

doi:10.3969/j.issn.1673-9833.2020.04.004

基于牵引控制的高阶线性多智能体系统 自适应输出一致性

徐海川, 刘东南, 刘琛, 徐承杰

(湖南工业大学理学院, 湖南株洲 412007)

摘要: 主要研究了高阶线性多智能体系统的自适应控制输出一致性问题。首先, 结合牵引控制, 分别提出了基于静态增益和动态增益牵引输出一致性协议, 得到了输出一致性达到的条件; 然后, 利用 Lyapunov 稳定性理论给出了系统的收敛性分析; 最后, 通过数值仿真验证了所得结论的有效性。

关键词: 输出一致性; 高阶线性多智能体系统; 自适应控制; 牵引控制

中图分类号: TP273

文献标志码: A

文章编号: 1673-9833(2020)04-0022-07

引文格式: 徐海川, 刘东南, 刘琛, 等. 基于牵引控制的高阶线性多智能体系统自适应输出一致性[J]. 湖南工业大学学报, 2020, 34(4): 22-28.

Adaptive Output Consensus of High Order Linear Multi-Agent Systems Based on Pinning Control Under Fixed Topology

XU Haichuan, LIU Dongnan, LIU Chen, XU Chengjie

(College of Science, Hunan University of Technology, Zhuzhou Hunan 412007, China)

Abstract: The adaptive output consensus of high order linear multi-agent systems is mainly investigated. Firstly, combined with pinning control, output consensus protocols based on static and dynamic gains have been proposed. And the conditions of output consensus are obtained. Then, the convergency analysis is presented by using Lyapunov stability theory. Finally, the validity of the proposed methods is verified by numerical simulations.

Keywords: output consensus; high order linear multi-agent systems; adaptive control; pinning control

0 引言

近年来, 多智能体系统在无人机协同工作、机器人编队, 以及卫星编队等领域的广泛应用^[1-2], 引起

了学者们极大的兴趣。在多智能体系统相关研究中, 一致性问题扮演着重要的角色, 是多智能体系统协调控制的一个核心问题。影响系统的一致性行为的主要因素是网络节点的动态、网络拓扑。许多学者在不同

收稿日期: 2019-11-21

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(61703154), 湖南省自然科学基金资助项目(2019JJ60061)

作者简介: 徐海川(1997-), 男, 山东德州人, 湖南工业大学硕士生, 主要研究方向为多智能体系统协调控制,

E-mail: 15197318030@163.com

通信作者: 徐承杰(1982-), 男, 湖北汉川人, 湖南工业大学副教授, 博士, 硕士生导师, 主要从事多智能体系统协调控制, 神经网络及混杂系统稳定性方面的教学与研究, E-mail: xu-chengjie@163.com

网络环境下, 对各种动态的多智能体系统一致性展开了深入研究^[3-7]。

一致性主要要求网络中各节点最终的状态达到某一公共物理量, 但许多实际问题中, 如电网、机车牵引等, 往往要求各节点输出达到一致, 这就是输出一致性。输出一致性是一致性(状态一致)问题的一个扩展, 其应用已十分广泛, 而相关理论并不丰富。因此, 展开对多智能体系统输出一致性的研究显得尤为重要。

已有学者对多智能体系统的输出一致性问题^[8-11]做了一些相关研究, 如文献[8]利用输出调节的思想, 将辅助干扰视为领导者, 研究了基于输出调节理论的一致性输出一致性问题。文献[9]研究了最优输出一致性问题。文献[10]在切换拓扑下, 利用低增益反馈技术, 研究了同时具有输入饱和和外部干扰的离散时间多智能体系统输出一致性问题。但上述结论都使用了拉普拉斯矩阵的特征值等全局信息, 因而不是完全的分分布式控制。文献[11]在未知控制方向的情形下, 研究了高阶线性多智能体系统的自适应输出一致性, 通过自适应策略的引入, 使得输出一致性的条件不依赖于全局信息, 因而相应的输出一致性协议是完全分布式的。受到文献[11]的启发, 本研究结合牵引控制^[5]与自适应策略, 研究了高阶线性多智能体系统的输出一致性问题。数值仿真结果表明, 牵引控制的使用, 可以降低控制成本; 而自适应策略可保证本文得到的输出一致性条件不需全局信息。

1 预备知识

在多智能体系统中, 智能体和其相邻智能体之间的通信需要借助网络拓扑图来实现。一个无向图 $G=(V, E, \mathbf{W})$ 由一个顶点集 $V=\{v_1, v_2, \dots, v_N\}$ 、一个边集 $E \subseteq V \times V$ 和一个邻接矩阵 $\mathbf{W}=[w_{ij}] \in \mathbf{R}^{N \times N}$ 所组成。若一条边 $(i, j) \in E$ 或 $(j, i) \in E$, 那么这个顶点 $v_i(v_j)$ 可以传输或接受来自顶点 $v_j(v_i)$ 的信息。 G 是一个无向图的充要条件是 $(v_i, v_j) \in E \Leftrightarrow (v_j, v_i) \in E$ 。对于一个无向图的邻接矩阵 $\mathbf{W}=[w_{ij}]$, 如果 $(i, j) \in E$, 那么 $w_{ij}=w_{ji}=1$; 否则 $w_{ij}=0$ 。在 G 上从顶点 v_i 到顶点 v_m 的一条路径是形如 $(v_i, v_{j_1}, \dots, v_{j_{m-1}}, v_m)$, $l=1, 2, \dots, m-1$, 在 E 中的有序边的序列。如果在无向图中任意两个不同的顶点有一条路径, 那么这个无向图是连通的。图 G 的入度矩阵 \mathbf{D} 被定义为 $\mathbf{D}=\text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_N)$, 其中

