

doi:10.3969/j.issn.1673-9833.2021.02.001

轨道非线性能量阱尖端效应分析及 简化设计方法研究

张超¹, 郑雨强², 王菁菁³

(1. 湖南工业大学 土木工程学院, 湖南 株洲 412007; 2. 中国建筑第四工程局有限公司, 广东 广州 510000;
3. 广州大学 土木工程学院, 广东 广州 510006)

摘要: 尖端效应是轨道非线性能量阱力-位移关系中存在的—种特有的现象, 未见于其他类型 NES。为了得到轨道 NES 产生尖端效应的原因, 并基于尖端效应进行轨道 NES 的设计, 通过对轨道 NES 恢复力的公式推导, 进行了轨道 NES 尖端效应的理论研究, 并利用无阻尼轨道 NES 自由振动和有阻尼轨道 NES 受迫振动, 对轨道 NES 的尖端效应进行了分析。研究表明, 轨道 NES 恢复力中 F_v 的减小比 F_a 的减小更容易发生, F_v 是轨道 NES 中产生尖端效应的主要原因, 且在较大的位移处尖端效应更强。在 F_v 达到峰值以前, F_v 和 F_a 的绝对值大小相似, 且由于 F_a 和 F_v 的方向总是相反, F_d 成为恢复力中最具有代表性的一项, 可采用 F_d 作为其恢复力进行轨道 NES 的初步设计。

关键词: 尖端效应; 轨道非线性能量阱; 自由振动; 受迫振动; 恢复力

中图分类号: O322

文献标志码: A

文章编号: 1673-9833(2021)02-0001-06

引文格式: 张超, 郑雨强, 王菁菁. 轨道非线性能量阱尖端效应分析及简化设计方法研究 [J]. 湖南工业大学学报, 2021, 35(2): 1-6.

Tip Effect Analysis with a Simplified Design Method of Track Nonlinear Energy Sink

ZHANG Chao¹, ZHENG Yuqiang², WANG Jingjing³

(1. College of Civil Engineering, Hunan University of Technology, Zhuzhou Hunan 412007, China;
2. China Construction Fourth Engineering Division Co. Ltd., Guangzhou 510000, China;
3. College of Civil Engineering, Guangzhou University, Guangzhou 510006, China)

Abstract: As a particular phenomenon in the force displacement relationship of nonlinear energy sink (NES), tip effect is not found in other types of NES. In view of an inquiry into the reason of the tip effect of the orbital NES, and for a design of the track NES based on the tip effect, a theoretical research on the tip effect of NES has thus been carried out based on the formula derivation of the restoring force of NES, followed by an analysis of the tip effect of NES by using the free vibration of NES in undamped track and the forced vibration of NES in damped track. The results show that, with F_v being the main reason for the tip effect in the track NES, the decrease of F_v is more likely to occur than

收稿日期: 2020-08-06

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (52078151); 湖南省自然科学基金资助项目 (2018JJ3123)

作者简介: 张超 (1995-), 男, 山西大同人, 湖南工业大学硕士生, 主要研究方向为结构控制,

E-mail: 1424933342@qq.com

通信作者: 王菁菁 (1986-), 女, 湖南株洲人, 广州大学讲师, 博士, 主要从事结构控制技术和非线性结构控制方面的教学与研究, E-mail: wangjj@gzhu.edu.cn

the decrease of F_a in the track NES, meanwhile the tip effect is stronger at the larger displacement. Before F_v reaches its maximum value, the absolute values of F_v and F_a are quantitatively similar, and because the signs of F_a and F_v are always opposite, F_d becomes the most representative term in the restoring force. Consequently, F_d can be used as the restoring force for the preliminary design of track NES.

