_6$ 的方程式。子机器人L和子机器人R可重构为6自由度机器人应满足的第二个条件是轴线 $y_L$ 与轴线 $x_R$ 的夹角保持垂直,即 $|x_R| = |y_L| = 1$ ,可得:

$$x_R y_L = |x_R| |y_L| \cos \pi/2 = 0, \quad (27)$$

化简可得:

$$A_6 \cos \theta_6 + B_6 \sin \theta_6 = C_6, \quad (28)$$

$$\theta_6 = \text{atan2}\left(C_6, K_3 \sqrt{A_6^2 + B_6^2 - C_6^2}\right) - \text{atan2}(A_6, B_6). \quad (29)$$

式中 $K_3 = \pm 1$ 。

由于向量 $y_L$ 与 $\theta_1$ 、 $\theta_2$ 和 $\theta_3$ 有关,而 $x_R$ 只与 $\theta_6$ 有关,故式(27)是一个仅与 $\theta_6$ 有关的等式,根据 $\theta_1$ 、 $\theta_2$ 和 $\theta_3$ 求解公式,可知 $\theta_6$ 有8个不同解。

### 4.2 $\theta_4$ 和 $\theta_5$ 的求解

从图4可以看出,一旦 $\theta_1$ 、 $\theta_2$ 、 $\theta_3$ 和 $\theta_6$ 确定后,即前面两个约束条件满足后,只要分别旋转 $\theta_4$ 和 $\theta_5$ 必然可以满足 $z_R = z_L$ ,但是直接用该约束条件求 $\theta_4$ 和 $\theta_5$ 并不方便。

观察图4可知,由于 $\theta_1$ 、 $\theta_2$ 、 $\theta_3$ 和 $\theta_6$ 确定后,向量 $y_L$ 与 $x_R$ 将保持不变,而 $y_L$ 与 $y_R$ 之间应该满足 $\langle y_L, y_R \rangle = 0$ ,且此时向量 $y_L$ 与 $y_R$ 只有 $\theta_5$ 一个未知量,故可由 $y_L y_R = 1$ 求得 $\theta_5$ :

$$A_5 \cos \theta_5 + B_5 \sin \theta_5 = C_5, \quad (30)$$

$$\theta_5 = \text{atan2}\left(C_5, \pm \sqrt{A_5^2 + B_5^2 - C_5^2}\right) - \text{atan2}(A_5, B_5). \quad (31)$$

式(31)中根号部分事实上为0, $\theta_5$ 只有唯一解。以下给出证明。各轴的位置关系如图6所示。

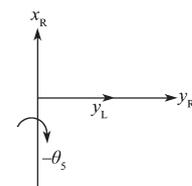


图6 各轴的位置关系

Fig. 6 Position relation of each axis

如图6所示, $\theta_5$ 在旋转过程中,只有使得向量

$\mathbf{y}_R$  始终位于  $\mathbf{x}_R$  和  $\mathbf{y}_L$  所确定的平面内时才能满足约束条件。因此  $\theta_5$  在最小正周期内只有唯一解, 式(31)可改写为

$$\theta_5 = \text{atan2}(C_5, 0) - \text{atan2}(A_5, B_5)。 \quad (32)$$

$\theta_5$  求解后, 再求  $\theta_4$ , 使得  $\langle \mathbf{x}_L, \mathbf{x}_R \rangle = 0$ , 同理可以求得  $\theta_4$  只有唯一解:

$$A_4 \cos \theta_4 + B_4 \sin \theta_4 = C_4, \quad (33)$$

$$\theta_4 = \text{atan2}\left(C_4, \pm \sqrt{A_4^2 + B_4^2 - C_4^2}\right) - \text{atan2}(A_4, B_4)。 \quad (34)$$