$d_i = \sum_{j=1, i \neq j}^N w_{ij}$ 。定义一个无向图 G 中的拉普拉斯矩阵为 $\mathbf{L}=\mathbf{D}-\mathbf{W}$, 其中

$$l_{ij} = \begin{cases} \sum_{j=1, i \neq j}^N w_{ij}, & i = j; \\ -w_{ij}, & i \neq j. \end{cases}$$

注意到在无向图中 $\mathbf{L}=\mathbf{L}^T > 0$ 是成立的, 并且 $\mathbf{1}$ 是拉普拉斯矩阵的特征值 0 对应的特征向量。

考虑一个由 N 个跟随者和一个领导者的多智能体系统, 并给出第 i ($i=1, 2, \dots, N$) 个智能体的动力学方程如下:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_i(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}_i(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}_i(t), \\ \mathbf{y}_i(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}_i(t). \end{cases} \quad (1)$$

式中: $\mathbf{x}_i(t) \in \mathbf{R}^n$ 表示第 i 个智能体的状态;

$\mathbf{u}_i(t) \in \mathbf{R}^p$ 表示第 i 个智能体的输入;

$\mathbf{y}_i(t) \in \mathbf{R}^m$ 表示第 i 个智能体的输出;

$\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 表示状态矩阵, $\mathbf{B} \in \mathbf{R}^{n \times p}$ 表示输入矩阵,

$\mathbf{C} \in \mathbf{R}^{m \times p}$ 表示输出矩阵。

下标为 0 的表示领导者, 其动力学方程如下:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_0(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}_0(t), \\ \mathbf{y}_0(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}_0(t). \end{cases} \quad (2)$$

式中: $\mathbf{x}_0(t) \in \mathbf{R}^n$ 表示领导者的状态;

$\mathbf{y}_0(t) \in \mathbf{R}^m$ 表示领导者的输出。

领导者作为一个特殊的智能体, 与其他智能体不同, 它是一个独立的智能体, 而且它的动力学不受其他智能体的影响。

定义 1 对于上述多智能体系统, 对任何初值 $\mathbf{x}_i(0)$, $i=1, 2, \dots, N$, 若调节误差 $\delta_i=y_i-y_0$ 满足

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\delta_i(t)\| = \lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{y}_i(t) - \mathbf{y}_0(t)\| = 0, \quad i=1, 2, \dots, N, \quad (3)$$

则领导跟随系统可达到输出一致。

下面给出控制器的设计:

$$\mathbf{u}_i(t) = \mathbf{K} \left(\sum_{j \in \mathcal{S}_i} w_{ij} (\mathbf{y}_j(t) - \mathbf{y}_i(t)) + h_i (\mathbf{y}_0(t) - \mathbf{y}_i(t)) \right), \quad i=1, 2, \dots, N. \quad (4)$$

式中: \mathbf{K} 为待定的控制增益矩阵;

\mathcal{S}_i 为节点 i 的全体相邻节点集合。

如果跟随者 i 可以接受到领导者的信息, 则 $h_i=1$; 否则, $h_i=0$ 。下面给出相关引理及假设。

引理 1^[10] 令矩阵 $\mathbf{C} \in \mathbf{R}^{m \times n}$, 满足 Penrose 条件的广义逆 \mathbf{X} 是存在且唯一的, 而且如果 $\text{rank } \mathbf{C}=n$, 那么 $\mathbf{C}^\dagger \mathbf{C} = \mathbf{I}_n$; 如果 $\text{rank } \mathbf{C}=m$, 那么 $\mathbf{C}^\dagger \mathbf{C} = \mathbf{I}_m$ 。

引理 2^[11] 令矩阵 $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbf{R}^{n \times n}$, 如果矩阵对 (\mathbf{A}, \mathbf{B}) 是可稳定的, 则存在唯一的对称正定矩阵 \mathbf{P} 满足代数 Riccati 方程

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{B}^T \mathbf{P} + \mathbf{I}_n = \mathbf{0}.$$

引理 3^[12] 如果拉普拉斯矩阵 $L \in (l_{ij}) \in \mathbf{R}^{N \times N}$ 是对称不可约矩阵, 则有 L 为半正定矩阵, 并且对于任意矩阵 $H = \text{diag}(h, 0, \dots, 0)$, 且 $h > 0$, 都有矩阵 $L+H$ 特征值是正的, 即矩阵 $L+H$ 为正定矩阵。

假设 1 矩阵对 (A, B) 是可稳定的。

假设 2 图 \bar{G} 是无向连通的。

假设 3 矩阵 C 是满秩的, 即 $\text{rank } C = m$ 。

注 1 由于本研究中是带有领导者的拓扑结构, 因此假设 2 要在有领导者的前提下, 保证拓扑图是连通的, 即图 \bar{G} 是包含有领导者的拓扑图, 即图 \bar{G} 包含 G 和顶点为 0 的领导者。

