doi:10.3969/j.issn.1673-9833.2020.01.003

耦合 Riccati 方程数值迭代方法

孟照云，董　宁，余　波，廖淑清

（湖南工业大学 理学院，湖南 株洲 412007）

摘　要：对一类非对称耦合的 Riccati 方程给出了统一的一般形式，用牛顿迭代法和不动点迭代法求解这类方程。在一定条件下证明了这两种迭代方法单调收敛到具有实际意义的最小非负解，并通过数值实验验证了本文所用方法的有效性。

关键词：耦合 Riccati 方程；牛顿迭代法；不动点迭代法；最小非负解

中图分类号：O241.6　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673-9833(2020)01-0014-05

引文格式：孟照云，董　宁，余　波，等. 耦合 Riccati 方程数值迭代方法 [J]. 湖南工业大学学报，2020，34(1)：14-18.

A Numerical Iterative Algorithm for Coupled Riccati Equations

MENG Zhaoyun，DONG Ning，YU Bo，LIAO Shuqing

（College of Science，Hunan University of Technology，Zhuzhou Hunan 412007，China）

Abstract：A unified form is provided for a class of asymmetrically coupled Riccati equations, which are to be solved by using Newton iteration method and fixed point iteration method. Under certain conditions, it is proved that the two iterative methods converge monotonously for the minimum non-negative solution with a practical significance, with the effectiveness of the proposed method verified by numerical experiments.

Keywords：coupled Riccati equation；Newton's method；fixed-point iteration method；minimal non-negative solution

1　研究背景

本文考虑一类耦合非对称代数 Riccati 方程（coupled nonsymmetric algebraic Riccati equation，CNARE）

$$CNR_i(\boldsymbol{X}_1,\ \boldsymbol{X}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{X}_s)=\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{C}_i\boldsymbol{X}_i-\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{D}_i-\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{X}_i+\boldsymbol{B}_i+\sum_{j\neq i}e_{ij}\boldsymbol{X}_j=\boldsymbol{0},\quad (1)$$

式中：$\boldsymbol{X}_i\in\mathbf{R}^{n\times n}$ 为方程的解，$i, j\in U=\{1, 2, \cdots, s\}$，其中 s 是大于 1 的整数；

$\boldsymbol{A}_i\in\mathbf{R}^{m\times m}$，$\boldsymbol{B}_i\in\mathbf{R}^{m\times n}$，$\boldsymbol{C}_i\in\mathbf{R}^{n\times m}$，$\boldsymbol{D}_i\in\mathbf{R}^{m\times n}$ 为方程的系数矩阵；

e_{ij} 为非负常量，且满足列和为 1。

此类方程在粒子输运理论 [1-2]、控制理论 [3] 和马尔可夫链 [4-6] 等领域中有着广泛而深入的应用。在实际建模中，人们对此类方程感兴趣的是其具有实际意义的最小非负解。特别地，当 s=1 时，耦合方程（1）

收稿日期：2019-06-17

基金项目：国家自然科学基金资助青年项目（11801163），湖南省教育厅科学研究基金资助项目（17C0466）

作者简介：孟照云（1995-），女，河南固始人，湖南工业大学硕士生，主要研究方向为计算数学，E-mail：1344201302@qq.com

通信作者：董　宁（1980-），女，山东菏泽人，湖南工业大学讲师，博士，主要从事计算数学方面的教学与研究，E-mail：dongning_158@sina.com

还原成非对称 Riccati 方程

$$Q(X)=XCX-XD-AX+B=\mathbf{0}。$$

其最小非负解的存在性和相关数值求解方法已经得到了充分的研究 [7]。

为了更好地研究更广泛的耦合方程（1）的最小非负解的存在性和相关的数值迭代方法，本文将耦合方程（1）写成如下统一形式：

$$R(X)=XCX-XD-AX+B+\sum_{l=1}^{p}E_lXE_l^{\mathrm{T}}=\mathbf{0}。\quad(2)$$

式中：$A=\begin{bmatrix}A_1&&\\&\ddots&\\&&A_s\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}B_1&&\\&\ddots&\\&&B_s\end{bmatrix}$，$C=\begin{bmatrix}C_1&&\\&\ddots&\\&&C_s\end{bmatrix}$，

$D=\begin{bmatrix}D_1&&\\&\ddots&\\&&D_s\end{bmatrix}$为块对角矩阵；

E_l 为只有 (i, j) 块和 (j, i) 块分别为 $e_{ij}I_n$ 和 $e_{ji}I_n$，其余块都为 0 的矩阵，共有 $p=s(s-1)/2$ 个。