Keywords: tip effect; track nonlinear energy sink; free vibration; forced vibration; restoring force

1 研究背景

结构控制技术通过对主体结构施加被动或主动的作用力,改变主体结构的刚度或阻尼以有效减小结构振动^[1]。其中,调谐质量阻尼器(tuned mass damping, TMD)是工程结构中应用最为广泛的被动控制方法,一般被放置在主体结构顶层,当TMD与主体结构相调谐时两者形成共振机制,从而减小主体结构响应^[2-3]。但当主体结构受到损伤、沉降或其他因素影响时,结构自振频率发生变化,TMD与之失谐而导致减振性能退化,甚至会增大结构响应^[4]。

为了解决TMD对结构变化频率敏感的问题,有学者提出非线性的结构控制方法——非线性能量阱(nonlinear energy sink, NES)^[5]。国外学者S. Aubry^[6]、G. Kopidakis^[7]等的研究表明,与TMD相比,NES的非线性力-位移使其能够在宽频范围内发生共振,降低结构响应,其频率鲁棒性能优于TMD。此外,国内学者也对NES进行了相关的研究,如张也弛等^[8]使用数值方法研究了两自由度NES在简谐荷载下的力学特性和振动控制效果。王菁菁等^[9-11]提出了一类新型被动质量阻尼器——轨道非线性能量阱,该装置由轨道和附加质量块组成,如图1所示。通过轨道形状实现非线性恢复力,轨道固定在主体结构顶层,质量块沿轨道运动,如图2所示。Wang J. J.等^[12]研究了两自由度主体结构附加轨道NES在脉冲荷载作用下的减振性能,实现了具有近似3次方恢复力的轨道NES。同时,研究发现轨道NES的力-位移关系中产生尖端效应,这是轨道NES特有的现象,未见于其他类型的NES。尖端效应是指当NES质量块位移较大、轨道斜率极大时,恢复力随着位移的增大反而减小。当无尖端效应发生时,轨道NES的减振效率难以达到最佳;当存在一定程度的尖端效应时,轨道NES的减振效率较好。尖端效应可以防止轨道NES恢复力过大而造成局部构件发生破坏。

本研究对轨道NES尖端效应进行理论推导,得到了轨道NES尖端效应产生的主要原因,并分析了尖端效应的强烈程度。分别通过不同输入能量下的无

阻尼轨道NES的自由振动、有阻尼轨道NES的受迫振动,对轨道NES的尖端效应进行分析。根据所得到的分析结果,揭示了轨道NES尖端效应产生的主要原因,从而提出了基于尖端效应的轨道NES简化设计方法。

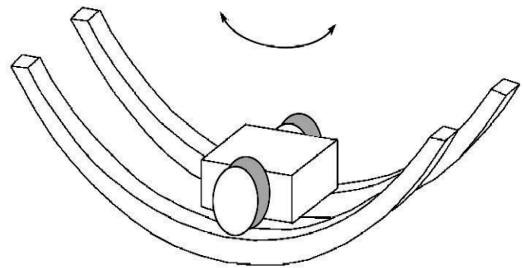


图1 轨道NES示意图

Fig. 1 Configuration of track NES

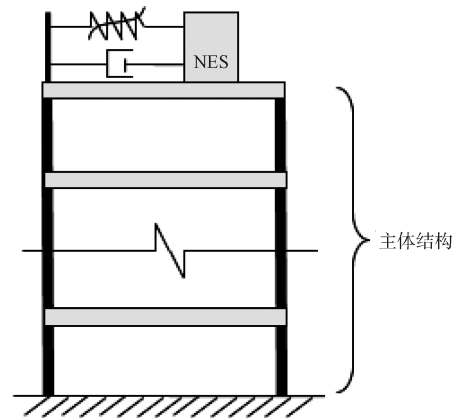


图2 轨道NES系统示意图

Fig. 2 Illustration of track NES system

2 轨道NES恢复力

轨道NES的自由体受力示意图如图3所示,其中, m_N 为NES的质量, g 为重力加速度, θ 为轨道切线角度, F_{Normal} 为NES作用在轨道上的法向力, u_N 和 v_N 分别为NES相对于轨道的水平位移和竖向位移, z 为轨道的水平位移, $h(u_N)$ 为轨道的形状函数,即NES的竖向位移。