2 静态增益多智能体系统输出一致性

本节在固定拓扑下, 针对静态增益的输出一致性展开研究。首先, 提出了固定增益下的输出一致性协议; 然后, 给出了相应的输出一致性收敛分析与一致性达到的条件。

由式 (3) 给出的多智能体系统第 i 个智能体的输出误差为

$$\delta_i(t) = y_i(t) - y_0(t). \quad (5)$$

由式 (5) 可得

$$\begin{aligned} \dot{\delta}_i(t) &= \dot{y}_i(t) - \dot{y}_0(t) = C\dot{x}_i(t) - C\dot{x}_0(t) = \\ & CAx_i(t) + CBu_i(t) - CAx_0(t). \end{aligned} \quad (6)$$

由引理 1, 式 (6) 可以改写为

$$\begin{aligned} \dot{\delta}_i(t) &= \dot{y}_i(t) - \dot{y}_0(t) = C\dot{x}_i(t) - C\dot{x}_0(t) = \\ & CAx_i(t) + CBu_i(t) - CAx_0(t) = \\ & CAC^\dagger(Cx_i(t) - Cx_0(t)) + CBu_i(t) = CAC^\dagger\delta_i(t) + \\ & CBK \left(\sum_{j \in \mathcal{S}_i} w_{ij} (y_j(t) - y_i(t)) + h_i (y_0(t) - y_i(t)) \right) = \\ & CAC^\dagger\delta_i(t) + CBK \left(\sum_{j=1}^N w_{ij} ((y_j(t) - y_0(t)) - \right. \\ & \left. (y_i(t) - y_0(t))) - h_i\delta_i(t) \right) = CAC^\dagger\delta_i(t) + \\ & CBK \left(\sum_{j=1}^N w_{ij} (\delta_j(t) - \delta_i(t)) - h_i\delta_i(t) \right) = \\ & CAC^\dagger\delta_i(t) + CBK \left(-\sum_{j=1}^N l_{ij}\delta_j(t) - h_i\delta_i(t) \right), \end{aligned} \quad (7)$$

令 $\delta(t) = (\delta_1^\top(t), \delta_2^\top(t), \dots, \delta_N^\top(t))^\top$, $\tilde{L} = L + H$,

$H = \text{diag}(h_1, h_2, \dots, h_N)$, 可得

$$\dot{\delta}(t) = (I_N \otimes CAC^\dagger - \tilde{L} \otimes CBK) \delta(t). \quad (8)$$

下面给出定理 1 及其证明。

定理 1 若假设 1~3 成立, 在静态自适应协议式 (4) 下, 要使系统 (1) 达到输出一致, 即多智能体

线性系统中领导跟随者都满足式 (3), 则需要以下条件成立:

$K = \hat{B}^\top P$, 其中 $\hat{B} = CB$, P 是代数 Riccati 方程 $P\hat{A} + \hat{A}^\top P - 2\lambda_1(\tilde{L})P\hat{B}\hat{B}^\top P + I = 0$ 的唯一解, $\hat{A} = CAC^\dagger$,

并且 $\lambda_1(\tilde{L})$ 为矩阵 \tilde{L} 的最小特征值。

证明 考虑如下李雅普诺夫候选函数

$$V(t) = \delta^\top(t) (I_N \otimes P) \delta(t), \quad (9)$$

因此对于 $t \in (0, +\infty)$ 以及式 (8) 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= 2\delta^\top(t) (I_N \otimes P) \dot{\delta}(t) = \\ & 2\delta^\top(t) (I_N \otimes P) (I_N \otimes CAC^\dagger - \tilde{L} \otimes CBK) \delta(t) = \\ & 2\delta^\top(t) (I_N \otimes P) (I_N \otimes CAC^\dagger) - \\ & (I_N \otimes P) (\tilde{L} \otimes CBK) \delta(t) = \\ & 2\delta^\top(t) (I_N \otimes PCAC^\dagger - \tilde{L} \otimes PCBK) \delta(t) = \\ & \delta^\top(t) (I_N \otimes (PCAC^\dagger + C^{\dagger\top} A^\top C^\top P)) \delta(t) - \\ & 2\delta^\top(t) (\tilde{L} \otimes PCBK) \delta(t). \end{aligned} \quad (10)$$

令 $\hat{A} = CAC^\dagger$, $\hat{B} = CB$, 代入式 (10) 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \delta^\top(t) (I_N \otimes (P\hat{A} + \hat{A}^\top P)) \delta(t) - \\ & 2\delta^\top(t) (\tilde{L} \otimes P\hat{B}K) \delta(t) = \\ & \delta^\top(t) (I_N \otimes (P\hat{A} + \hat{A}^\top P) - 2\tilde{L} \otimes P\hat{B}K) \delta(t) = \\ & \delta^\top(t) (I_N \otimes (P\hat{A} + \hat{A}^\top P) - 2(\tilde{L} \otimes P\hat{B}\hat{B}^\top P)) \delta(t), \end{aligned} \quad (11)$$