此时解矩阵$X=\begin{bmatrix}X_1&&\\&\ddots&\\&&X_s\end{bmatrix}$，也为块对角矩阵。

本文利用统一形式的耦合方程（2）的系数矩阵，给出牛顿迭代法和一类不动点迭代方法的迭代格式，并给出迭代方法收敛到最小非负解的条件。同时证明上述两类迭代方法从零矩阵开始单调收敛到耦合方程的最小非负解。最后用数值实验验证所提出方法的有效性。

2　定义与预备定理

对任何矩阵 A 和 B，$A>B$（$A\geqslant B$）表示矩阵 A 中所有元素大于（大于或等于）矩阵 B 中的所有元素，特别地若 $A\geqslant\mathbf{0}$，则称 A 为非负矩阵。

定义 1[8–9]　若矩阵 $A\in\mathbf{R}^{n\times n}$ 的非对角元非正，则称 A 为 Z- 矩阵。

任何 Z- 矩阵都可写成 $sI-B$，其中 $B\geqslant\mathbf{0}$。

定义 2[8–9]　若 $s\geqslant\rho(B)$，Z- 矩阵 $A=sI-B$（$B\geqslant\mathbf{0}$）称为 M- 矩阵。特别地，若 $s=\rho(B)$，称 A 为奇异的 M- 矩阵；若 $s>\rho(B)$，称 A 为非奇异的 M- 矩阵，其中 $\rho(B)$ 为 B 谱半径。

定理 1[10]　对 Z- 矩阵 A，下述命题等价：

1）A 是非奇异的 M- 矩阵；

2）A 是非奇异矩阵且满足 $A^{-1}\geqslant\mathbf{0}$；

3）存在某一向量 $v>\mathbf{0}$ 使 $Av>\mathbf{0}$；

4）A 的所有特征值都有正的实部。

定理 2[10]　设 $A\in\mathbf{R}^{n\times n}$ 是一个 M- 矩阵，如果 $B\in\mathbf{R}^{n\times n}$ 中的元素满足关系 $b_{ii}\geqslant a_{ii}$，$a_{ij}\leqslant b_{ij}\leqslant 0$，$i\neq j$，$1\leqslant i$，$j\leqslant n$，则 B 也是一个 M- 矩阵。

本文假设耦合方程（2）满足如下条件：

$$\begin{cases}B\geqslant\mathbf{0}，C\geqslant\mathbf{0}，B\neq\mathbf{0}，C\neq\mathbf{0};\\ I\otimes A+D^{\mathrm{T}}\otimes I-\sum\limits_{l=1}^{p}E_l\otimes E_l\text{是一个非奇异M-矩阵。}\end{cases}\quad(3)$$

式中⊗是克罗内克积（Kronecker product）[11]。

注 1　由克罗内克积的性质可知，当且仅当 A，D 和 E 是 Z- 矩阵时 $I\otimes A+D^{\mathrm{T}}\otimes I-\sum E_l\otimes E_l$ 也是 Z- 矩阵。在不混淆的情况下，本文从此开始省略求和符号 $\sum$ 的上下标。

3　迭代方法

3.1　牛顿迭代

考虑对耦合方程（2）的牛顿迭代法。假设 $\mathbf{R}^{m\times n}$ 是 Banach 空间，R 是 Riccati 函数在空间 $\mathbf{R}^{m\times n}$ 到自身的映射，则其 Frechet 导数为 [12–13]

$$R_X'(H)=-\left(H(D-CX)+(A-XC)H-\sum_{l=1}^{p}E_lHE_l^{\mathrm{T}}\right)。$$

因此若映射R_X'可逆，牛顿法的迭代格式为

$$X_{i+1}=X_i-(R_X')^{-1}R(X_i),\ i=0, 1, \cdots,$$

则求解耦合方程（2）等价于如下迭代格式：

$$(A-X_iC)X_{i+1}+X_{i+1}(D-CX_i)-\sum E_lX_{i+1}E_l^{\mathrm{T}}=B-X_iCX_i。\quad(4)$$