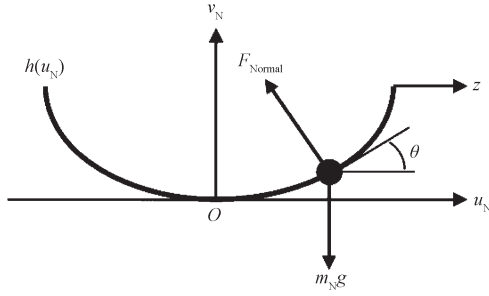


图3 轨道NES自由体的受力示意图

Fig. 3 Force diagram of track NES

推导中假设NES质量不发生转动且始终与轨道接触,采用牛顿方法可以得到轨道NES的运动方程。根据图3列出水平方向上的力平衡方程为

$$F_{Normal} \sin \theta = -m_N \ddot{u}_N - m_N \ddot{z}; \quad (1)$$

竖直方向上的力平衡方程为

$$F_{Normal} \cos \theta = m_N g - m_N \ddot{v}_N. \quad (2)$$

式中: $v_N = h(u_N)$; (3)

$$\ddot{v}_N = h''(u_N) \dot{u}_N^2 + h'(u_N) \ddot{u}_N; \quad (4)$$

$$\tan \theta = h'(u_N). \quad (5)$$

将式(3)和式(4)代入力平衡方程式(1)和式(2),并联立式(5)可得:

$$\begin{aligned} & \left\{ 1 + [h'(u_N)]^2 \right\} \ddot{u}_N m_N + h'(u_N) h''(u_N) \dot{u}_N^2 m_N + \\ & h'(u_N) m_N g = -\ddot{z} m_N. \end{aligned} \quad (6)$$

除去运动方程中惯性力项 $\ddot{u}_N m_N$ 和轨道加速度作用的外部力项 $\ddot{z} m_N$, 可得到轨道NES的恢复力表达式为

$$\begin{aligned} F_N = & [h'(u_N)]^2 \cdot m_N \dot{u}_N + \\ & h'(u_N) h''(u_N) \cdot m_N \dot{u}_N^2 + h'(u_N) m_N g. \end{aligned} \quad (7)$$

采用四阶多项式 $h(u_N) = a u_N^4$ (a 是任意实数) 作为轨道形状函数, 代入式(7), 可得确定轨道函数形式后轨道NES的恢复力表达式为

$$F_N = 16a^2 m_N u_N^6 \dot{u}_N + 48a^2 m_N u_N^5 \dot{u}_N^2 + 4agm_N u_N^3. \quad (8)$$

3 轨道NES尖端效应理论推导

本节对轨道NES尖端效应进行理论推导, 得出了轨道NES尖端效应的产生原因, 分析了尖端效应的强烈程度。

在恢复力表达式(8)中, 第一项和第二项分别与轨道NES的加速度和速度有关, 同时也与位移的高阶项有关, 而第三项仅与位移相关。为了简便起见, 将这3项分别记为 F_a 、 F_v 和 F_d , 可得它们之间的关系如下:

$$F_N = F_a + F_v + F_d. \quad (9)$$

式中:

$$F_a = 16a^2 m_N u_N^6 \dot{u}_N; \quad (10)$$

$$F_v = 48a^2 m_N u_N^5 \dot{u}_N^2; \quad (11)$$

$$F_d = 4agm_N u_N^3. \quad (12)$$

采用谐波平衡法进行分析, 相关研究^[13]中, 当且仅当取一阶频率进行近似求解时所得结果与数值模拟结果吻合良好, 因此, 本文取一阶频率项进行分析。无阻尼轨道NES的自由振动可以写成:

$$u_N = A \sin(\omega_N t + \varphi_N); \quad (13)$$

$$\dot{u}_N = A \omega_N \cos(\omega_N t + \varphi_N); \quad (14)$$

$$\ddot{u}_N = -A \omega_N^2 \sin(\omega_N t + \varphi_N); \quad (15)$$

$$\omega_N = \sqrt{\left(\frac{\partial F_N}{\partial u_N} \right) / m_N}. \quad (16)$$