又因为矩阵 \tilde{L} 为实对称矩阵, 因此存在正交矩阵 Q , 使得 $Q^\top \tilde{L} Q = \Lambda = \text{diag}(\lambda_1(\tilde{L}), \lambda_2(\tilde{L}), \dots, \lambda_N(\tilde{L}))$,

因此令 $\delta(t) = (Q \otimes I_n) \eta(t)$, 则式 (11) 可写为

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \eta^\top(t) (Q^\top \otimes I_n) (I_N \otimes (P\hat{A} + \hat{A}^\top P) - \\ & 2(\tilde{L} \otimes P\hat{B}\hat{B}^\top P)) (Q \otimes I_n) \eta(t) = \\ & \eta^\top(t) (Q^\top \otimes (P\hat{A} + \hat{A}^\top P) - 2(Q^\top \tilde{L} \otimes P\hat{B}\hat{B}^\top P)) \cdot \\ & (Q \otimes I_n) \eta(t) = \eta^\top(t) (Q^\top Q \otimes (P\hat{A} + \hat{A}^\top P) - \\ & 2(Q^\top \tilde{L} Q \otimes P\hat{B}\hat{B}^\top P)) \eta(t) = \\ & \eta^\top(t) (I_N \otimes (P\hat{A} + \hat{A}^\top P) - 2(\Lambda \otimes P\hat{B}\hat{B}^\top P)) \eta(t). \end{aligned} \quad (12)$$

令 $R_i = P\hat{A} + \hat{A}^\top P - 2\lambda_i(\tilde{L})P\hat{B}\hat{B}^\top P$, $i = 1, 2, \dots, N$,

则式 (12) 可写为

$$\dot{V}(t) = \eta^\top(t) \begin{pmatrix} R_1 & & & \\ & R_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & R_N \end{pmatrix} \eta(t). \quad (13)$$

在假设 2 的条件下, 根据引理 3, 有

$$0 < \lambda_1(\tilde{L}) \leq \lambda_2(\tilde{L}) \leq \dots \leq \lambda_N(\tilde{L}),$$

且矩阵 \tilde{L} 是正定的, 可得

$$\mathbf{R}_1 = -\mathbf{I} < 0, \quad (14)$$

因而可得

$$\sum_{i=1}^N \eta_i^T(t) \mathbf{R}_1 \eta_i(t) < 0, \quad (15)$$

即 $\dot{V}(t) < 0$ 。因此, 多智能体系统 (1) (2) 是稳定的, 这意味着式 (3) 成立, 因此定理 1 成立。证毕。

3 动态增益多智能体系统输出一致性

本节在高阶多智能体系统 (1) (2) 的基础上, 重新设定控制协议, 同时给出满足输出一致定义的增益矩阵 \mathbf{K} ; 然后, 给出基于固定拓扑下的输出一致性结果。

考虑如下控制器

$$\mathbf{u}_i(t) = \mathbf{d}_i(t) \mathbf{K} \left(\sum_{j \in \mathcal{S}_i} w_{ij} (y_j(t) - y_i(t)) + h_i (y_0(t) - y_i(t)) \right), \quad (16)$$

$$i = 1, 2, \dots, N;$$

$$\dot{\mathbf{d}}_i(t) = \tau_i \left(\sum_{j \in \mathcal{S}_i} w_{ij} (y_j(t) - y_i(t))^T \mathbf{PCBK} (y_j(t) - y_i(t)) + 2h_i (y_0(t) - y_i(t))^T \mathbf{PCBK} (y_0(t) - y_i(t)) \right). \quad (17)$$

式 (16) (17) 中: \mathbf{K} 是待定的控制增益矩阵;

$\mathbf{d}_i(t)$ 表示自适应增益, 且 $\mathbf{d}_i(0) > 0$;

$\tau_i > 0$, 是 $\mathbf{d}_i(t)$ 的增益。

由式 (3) 可得

$$\dot{\delta}_i(t) = \mathbf{CAC}^\dagger \delta_i(t) + \mathbf{CBK} \left(-\sum_{j=1}^N l_{ij} \delta_j(t) - h_i \delta_i(t) \right). \quad (18)$$

再令

$$\delta(t) = (\delta_1^T(t), \delta_2^T(t), \dots, \delta_N^T(t))^T,$$

$$\hat{\mathbf{D}} = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_N),$$

可得

$$\dot{\delta}(t) = (\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{CAC}^\dagger - \hat{\mathbf{D}}\tilde{\mathbf{L}} \otimes \mathbf{CBK}) \delta(t). \quad (19)$$

下面给出定理 2 及其证明。

定理 2 若假设 1~3 成立, 在动态自适应协议式 (16) 下, 要使系统 (1) 达到输出一致, 即多智能体线性系统中领导跟随者都满足式 (3), 则需要以下条件成立:

$\mathbf{K} = \hat{\mathbf{B}}^T \mathbf{P}$, 其中 $\hat{\mathbf{B}} = \mathbf{CB}$, $\mathbf{P} > 0$ 是代数 Riccati 方程 $\mathbf{P}\hat{\mathbf{A}} + \hat{\mathbf{A}}^T \mathbf{P} - 2\mathbf{P}\hat{\mathbf{B}}\hat{\mathbf{B}}^T \mathbf{P} + \mathbf{I} = \mathbf{0}$ 的唯一解, $\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{CAC}^\dagger$ 。并且 λ_1 为矩阵 \tilde{L} 的最小特征值, 同时 $d > \frac{1}{\lambda_1(\tilde{L})}$ 。