对上述牛顿迭代格式有如下收敛性定理 3。

定理 3　如果存在一个非负矩阵 X 使得方程（2）满足 $R(X)\leqslant\mathbf{0}$，且条件（3）成立，则对上述非负矩阵 X，一定存在（2）的一个非负解 S 使得 $S\leqslant X$，特别地，S 是方程（2）的最小非负解。此外，对于牛顿迭代格式（4），当 $X_0=\mathbf{0}$ 时，序列 $\{X_i\}$ 是适定的，并满足

$$X_0<X_1<\cdots<X_k<\cdots,\ \lim_{k\to\infty}X_k=S,$$

而且矩阵

$$M_S=I\otimes(A-SC)+(D-CS)^{\mathrm{T}}\otimes I-\sum E_l\otimes E_l$$

也是一个 M- 矩阵。

证明　设 X 为任意一个非负矩阵，使得

$$XCX-XD-AX+B+\sum_{l=1}^{p}E_lXE_l^{\mathrm{T}}=\mathbf{0}。$$

对于牛顿迭代式（4），用数学归纳法证明对所有的 k 满足：$X_k<X_{k+1}$，$X_k<X$，且

$$I\otimes(A-X_kC)+(D-CX_k)^{\mathrm{T}}\otimes I-\sum E_l\otimes E_l$$

是非奇异 M- 矩阵。

当 $X_0=\mathbf{0}$ 时，有

$$AX_1+X_1D-\sum E_lX_1E_l^{\mathrm{T}}=B,$$

即有

$$(\boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{A}+\boldsymbol{D}^{\mathrm T}\otimes\boldsymbol{I}-\sum\boldsymbol{E}_l\otimes\boldsymbol{E}_l)\mathrm{vec}(\boldsymbol{X}_1)=\mathrm{vec}(\boldsymbol{B}),\quad(5)$$

式中 vec 运算是将矩阵的列转化成一个长矢量 [14]。

由假设知，$\boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{A}+\boldsymbol{D}^{\mathrm T}\otimes\boldsymbol{I}-\sum\boldsymbol{E}_l\otimes\boldsymbol{E}_l$ 是非奇异的 M-矩阵，从式（5）可知 $\mathrm{vec}(\boldsymbol{X}_1)>\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{X}_1>\boldsymbol{0}$。所以归纳假设对 $k=0$ 时成立。

设当 $k=i\geqslant 0$ 时归纳假设成立。

由式（2）和式（4）得

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{C})(\boldsymbol{X}_{i+1}-\boldsymbol{X})+(\boldsymbol{X}_{i+1}-\boldsymbol{X})(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{X}_i)-\sum\boldsymbol{E}_l(\boldsymbol{X}_{i+1}-\boldsymbol{X})\boldsymbol{E}_l=$$
$$\boldsymbol{B}-\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{C}\boldsymbol{X}_i-\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{C}\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}\boldsymbol{D}+\boldsymbol{X}\boldsymbol{C}\boldsymbol{X}_i=-(\boldsymbol{X}_i-\boldsymbol{X})\boldsymbol{C}(\boldsymbol{X}_i-\boldsymbol{X})。$$

因为 $\boldsymbol{X}_i<\boldsymbol{X}$，且 $\boldsymbol{I}\otimes(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{C})+(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{X}_i)^{\mathrm T}\otimes\boldsymbol{I}-\sum\boldsymbol{E}_l\otimes\boldsymbol{E}_l$ 是非奇异 M- 矩阵，所以由定理 1 中命题 2）可知，$\boldsymbol{X}_{i+1}<\boldsymbol{X}$。

另一方面，由式（4）得

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{X}_{i+1}\boldsymbol{C})\boldsymbol{X}_{i+1}+\boldsymbol{X}_{i+1}(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{X}_{i+1})-\sum\boldsymbol{E}_l\boldsymbol{X}_{i+1}\boldsymbol{E}_l=$$
$$\boldsymbol{B}-\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{C}\boldsymbol{X}_i+\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{C}\boldsymbol{X}_{i+1}+\boldsymbol{X}_{i+1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{X}_i-\boldsymbol{X}_{i+1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{X}_{i+1}-\boldsymbol{X}_{i+1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{X}_{i+1}=$$
$$\boldsymbol{B}-(\boldsymbol{X}_{i+1}-\boldsymbol{X}_i)\boldsymbol{C}(\boldsymbol{X}_{i+1}-\boldsymbol{X}_i)-\boldsymbol{X}_{i+1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{X}_{i+1}。\quad(6)$$

由式（2）和式（6）可得

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{X}_{i+1}\boldsymbol{C})(\boldsymbol{X}_{i+1}-\boldsymbol{X})+(\boldsymbol{X}_{i+1}-\boldsymbol{X})(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{X}_{i+1})-\sum\boldsymbol{E}_l(\boldsymbol{X}_{i+1}-\boldsymbol{X})\boldsymbol{E}_l=$$
$$-(\boldsymbol{X}_{i+1}-\boldsymbol{X}_i)\boldsymbol{C}(\boldsymbol{X}_{i+1}-\boldsymbol{X}_i)-(\boldsymbol{X}_{i+1}-\boldsymbol{X})\boldsymbol{C}(\boldsymbol{X}_{i+1}-\boldsymbol{X})<\boldsymbol{0}。$$