式(34)可改写为

$$\theta_4 = \text{atan2}(C_4, 0) - \text{atan2}(A_4, B_4)。 \quad (35)$$

## 5 实验和验证

计算 PUMA-560 机器人的逆运动学解, 以验证算法的正确性。PUMA-560 机器人的结构参数如表 2 所示。

表 2 PUMA-560 的 D-H 参数

Table 2 D-H parameters of PUMA-560

$i$	$\theta_i$	$d_i$	$a_{i-1}$	$\alpha_{i-1}/(^{\circ})$	变量范围 $/(^{\circ})$
1	$\theta_1$	0	0	0	-160~160
2	$\theta_2$	$d_1$	0	-90	-225~45
3	$\theta_3$	0	$d_2$	0	-45~225
4	$\theta_4$	$d_3$	$d_4$	-90	-110~170
5	$\theta_5$	0	0	90	-100~100
6	$\theta_6$	0	0	-90	-266~266

表 3 目标位姿对应的逆解

Table 3 Inverse solutions target pose correspondence

组数	$\theta_1$	$\theta_2$	$\theta_3$	$\theta_4$	$\theta_5$	$\theta_6$
1	1.047 19	0.872 66	0.872 66	4.188 79	2.443 46	2.443 46
2	1.047 19	0.872 66	0.872 66	1.047 19	0.698 13	5.585 05
3	1.047 19	1.794 21	-0.966 43	-1.174 41	2.373 41	-2.565 75
4	1.047 19	1.794 21	-0.966 43	1.967 17	0.768 18	0.575 83
5	-0.723 58	1.347 37	0.872 66	-0.753 37	1.759 75	2.038 24
6	-0.723 58	2.268 92	-0.966 43	-0.147 76	2.631 61	2.710 13
7	-0.723 58	2.268 92	-0.966 30	2.993 20	0.509 70	5.851 72
8	-0.723 58	1.347 37	0.872 60	2.388 10	1.381 40	5.179 40

4) 再次求正向运动学解, 得到 8 解的对应位姿。

5) 令  $E_n$  为目标位姿与实际位姿之间的误差,  ${}^s \mathbf{g}(\theta)_1$  为第 1 组的实际位姿, 根据  $E_n = \left\| {}^s \mathbf{g}(\theta)_1 - {}^s \mathbf{g}(\theta)_n \right\|$  计算步骤(2)和步骤(4)的误差, 通过比较, 可知第 1 组解的误差最大, 第 5 组解的误差最小。

$$E_1 = \left\| {}^s \mathbf{g}(\theta) - {}^s \mathbf{g}(\theta)_1 \right\| = 5.098 86 \times 10^{-13}, \quad (37)$$

$$E_5 = \left\| {}^s \mathbf{g}(\theta) - {}^s \mathbf{g}(\theta)_5 \right\| = 1.413 86 \times 10^{-13}。 \quad (38)$$

如式(37)和(38)所示, 实际位姿与目标位姿

## 5.1 实验结果

在逆运动学算法的验证过程中, 首先, 在关节运动范围内给定一组初始的角度值; 然后, 根据 POE 公式计算目标的位姿; 接下来根据得到的目标位姿和算法, 确定每个关节的角度; 在此之后, 课题组再次使用获得的角度集来求解目标位姿, 并且利用 Matlab 对机器人的正、逆运动学进行计算。具体的验证过程如下:

1) 给定目标位姿, PUMA-560 的杆长、角度值、弧度值。

杆长:  $d_1=149.09$  mm,  $d_2=431.8$  mm,  $d_3=433.07$  mm,  $d_4=20.32$  mm。

角度值:  $\theta_1=60^{\circ}$ ,  $\theta_2=50^{\circ}$ ,  $\theta_3=50^{\circ}$ ,  $\theta_4=60^{\circ}$ ,  $\theta_5=40^{\circ}$ ,  $\theta_6=-40^{\circ}$ 。

弧度值:  $\theta_1=1.047 19$ ,  $\theta_2=0.872 78$ ,  $\theta_3=0.872 66$ ,  $\theta_4=1.047 19$ ,  $\theta_5=0.698 13$ ,  $\theta_6=-0.698 13$ 。