证明 考虑如下李雅普诺夫候选函数:

$$V(t) = \delta^T(t) (\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{P}) \delta(t) + \sum_{i=1}^N \frac{(d_i(t) - d)^2}{2\tau_i}, \quad (20)$$

因此对于 $t \in (0, +\infty)$ 以及式 (19) 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= 2\delta^T(t) (\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{P}) \dot{\delta}(t) + \sum_{i=1}^N \frac{(d_i(t) - d) \dot{d}_i(t)}{\tau_i} = \\ &= 2\delta^T(t) (\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{P}) (\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{CAC}^\dagger - \hat{\mathbf{D}}\tilde{\mathbf{L}} \otimes \mathbf{CBK}) \delta(t) + \\ &= \sum_{i=1}^N (d_i(t) - d) \left(\sum_{j \in \mathcal{S}_i} w_{ij} (\delta_j(t) - \delta_i(t))^T \mathbf{PCBK} (\delta_j(t) - \right. \\ &= \left. \delta_i(t)) + 2h_i \delta_i^T(t) \mathbf{PCBK} \delta_i(t) \right) = \\ &= 2\delta^T(t) ((\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{P}) (\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{CAC}^\dagger) - \\ &= (\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{P}) (\hat{\mathbf{D}}\tilde{\mathbf{L}} \otimes \mathbf{CBK})) \delta(t) + \\ &= \sum_{i=1}^N (d_i(t) - d) \sum_{j=1}^N w_{ij} \delta_j^T(t) \mathbf{PCBK} (\delta_j(t) - \delta_i(t)) - \\ &= \sum_{i=1}^N (d_i(t) - d) \sum_{j=1}^N w_{ij} \delta_i^T(t) \mathbf{PCBK} (\delta_j(t) - \delta_i(t)) + \\ &= 2 \sum_{i=1}^N (d_i(t) - d) h_i \delta_i^T(t) \mathbf{PCBK} \delta_i(t) = \\ &= 2\delta^T(t) (\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{PCAC}^\dagger - \hat{\mathbf{D}}\tilde{\mathbf{L}} \otimes \mathbf{PCBK}) \delta(t) - \\ &= \sum_{j=1}^N (d_j(t) - d) \delta_j^T(t) \mathbf{PCBK} \sum_{i=1}^N w_{ji} (\delta_i(t) - \delta_j(t)) - \\ &= \sum_{i=1}^N (d_i(t) - d) \delta_i^T(t) \mathbf{PCBK} \sum_{j=1}^N w_{ij} (\delta_j(t) - \delta_i(t)) + \\ &= 2 \sum_{i=1}^N (d_i(t) - d) h_i \delta_i^T(t) \mathbf{PCBK} \delta_i(t) = \\ &= \delta^T(t) (\mathbf{I}_N \otimes (\mathbf{PCAC}^\dagger + \mathbf{C}^{\dagger T} \mathbf{A}^T \mathbf{C}^T \mathbf{P})) \delta(t) - \\ &= 2\delta^T(t) (\hat{\mathbf{D}}\tilde{\mathbf{L}} \otimes \mathbf{PCBK}) \delta(t) + \\ &= \sum_{j=1}^N (d_j(t) - d) \delta_j^T(t) \mathbf{PCBK} \sum_{i=1}^N l_{ji} \delta_i(t) + \\ &= \sum_{i=1}^N (d_i(t) - d) \delta_i^T(t) \mathbf{PCBK} \sum_{j=1}^N l_{ij} \delta_j(t) + \\ &= 2 \sum_{i=1}^N (d_i(t) - d) h_i \delta_i^T(t) \mathbf{PCBK} \delta_i(t), \quad (21) \end{aligned}$$

为了便于接下来的计算, 此时将 \tilde{L} 分解为 $\tilde{L} = \mathbf{D} + \mathbf{H}$, 可以得出:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \delta^T(t) (\mathbf{I}_N \otimes (\mathbf{PCAC}^\dagger + \mathbf{C}^{\dagger T} \mathbf{A}^T \mathbf{C}^T \mathbf{P})) \delta(t) - \\ &= 2\delta^T(t) (\hat{\mathbf{D}}\tilde{\mathbf{L}} \otimes \mathbf{PCBK}) \delta(t) - 2\delta^T(t) (\hat{\mathbf{D}}\mathbf{H} \otimes \mathbf{PCBK}) \cdot \\ &= \delta(t) + 2 \sum_{i=1}^N d_i(t) \delta_i^T(t) \mathbf{PCBK} \sum_{j=1}^N l_{ij} \delta_j(t) - \\ &= 2 \sum_{i=1}^N d \delta_i^T(t) \mathbf{PCBK} \sum_{j=1}^N l_{ij} \delta_j(t) + \\ &= 2 \sum_{i=1}^N d_i(t) h_i \delta_i^T(t) \mathbf{PCBK} \delta_i(t) - \\ &= 2 \sum_{i=1}^N d h_i \delta_i^T(t) \mathbf{PCBK} \delta_i(t) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \delta^T(t)(I_N \otimes (PCAC^T + C^{T^T}A^T C^T P))\delta(t) - 2\delta^T(t) \cdot \\ & (\hat{DL} \otimes PCBK)\delta(t) - 2\delta^T(t)(\hat{DH} \otimes PCBK)\delta(t) + \\ & 2\delta^T(t)(\hat{DL} \otimes PCBK)\delta(t) - \\ & 2\delta^T(t)(dL \otimes PCBK)\delta(t) + \\ & 2\delta^T(t)(\hat{DH} \otimes PCBK)\delta(t) - \\ & 2\delta^T(t)(dH \otimes PCBK)\delta(t) = \\ & \delta^T(t)(I_N \otimes (PCAC^T + C^{T^T}A^T C^T P))\delta(t) - \\ & 2\delta^T(t)(d\tilde{L} \otimes PCBK)\delta(t). \end{aligned} \quad (22)$$