式(13)~(16)中: A 为振动的振幅; ω_N 为根据式(16)定义的轨道NES的瞬态自然频率; φ_N 为振动的初相。

因此, 恢复力可写成

$$F_N = 4agm_N u_N^3 (f_a + f_v + f_d). \quad (17)$$

式中:

$$f_a = -R \omega_N^2 [\sin(\omega_N t + \varphi_N)]^4, \quad (18)$$

其中 $R = 4aA^4/g$; (19)

$$f_v = 3R \omega_N^2 [\sin(\omega_N t + \varphi_N)]^2 [\cos(\omega_N t + \varphi_N)]^2; \quad (20)$$

$$f_d = 1. \quad (21)$$

由于 f_d 等于1, f_a 和 f_v 表示 F_a 和 F_v 相对于 F_d 的作用力方向和大小比例。

分析式(18)~(21), 可以得出:

1) 由于 R 始终为正, 因此 f_a 为负, f_v 为正, 这说明 F_a 始终与 F_d 方向相反, F_v 始终与 F_d 方向相同。

2) R 是与轨道NES参数有关的常数。因此, 当 ω_N 非常小时, F_a 和 F_v 的量级远小于 F_d , 可以在 F_N 中忽略。此时 $F_N \approx F_d$, 且轨道NES的瞬态自然频率变成

$$\omega_N = \sqrt{12ag u_N^2}. \quad (22)$$

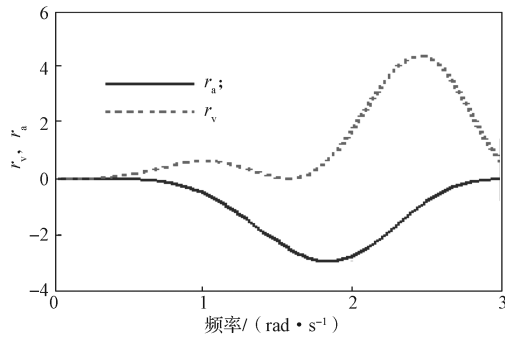
令

$$r_a = f_a/R = -\omega_N^2 [\sin(\omega_N t + \varphi_N)]^4; \quad (23)$$

$$r_v = f_v/R = 3\omega_N^2 [\sin(\omega_N t + \varphi_N)]^2 [\cos(\omega_N t + \varphi_N)]^2. \quad (24)$$

r_a 和 r_v 是关于 ω_N 的单变量函数, 其函数图像如图4所示, 可用于分析轨道NES尖端效应的强烈程度。

根据图4所示曲线图可以得知: 当 $\varphi_N = 0$ 时(即对应初始位移为0, 仅具有初始速度的自由振动) r_a 和 r_v 随着 ω_N 而变化。

图4 r_a 函数和 r_v 函数Fig. 4 r_a and r_v as functions of ω_N

根据观察可以推导出有关轨道 NES 恢复力的一些特点:

1) 在 r_v 曲线中, 观察到其绝对值首次减小发生在 $\omega_N = 1$ rad/s, 其频率低于 r_a 绝对值首次减小时所对应的频率, r_a 和 r_v 绝对值的减小表明了其对应分力 F_a 和 F_v 的减小。

2) 轨道 NES 的刚度随位移增大而增大, 因此分力 F_v 减小所对应的位移小于分力 F_a 减小所对应的位移, 表明 F_v 绝对值的减小早于 F_a 绝对值的减小, 当各分力的减小程度不同步时会导致合力 F_N 的大小发生上下波动, 即产生尖端效应。

3) r_a 和 r_v 的变化随着频率的增加而变得更加剧烈, 表明在更大的位移处尖端效应更加显著。

4) 随着 F_v 首次减小, F_N 中观察到尖端效应, 而尖端效应发生后, 随着位移的增加, ω_N 不增大反而减小, 这使得 F_a 的减小太可能发生。

为了直观地说明轨道 NES 的尖端效应, 下面讨论无阻尼轨道 NES 的自由振动和有阻尼轨道 NES 的受迫振动, 轨道形状均采用 $h(u_N) = 0.015u_N^4$ 。