2) 求解正向运动学公式, 得到目标位姿。

${}^s \mathbf{g}(\theta) =$

$$\begin{bmatrix} -0.803 45 & 0.197 37 & 0.561 71 & -232.458 31 \\ 0.492 97 & 0.749 56 & 0.441 74 & -37.944 44 \\ -0.333 85 & 0.631 82 & -0.699 53 & 753.740 15 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (36)$$

3) 根据所提出的目标位姿和算法, 求出所有逆运动学解, 如表 3 所示。

间最大误差为  $10^{-13}$  数量级, 从而验证了算法的正确性和高精度性。

## 5.2 与 D-H 坐标法比较

采用文献[6]中 D-H 坐标法和本文提出的新算法, 分别对关节角进行 1 000 次求逆运算, 每次求 50 组逆解的平均值, 等距抽取其中的 10 组用来比较。算法的计算软件为 MatlabR2017b, PC 配置如下: 处理器为 Intel Core i7-8750H, CPU 速度为 2.20 GHz, 内存为 8.00 GB。D-H 法与新算法求逆解耗时的比较如图 7 所示。

从图7中可看出,新算法较D-H法在求逆运动学解的过程中速度有显著提高。D-H法和新算法一次平均耗时分别为67.87, 59.65 ms, 新算法较D-H法计算速度提高了12.1%。

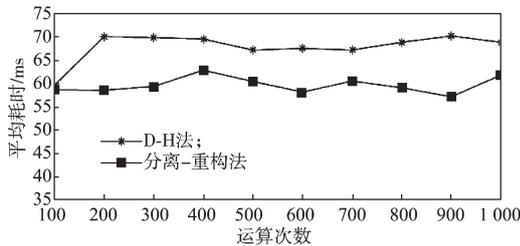


图7 D-H法和新算法求逆解耗时比较

Fig. 7 Time consumption comparison between D-H method and the proposed algorithm

### 5.3 奇异性分析

文献[9]中针对后3个关节轴线相交于一点的6R机器人,利用D-H法对PUMA-560机器人进行正向运动学建模,采用臂腕分离法来求其逆解,即分为两个3R部分,虽然该方法可避免矩阵求逆的运算,但在求逆解过程中,若 $\theta_5=0$ ,则关节4和6转轴共线,导致 $\theta_4$ 和 $\theta_6$ 无法进行求解。利用本文的新算法,对上述情况进行分析:

1) 给定位姿角度值:  $\theta_1=60^\circ$ ,  $\theta_2=50^\circ$ ,  $\theta_3=50^\circ$ ,  $\theta_4=60^\circ$ ,  $\theta_5=0^\circ$ ,  $\theta_6=-40^\circ$ , 求正向运动学公式,得到目标位姿:

$${}^s_7\mathbf{g}(\theta)=\begin{bmatrix} -0.470 & 95 & -0.198 & 86 & 0.859 & 44 & -232.458 & 30 \\ 0.714 & 18 & 0.485 & 93 & 0.503 & 79 & -37.944 & 43 \\ -0.517 & 82 & 0.851 & 07 & -0.086 & 24 & 753.740 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^\circ \quad (39)$$

2) 根据新算法和目标位姿,求出所有可能的关节角度。此时 $\theta_4$ 、 $\theta_5$ 、 $\theta_6$ 会受到影响,而 $\theta_1$ 、 $\theta_2$ 、 $\theta_3$ 不会受到任何影响,故可不详细列出。8组 $\theta_4$ 、 $\theta_5$ 、 $\theta_6$ 的逆运动学解如表4所示。

表4 8组 $\theta_4$ 、 $\theta_5$ 、 $\theta_6$ 的逆运动学解

Table 4 Solutions of eight groups of  $\theta_4$ ,  $\theta_5$  and  $\theta_6$  inverse kinematics