令 $\hat{A} = CAC^+$ 、 $\hat{B} = CB$ ，代入式 (22) 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) = & \delta^T(t)(I_N \otimes (P\hat{A} + \hat{A}^T P))\delta(t) - \\ & 2\delta^T(t)(d\tilde{L} \otimes P\hat{B}K)\delta(t) = \delta^T(t) \cdot \\ & (I_N \otimes (P\hat{A} + \hat{A}^T P) - 2d\tilde{L} \otimes P\hat{B}K)\delta(t) = \\ & \delta^T(t)(I_N \otimes (P\hat{A} + \hat{A}^T P) - \\ & 2d(\tilde{L} \otimes P\hat{B}\hat{B}^T P))\delta(t), \end{aligned} \quad (23)$$

又因为矩阵 \tilde{L} 为实对称矩阵，因此存在正交矩阵 Q ，使得

$$Q^T \tilde{L} Q = A = \text{diag}(\lambda_1(\tilde{L}), \lambda_2(\tilde{L}), \dots, \lambda_N(\tilde{L})),$$

令 $\delta(t) = (Q \otimes I_n)\eta(t)$ ，则式 (23) 可写为如下形式：

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) = & \eta^T(t)(Q^T \otimes I_N)(I_N \otimes (P\hat{A} + \hat{A}^T P) - \\ & 2d\lambda_1(\tilde{L})(\tilde{L} \otimes P\hat{B}\hat{B}^T P))(Q \otimes I_n)\eta(t) = \\ & \eta^T(t)(Q^T \otimes (P\hat{A} + \hat{A}^T P) - \\ & 2d\lambda_1(\tilde{L})(Q^T \tilde{L} \otimes P\hat{B}\hat{B}^T P)) \cdot \\ & (Q \otimes I_n)\eta(t) = \eta^T(t)(Q^T Q \otimes (P\hat{A} + \hat{A}^T P) - \\ & 2d\lambda_1(\tilde{L})(Q^T \tilde{L} Q \otimes P\hat{B}\hat{B}^T P))\eta(t) = \eta^T(t)(I_N \otimes \\ & (P\hat{A} + \hat{A}^T P) - 2d(A \otimes P\hat{B}\hat{B}^T P))\eta(t), \end{aligned} \quad (24)$$

在假设 2 的条件下，根据引理 3，有

$$0 < \lambda_1(\tilde{L}) \leq \lambda_2(\tilde{L}) \leq \dots \leq \lambda_N(\tilde{L}),$$

且矩阵 \tilde{L} 是正定的。

由 $d > \frac{1}{\lambda_1(\tilde{L})}$ ，可得

$$P\hat{A} + \hat{A}^T P - 2P\hat{B}\hat{B}^T P + I < 0, \quad (25)$$

因此有

$$P\hat{A} + \hat{A}^T P - 2P\hat{B}\hat{B}^T P = -I < 0, \quad (26)$$

然后可得

$$\eta^T(t)(I_N \otimes (P\hat{A} + \hat{A}^T P) - 2d(A \otimes P\hat{B}\hat{B}^T P))\eta(t) < 0, \quad (27)$$

即 $\dot{V}(t) < 0$ 。

因此，多智能体系统 (1) 和系统 (2) 是稳定的，这就意味着领导跟随系统可以达到输出一致，故可得定理 2 成立。证毕。

4 模型仿真

本节借助 Matlab 软件给出仿真，分别对固定增益和动态增益下的输出一致性问题进行分析，并验证结论的合理性。

选取 $N=6$ ，即考虑整个系统中含有 6 个跟随者，同时选取一个领导者，记为 $R=1$ 。在这个仿真中，要用到的矩阵 A 、 B 、 C 的取值分别如下：

$$A = \begin{pmatrix} 0.4 & 4 & 0 \\ 0.5 & 0.8 & 6 \\ 0.7 & 0 & 0.7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 5.8 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