4 无阻尼轨道 NES 尖端效应分析

图 5 为 NES 质量块的初始速度为 0.42 m/s 时, 无阻尼轨道 NES 的加速度、速度和位移时程曲线图。

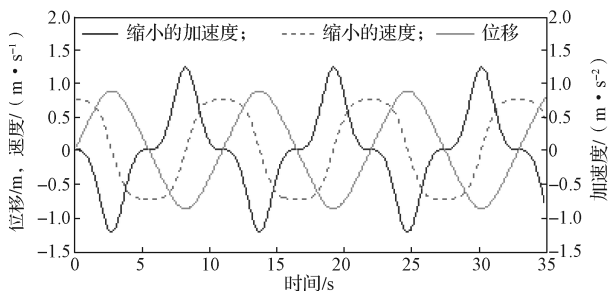


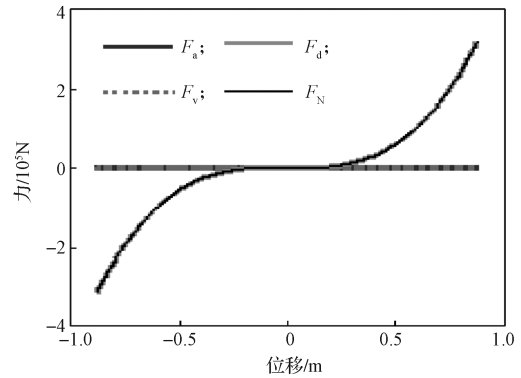
图 5 0.42 m/s 初始速度下无阻尼轨道 NES 的响应曲线

Fig. 5 Responses curve of undamped track NES at an initial velocity of 0.42 m/s

可以很明显地从图 5 中得知振动频率, $\omega_{N,a} = 0.57$ rad/s。同时, 为了在同一张图中显示 3 个运动变量的

时程曲线, 速度和加速度分别按 $1/\omega_{N,a}$ 和 $1/\omega_{N,a}^2$ 进行缩小, 缩小后的曲线如图 5 所示。

图 6 为图 5 中的运动产生的恢复力 F_N 及其分力 F_a 、 F_v 和 F_d 随位移变化的曲线图。从图 6a 可以看出, F_a 始终与 F_d 方向相反, F_v 始终与 F_d 方向相同, 这与第 3 节中得出的结论相同。



a) 力 - 位移关系

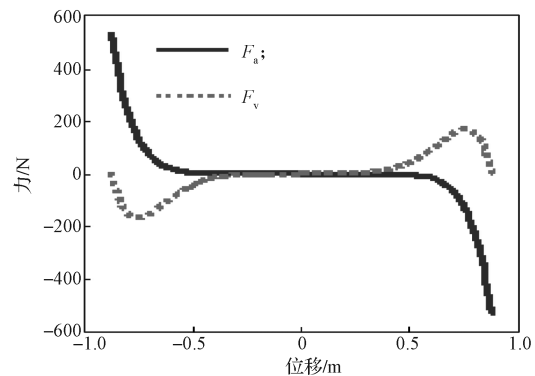
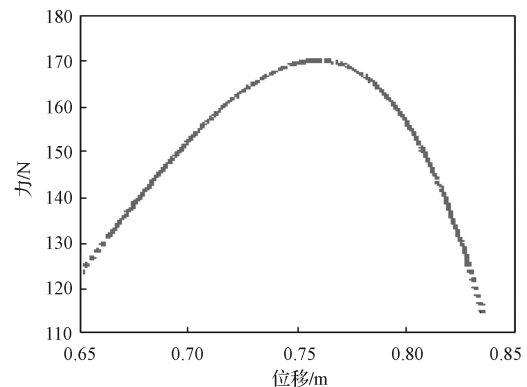
b) 力 F_a -位移关系与力 F_v -位移关系局部放大c) 力 F_v -位移关系局部放大

图 6 0.42 m/s 初始速度下无阻尼轨道 NES 的力 - 位移关系曲线

Fig. 6 Force-displacement relationship curve of undamped track NES at an initial velocity of 0.42 m/s

此外, 在所示运动的能量等级, F_a 和 F_v 非常小并且与 F_d 相比可以忽略。 f_a 和 f_v 的大小可以将 $\omega_{N,a} = 0.57$ rad/s 代入进行计算, 如式 (26) 和 (27), 均远小于 $f_a = 1$ 。因此, 式 (22) 可用于计算 F_v 在如式 (28)