组数	$\theta_4$	$\theta_5$	$\theta_6$
1	4.188 79	3.141 59	2.443 46
2	1.047 19	0	5.585 05
3	4.374 91	2.733 28	-2.992 68
4	1.233 32	0.408 30	0.148 90
5	2.724 83	0.696 38	5.488 38
6	-0.320 43	3.309 60	2.678 90
7	2.821 15	-0.168 00	5.820 50
8	-0.416 75	2.445 20	2.346 79

由表4可知,当 $\theta_5=0$ 时,利用本文的新算法可避免奇异点的影响,并且可求得8组 $\theta_4$ 、 $\theta_5$ 、 $\theta_6$ 的解。

### 5.4 结果讨论

在实验中确定了一组封闭解,即8组解。因为PUMA-560为后3个关节为轴线交于一点的机器人,由新算法求得其逆运动学解如表3所示,可知第5组的误差最小。为验证新算法的正确性,将求得的8组解与给定目标位姿比较,发现第1组解与其误差最大,且实际位姿与目标位姿误差为 $10^{-13}$ 数量级,验证了算法的正确性和高精度性。

与文献[5]中封闭解法相比,新算法更具有理论推广性,同时也推导出其他关节角的具体求解方法。文献[6]中采用齐次坐标变换矩阵推导出逆运动学问题的解析解,其方法在计算逆向运动学的过程中需进行多次矩阵变换,导致运算速率较低。利用本文的新算法在求其逆解的过程,不仅避免奇异点,而且速度也有明显提高。与文献[9]的分离点相比,本文可避免奇异点,且计算过程中详细介绍了可分离条件,并用数学表达式证明了机器人的可分离性。

## 6 结论

本文利用螺旋理论建立了正向运动学模型,并且通过对机器人正向运动学指数积表达式变形,证明了任意机器人可分离为两个低自由度子机器人的可行性。提出后3个关节轴线交于一点的6R机器人分离点的选取及子机器人工具坐标系设定的方法:分离点应选取在可使子机器人具有完备逆解方法的位置;各子机器人工具坐标系的某一轴与对应子机器人末端关节轴线共线。以子机器人重新结合为6R机器人的几何约束关系,推导出各个关节角求解公式,最后求得机器人逆运动学解;最终对PUMA-560机器人进行验证,且实际位姿与目标位姿误差为 $10^{-13}$ 数量级,并在以下方面具有创新性:

与D-H法求逆解速度相比,本文提出的方法对机器人结构重新解构,降低求解复杂度且几何意义明显,计算速度提高了12.1%;