由上述所给的矩阵形式，可知矩阵对 (A, B) 是可稳定的，即满足假设 1；且 $\text{rank } C=2=m$ ，即满足假设 3，故矩阵 C 是满秩的。取每个智能体分别为三维，即 $x_i \in \mathbf{R}^3, i=1, 2, \dots, 6$ 。此时每个跟随者的输出维数为二维，即 $y_i \in \mathbf{R}^2, i=1, 2, \dots, 6$ 。含有 7 个智能体的高阶多智能体系统的拓扑图如图 1 所示，由图 1 可知网络拓扑图是满足假设 2 的。

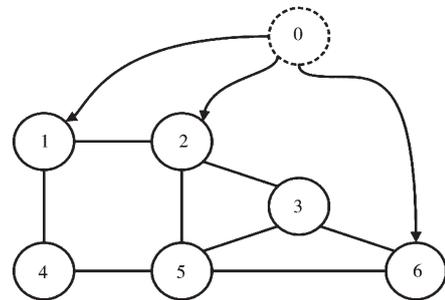
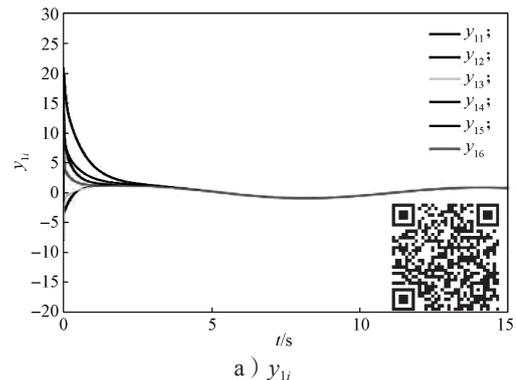


图 1 高阶多智能体系统拓扑图

Fig. 1 Topology of high-order multi-agent systems

首先，对固定增益下的仿真进行分析。对于每个跟随者的输出变化图，分别在图 2 中给出；同时给出了在时间间隔 $[0, 20]$ s 上每个跟随者的输出误差变化情况，如图 3 所示。



a) y_{1i}

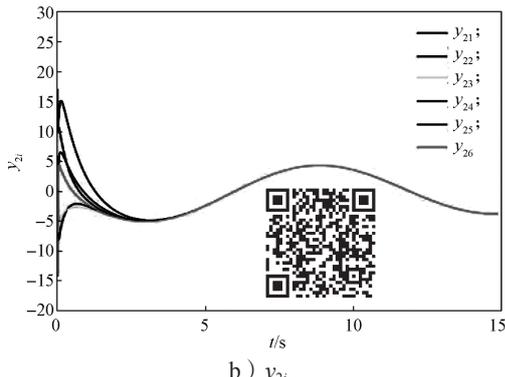


图 2 静态增益下 $y_{1i}, y_{2i} (i=1, 2, \dots, 6)$ 的轨迹
Fig. 2 Trajectory of $y_{1i}, y_{2i} (i=1, 2, \dots, 6)$ under static gain

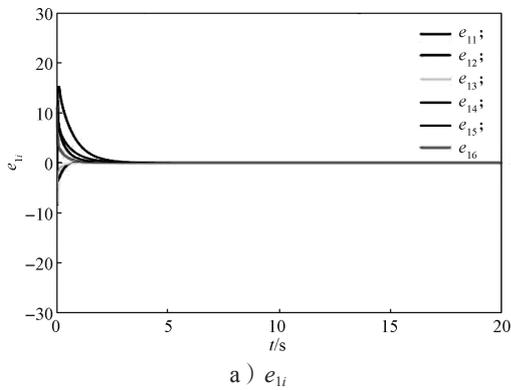


图 3 静态增益下的输出误差 $e_{1i}, e_{2i} (i=1, 2, \dots, 6)$ 曲线
Fig. 3 Output error curves of $e_{1i}, e_{2i} (i=1, 2, \dots, 6)$ under static gain

由图 2 和图 3 所示静态增益下的仿真结果曲线可以说明, 对于前文给出的定理 1 的分析和证明都是正确而且合理的。

其次, 对动态增益下的仿真进行分析。对于每个跟随者的输出变化图, 分别在图 4 中给出; 同时给出了在时间间隔 $[0, 10]$ s 上每个跟随者的输出误差变化情况, 如图 5 所示; 以及其自适应增益的值, 如图 6 所示。由图 4、图 5 和图 6 所示动态增益下的仿真结果曲线可以得知, 对于定理 2 的分析和证明都是正确并且合理的。

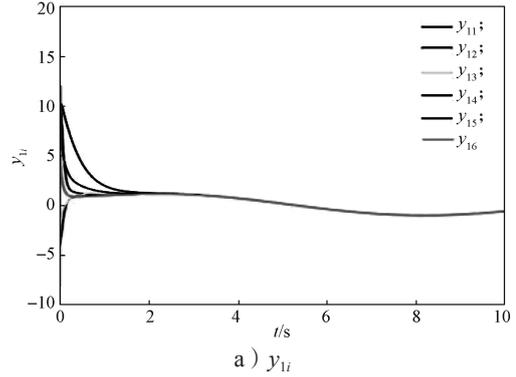


图 4 动态增益下 $y_{1i}, y_{2i} (i=1, 2, \dots, 6)$ 的轨迹
Fig. 4 Trajectory of $y_{1i}, y_{2i} (i=1, 2, \dots, 6)$ under dynamic gain