所示的绝对值 ($\omega_N=1$) 处首次减小时, 轨道 NES 的位移, 与图 6c 所示的 F_V 峰值时的位移 (约为 0.75 m) 相一致。然而, F_V 的这种减小不会在 F_N 中产生有效的尖端效应, 因为此时负向分力 F_a 增加的速率远快于 F_V , 并且 F_a 和 F_V 都远小于 F_d , 不能使 F_N 发生显著的变化。

$$R=4aA^4/g=0.037, \quad (25)$$

$$f_a=-R\omega_{N,a}^2=-0.0012, \quad (26)$$

$$f_v=3R\omega_{N,a}^2=0.0036, \quad (27)$$

$$1/\sqrt{12ag}=0.7529\text{ m}。 \quad (28)$$

图 7 和图 8 分别描述了当自由体获得 5 m/s 初始速度 (输入能量相对较高) 的无阻尼轨道 NES 的运动状态时程曲线图和恢复力 - 位移关系曲线。图 7 中, 速度和加速度时程分别按 $1/\omega_{N,a}$ ($\omega_{N,a}=1.53\text{ rad/s}$) 和 $1/\omega_{N,a}^2$ 进行缩小。在这种情况下, 图 8 中, F_a 和 F_V 与 F_d 具有相同的数量级。在 F_V 中可以很清晰地观察到力随位移先增大后减小的变化, 在位移的终端可以识别出在 F_a 中发生了微弱的尖端趋势, 在 F_N 中尖端效应显著。此时, 由于 F_N 与 F_d 已不再相同, 式 (22) 不能在此处用于计算 F_V 达到峰值时的位移。

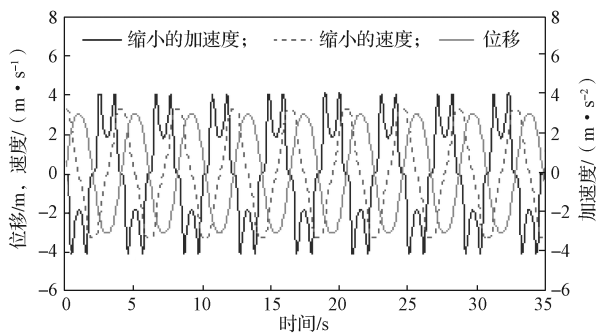


图 7 5 m/s 初始速度下无阻尼轨道 NES 的响应曲线
Fig. 7 Responses curve of undamped track NES at an initial velocity of 5 m/s

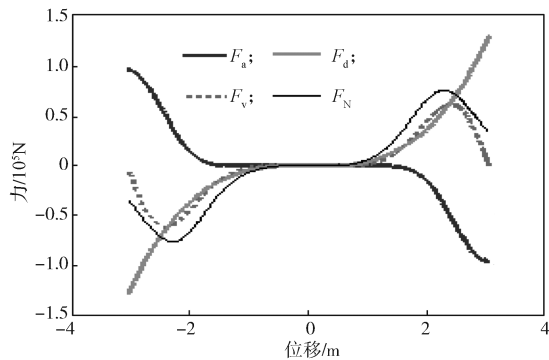


图 8 5 m/s 初始速度下无阻尼轨道 NES 的力 - 位移关系曲线

Fig. 8 Force-displacement relationship curve of undamped track NES at an initial velocity of 5 m/s

5 有阻尼轨道 NES 尖端效应分析

图 9 和 10 分别是阻尼系数为 $1.7 \times 10^5\text{ N}\cdot\text{m/s}$ 时, 有阻尼轨道 NES 附加在文献 [14] 中的 32 自由度, 主体结构顶层时的运动状态时程曲线图和恢复力 - 位移关系曲线。主体结构每层以及 NES 质量块的初始速度都为 1 m/s。图 9 中轨道 NES 的运动以主体结构顶层运动为参考, 即为两者的相对运动, 并且速度和加速度时程曲线分别按 $1/\omega_{N,a}$ ($\omega_{N,a}=1.58\text{ rad/s}$) 和 $1/\omega_{N,a}^2$ 进行缩小。由于轨道 NES 中阻尼的存在以及主体结构运动的激励, 轨道 NES 的特性变得更加难以推测。 F_V 和 F_a 绝对值的减小每次都发生在不同的位移处, 并且在尖端效应发生的位移范围内有小幅度波动。此示例定性论证了图 4 中的推论: F_V 的减小比 F_a 的减小更容易发生, F_V 是轨道 NES 中产生尖端效应的主要原因, 并且在较大的位移处尖端效应更加显著。