本文选择的分离位置较传统臂腕分离法可避免奇异点的影响,解决了传统方法的弊端。

此外,本文提出的算法可被应用到其他类似构型的6R串联机器人及其扩展构型逆解问题求解中,具有一定通用性。

### 参考文献:

[1] 党磊,熊瑞平,唐静莹,等. 同伦算法在6R机器

- 人运动学逆解上的应用[J]. 机械, 2017, 44(4): 5-9.  
DANG Lei, XIONG Ruiping, TANG Jingying, et al. Application of Homotopy Algorithm to Inverse Kinematics of 6R Robot[J]. Machinery, 2017, 44(4): 5-9.
- [2] PANDA S, MISHRA D, BISWAL B B. An Approach for Design Optimization of 3R Manipulator Using Adaptive Cuckoo Search Algorithm[J]. Mechanics Based Design of Structures and Machines 2020, 48(6): 773-798.
- [3] 刘华山, 朱世强, 吴剑波, 等. 基于奇异摄动理论的输入有界机器人轨迹跟踪控制[J]. 控制理论与应用, 2009, 26(12): 1371-1377.  
LIU Huashan, ZHU Shiqiang, WU Jianbo, et al. Trajectory Tracking Control for Robot Manipulators with Bounded Inputs Based on the Singular Perturbation Theory[J]. Control Theory & Applications, 2009, 26(12): 1371-1377.
- [4] 王其军, 杜建军. MOTOMAN 机器人逆运动学新分析[J]. 哈尔滨工业大学学报, 2010, 42(3): 451-454.  
WANG Qijun, DU Jianjun. A New Solution for Inverse Kinematics Problems of MOTOMAN Robot[J]. Journal of Harbin Institute of Technology, 2010, 42(3): 451-454.
- [5] 陈 晗, 李林升. 基于 MATLAB 的 PUMA560 机器人正逆解研究[J]. 制造业自动化, 2018, 40(12): 34-36.  
CHEN Han, LI Linsheng. Research on Forward Inverse Solution of PUMA560 Robot Based on MATLAB[J]. Manufacturing Automation, 2018, 40(12): 34-36.
- [6] 尤 波, 张永军, 毕克新. PUMA560 型机器人逆运动学问题的解析解[J]. 哈尔滨科学技术大学学报, 1994(4): 6-10.  
YOU Bo, ZHANG Yongjun, BI Kexin. The Analytic Method of PUMA560 Robot Inverse Kinematics Problem[J]. Journal of Harbin University of Science and Technology, 1994(4): 6-10.
- [7] 赵荣波, 施智平, 关 永, 等. 基于旋量理论和代数消元 6R 机器人逆解算法[J]. 传感器与微系统, 2018, 37(12): 114-117, 121.  
ZHAO Rongbo, SHI Zhiping, GUAN Yong, et al. Inverse Kinematic Solution Algorithm of 6R Robots Based on Screw Theory and Algebraic Elimination[J]. Transducer and Microsystem Technologies, 2018, 37(12): 114-117, 121.
- [8] 叶上高, 刘电霆. 机器人运动学逆解及奇异和多解的处理[J]. 机床与液压, 2014, 42(3): 27-29.  
YE Shanggao, LIU Dianting. Robot Inverse Kinematics Algorithm Including Multi-Solutions and Singularity Analysis[J]. Machine Tool & Hydraulics, 2014, 42(3): 27-29.
- [9] 葛小川, 郑颺默, 郑国利, 等. PUMA 机器人运动学逆解新算法[J]. 计算机系统应用, 2016, 25(11): 183-186.  
GE Xiaochuan, ZHENG Liaomo, ZHENG Guoli, et al. Application of Double Quaternion in the Inverse Kinematics of 6R Serial Robots[J]. Computer Systems & Applications, 2016, 25(11): 183-186.
- [10] 孟凡刚, 曹东江, 尚江华. 基于 MATLAB 的 6R 机器人逆运动学求解分析[J]. 河北省科学院学报, 2020, 37(1): 22-29.  
MENG Fangang, CAO Dongjiang, SHANG Jianghua. Inverse Kinematics Analysis of 6Rrobot Based on MATLAB[J]. Journal of the Hebei Academy of Sciences, 2020, 37(1): 22-29.
- [11] HUSTY M L, PFURNER M, SCHRÖCKER H P. A New and Efficient Algorithm for the Inverse Kinematics of a General Serial 6R Manipulator[J]. Mechanism and Machine Theory, 2007, 42(1): 66-81.
- [12] 李 丽, 房立金, 王国勋. 基于螺旋理论的 6R 串联工业机器人奇异位形分析[J]. 组合机床与自动化加工技术, 2017(12): 1-5, 11.  
LI Li, FANG Lijin, WANG Guoxun. Singularity Analysis of 6R Series Industrial Robot Based on Screw Theory[J]. Modular Machine Tool & Automatic Manufacturing Technique, 2017(12): 1-5, 11.
- [13] 李 光, 肖 帆, 杨加超, 等. 基于唯一域方法的机器人逆向运动学求解[J]. 农业机械学报, 2019, 50(10): 386-394.  
LI Guang, XIAO Fan, YANG Jiachao, et al. Solution of Inverse Kinematics of Robots Based on Unique Domain Method[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2019, 50(10): 386-394.
- [14] 蔡自兴. 机器人学[M]. 北京: 清华大学出版社, 2000: 47-53.  
CAI Zixing. Foundation of Robotics[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2000: 47-53.

(责任编辑: 申 剑)