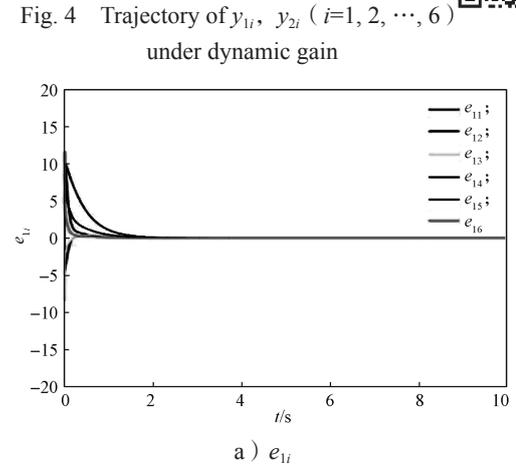


图 5 动态增益下的输出误差 $e_{1i}, e_{2i} (i=1, 2, \dots, 6)$ 曲线
Fig. 5 Output error curves of $e_{1i}, e_{2i} (i=1, 2, \dots, 6)$ under dynamic gain

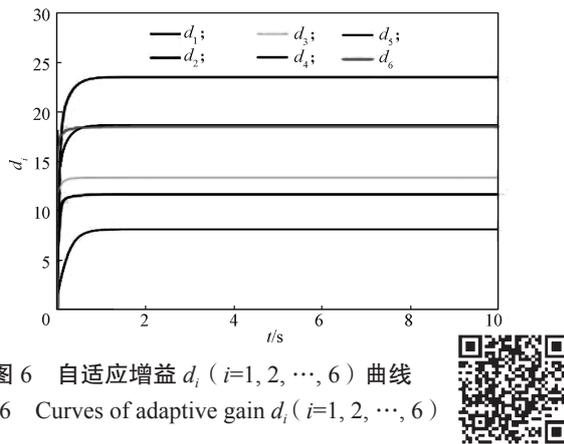


图6 自适应增益 d_i ($i=1, 2, \dots, 6$) 曲线

Fig. 6 Curves of adaptive gain d_i ($i=1, 2, \dots, 6$)

5 结语

本文基于李雅普诺夫稳定性理论证明了多智能体系统的稳定性, 并利用代数黎卡提方程等证明了结论的严谨性和合理性。本文的难点在于开始设计算法的方案以及李雅普诺夫候选函数的选取问题, 由于李雅普诺夫函数并不是明确给出的, 因此在其选取方面的问题上是一个大的挑战。最后, 通过 Matlab 仿真对给出的整个结论进行了验证, 模型仿真结果表明所给出的系统算法是合理的。

参考文献:

- [1] REN W, BRESAD R W, ATKINS E M. Information Consensus in Multivehicle Cooperative Control: Collective Group Behavior Through Local Interaction[J]. IEEE Control Systems Magazine, 2007, 27(2): 71-82.
- [2] CHEN J, CAO X, CHENG P, et al. Distributed Collaborative Control for Industrial Automation with Wireless Sensor and Actuator Networks[J]. Transactions on Industrial Electronics, 2010, 57(12): 4219-4229.
- [3] LI Z K, WEN G H, DUAN Z S, et al. Designing Fully Distributed Consensus Protocols for Linear Multi-Agent Systems with Directed Graphs[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2015, 60(4): 1152-1157.
- [4] LIU K, JI Z, XIE G M, et al. Consensus for

Heterogeneous Multi-Agent System Under Fixed and Switching Topologies[J]. Journal of the Franklin Institute, 2015, 352(9): 3670-3683.

- [5] XU C J, ZHAO Y L, QIN B, et al. Adaptive Synchronization of Coupled Harmonic Oscillators Under Switching Topology[J]. Journal of the Franklin Institute, 2019, 356(2): 1067-1087.
- [6] HUA C C, YOU X, GUAN X P. Adaptive Leader-Following Consensus for Second-Order Time-Varying Nonlinear Multiagent Systems[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2017, 47(6): 1532-1539.
- [7] XU W Y, HO D W C, LI L L, et al. Event-Triggered Schemes on Leader-Following Consensus of General Linear Multiagent Systems Under Different Topologies[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2017, 47(1): 212-223.
- [8] HAN T, GUAN Z H, XIAO B, et al. Distributed Output Consensus of Heterogeneous Multi-Agent Systems Via an Output Regulation Approach[J]. Neurocomputing, 2019, 360: 131-137.
- [9] TANG Y T, DENG Z H, HONG Y G. Optimal Output Consensus of High-Order Multiagent Systems with Embedded Technique[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2019, 49(5): 1768-1779.
- [10] SU H S, YE Y Y, QIU Y, et al. Semi-Global Output Consensus for Discrete-Time Switching Networked Systems Subject to Input Saturation and External Disturbances[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2019, 49(11): 3934-3945.
- [11] SHI L R, LI Y L, LIN Z L. Semi-Global Leader-Following Output Consensus of Heterogeneous Multi-Agent Systems with Input Saturation[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2018, 28(16): 4916-4930.
- [12] BEN-ISRAEL A, GREVILLE T N E. Some Topics in Generalized Inverses of Matrices[M]//Generalized Inverses and Applications. New York: John Wiley, 1976: 125-147.

(责任编辑: 廖友媛)