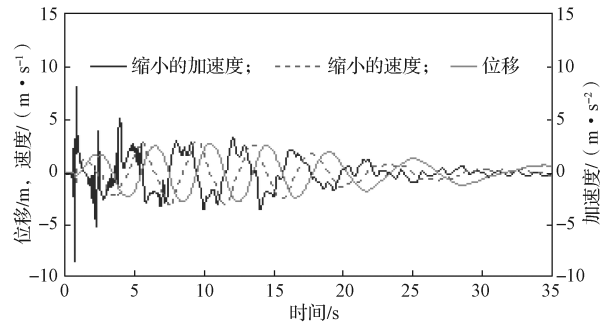


图 9 基激励下有阻尼轨道 NES 的响应曲线
Fig. 9 Responses curve of damped track NES under base excitation

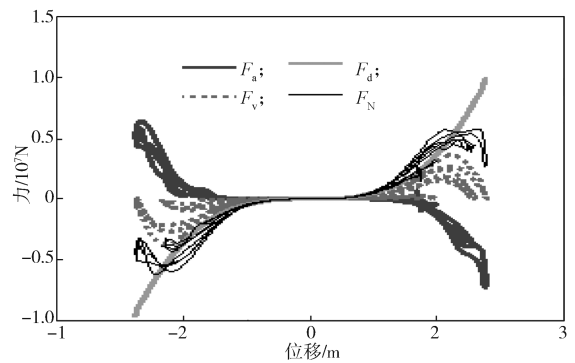


图 10 基激励下有阻尼轨道 NES 的力 - 位移关系曲线
Fig. 10 Force-displacement relationship curve of damped track NES under base excitation

6 结论

尖端效应是轨道非线性能量阱的力 - 位移关系中存在的特有现象。本研究进行了尖端效应理论推导, 分析了不同情况下轨道 NES 的尖端效应, 得出以下结论:

1) 分力 F_v 减小所对应的位移小于分力 F_a 减小所对应的位移, 表明 F_v 绝对值的减小早于 F_a 绝对值的减小, 各分力的减小程度不同步导致合力 F_N 的大小发生上下波动, 即产生尖端效应。

2) 无阻尼轨道 NES 尖端效应分析结果表明, 输入能量相对较低时, 分力 F_a 和 F_v 非常小且与 F_d 相比均可以忽略。由于负向分力 F_a 增加的速率远快于 F_v , 且 F_a 和 F_v 都远小于 F_d , 不能使 F_N 发生显著的变化, F_v 的减小不会在 F_N 中产生有效的尖端效应。输入能量相对较高时, 在 F_v 中可以很清晰地观察到力随着位移先增大后减小的变化, 在位移终端可以识别到在 F_a 中发生了微弱的尖端趋势, 且在 F_N 中尖端效应显著。

3) 有阻尼轨道 NES 尖端效应分析结果表明, F_v 和 F_a 绝对值的减小每次都发生在不同的位移且在尖端效应发生的位移范围内有大幅度波动, 可以定性地说 F_v 的减小比 F_a 的减小更容易发生, F_v 是轨道 NES 中产生尖端效应的主要原因, 在较大的位移处尖端效应更强。

基于上述结论: 在 F_v 达到峰值以前, F_v 和 F_a 的绝对值大小相近, 且由于 F_a 和 F_v 的方向总是相反, F_d 成为 F_N 中最具有代表性的项, 可采用 F_d (式(12)) 作为其恢复力进行轨道 NES 的初步设计。

参考文献:

- [1] SPENCER JR B F, NAGARAJAIAH S. State of the Art of Structural Control[J]. Journal of Structural Engineering, 2003, 129(7): 845-856.
- [2] SADEK F, MOHRAZ B, TAYLOR A W, et al. A Method of Estimating the Parameters of Tuned Mass Dampers for Seismic Applications[J]. Earthquake Engineering & Structural Dynamics, 1997, 26(6): 617-635.
- [3] SOTO-BRITO R, RUIZ S E. Influence of Ground Motion Intensity on the Effectiveness of Tuned Mass Dampers[J]. Earthquake Engineering & Structural Dynamics, 1999, 28(11): 1255-1271.
- [4] SUN C, EASON R P, NAGARAJAIAH S, et al. Hardening Duffing Oscillator Attenuation Using a Nonlinear TMD, a Semi-Active TMD and Multiple TMD[J]. Journal of Sound and Vibration, 2013, 332(4): 674-686.
- [5] VAKAKIS A F. Inducing Passive Nonlinear Energy Sinks in Vibrating Systems[J]. Journal of Vibration and Acoustics, 2001, 123(3): 324-332.
- [6] AUBRY S, KOPIDAKIS G, MORGANTE A M, et al. Analytic Conditions for Targeted Energy Transfer Between Nonlinear Oscillators or Discrete Breathers[J]. Physica B: Condensed Matter, 2001, 296(1/2/3): 222-236.
- [7] KOPIDAKIS G, AUBRY S, TSIRONIS G P. Targeted Energy Transfer Through Discrete Breathers in Nonlinear Systems[J]. Physical Review Letters, 2001, 87(16): 165501.
- [8] 张也弛, 孔宪仁. 非线性耦合振子间产生靶能量传递的初始条件 [J]. 哈尔滨工业大学学报, 2012, 44(7): 21-26.
ZHANG Yechi, KONG Xianren. Initial Conditions for Targeted Energy Transfer in Coupled Nonlinear Oscillators[J]. Journal of Harbin Institute of Technology, 2012, 44(7): 21-26.
- [9] WANG J J, WIERSCHEM N, SPENCER JR B F, et al. Experimental Study of Track Nonlinear Energy Sinks for Dynamic Response Reduction[J]. Engineering Structures, 2015, 94: 9-15.
- [10] 王菁菁, 浩文明, 吕西林. 轨道非线性能量阱阻尼对其减振性能的影响 [J]. 振动与冲击, 2017, 36(24): 30-34, 50.
WANG Jingjing, HAO Wenming, LÜ Xilin. Influence of Track Nonlinear Energy Sink Damping on Its Vibration Reduction Performance[J]. Journal of Vibration and Shock, 2017, 36(24): 30-34, 50.
- [11] 王菁菁, 浩文明, 刘志彬. 采用不同轨道形状的轨道非线性能量阱减振性能研究 [J]. 防灾减灾学报, 2018, 34(1): 39-45.
WANG Jingjing, HAO Wenming, LIU Zhibin. Track Nonlinear Energy Sink for Seismic Response Reduction Using Different Track Shapes[J]. Journal of Disaster Prevention and Reduction, 2018, 34(1): 39-45.
- [12] WANG J J, WIERSCHEM N E, SPENCER JR B F, et al. Track Nonlinear Energy Sink for Rapid Response Reduction in Building Structures[J]. Journal of Engineering Mechanics, 2015, 141(1): 04014104.
- [13] WANG J J, WANG B, WIERSCHEM N, et al. Dynamic Analysis of Track Nonlinear Energy Sinks Subjected to Simple and Stochastic Excitations[J]. Earthquake Engineering & Structural Dynamics, 2020, 49(9): 863-883.
- [14] 王菁菁, 李浩博, 刘志彬. 高层结构附加轨道非线性能量阱减振性能研究 [J]. 振动与冲击, 2020, 39(9): 173-180.
WANG Jingjing, LI Haobo, LIU Zhibin. Track Nonlinear Energy Sink Attached to a High-Rise Building for Response Mitigation[J]. Journal of Vibration and Shock, 2020, 39(9): 173-180.

(责任编辑: 姜利民)