即有

$$[\boldsymbol{I}\otimes(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{X}_{i+1}\boldsymbol{C})+(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{X}_{i+1})^{\mathrm T}\otimes\boldsymbol{I}-\sum\boldsymbol{E}_l\otimes\boldsymbol{E}_l]\mathrm{vec}(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}_{i+1})>\boldsymbol{0}。$$

因此由定理 1 中的命题 3）可知，

$$\boldsymbol{I}\otimes(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{X}_{i+1}\boldsymbol{C})+(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{X}_{i+1})^{\mathrm T}\otimes\boldsymbol{I}-\sum\boldsymbol{E}_l\otimes\boldsymbol{E}_l$$

是非奇异 M- 矩阵。

再次由式（4）和式（6）可得

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{X}_{i+1}\boldsymbol{C})(\boldsymbol{X}_{i+1}-\boldsymbol{X}_{i+2})+(\boldsymbol{X}_{i+1}-\boldsymbol{X}_{i+2})(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{X}_{i+1})-$$
$$\sum\boldsymbol{E}_l(\boldsymbol{X}_{i+1}-\boldsymbol{X}_{i+2})\boldsymbol{E}_l=-(\boldsymbol{X}_{i+1}-\boldsymbol{X}_i)\boldsymbol{C}(\boldsymbol{X}_{i+1}-\boldsymbol{X}_i)<\boldsymbol{0}。$$

因此有 $\boldsymbol{X}_{i+1}<\boldsymbol{X}_{i+2}$。这样就证明了式（4）对 $k=i+1$ 时也成立，从而对所有 $k\geqslant 0$ 均成立。

牛顿迭代产生的序列是适定的，且单调递增有上界。令 $\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{X}_k=\boldsymbol{S}$，则由式（4）知 $\boldsymbol{S}$ 是式（2）的一个解。又因为对任意满足 $R(\boldsymbol{X})\leqslant\boldsymbol{0}$ 的 $\boldsymbol{X}$ 都有 $\boldsymbol{S}\leqslant\boldsymbol{X}$，所以 $\boldsymbol{S}$ 是式（2）的最小非负解。

最后，假设对所有的 $i\geqslant 0$，非奇异 M- 矩阵

$$\boldsymbol{I}\otimes(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{X}_{i+1}\boldsymbol{C})+(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{X}_{i+1})^{\mathrm T}\otimes\boldsymbol{I}-\sum\boldsymbol{E}_l\otimes\boldsymbol{E}_l=r\boldsymbol{I}-\boldsymbol{T}_i,$$

由定义 2 可知，其中非负矩阵 $\boldsymbol{T}_i\geqslant\boldsymbol{0}$，$\rho(\boldsymbol{T}_i)<r$。当 $\lim\limits_{i\to\infty}\boldsymbol{T}_i=\boldsymbol{T}$ 时，$\boldsymbol{M}_S=r\boldsymbol{I}-\boldsymbol{T}$，$\boldsymbol{T}$ 为非负矩阵，且 $\rho(\boldsymbol{T})\leqslant r$，因此 $\boldsymbol{M}_S$ 也是一个 M- 矩阵。

注 2 上述结果与文献 [13] 中定理 9.1.1 有相似的性质。

3.2 不动点迭代

将耦合方程（2）中系数矩阵 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{D}$ 进行分解，写成

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}_1-\boldsymbol{A}_2,\ \boldsymbol{D}=\boldsymbol{D}_1-\boldsymbol{D}_2,$$

且满足 $\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{D}_2\geqslant\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{D}_1$ 是 Z- 矩阵。则耦合方程（2）变为

$$\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{X}+\boldsymbol{X}\boldsymbol{D}_1=\boldsymbol{X}\boldsymbol{C}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{X}\boldsymbol{D}_2+\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{X}+\boldsymbol{B}+\sum\boldsymbol{E}_l\boldsymbol{X}\boldsymbol{E}_l^{\mathrm T}。\quad(7)$$

由定理 2 可知，$\boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{D}_1^{\mathrm T}\otimes\boldsymbol{I}$ 是非奇异 M- 矩阵。这时有一类不动点迭代

$$\boldsymbol{X}_{i+1}=L^{-1}(\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{C}\boldsymbol{X}_i+\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{D}_2+\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{X}_i+\boldsymbol{B}+\sum\boldsymbol{E}_l\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{E}_l^{\mathrm T}),\quad(8)$$

其中线性算子

$$L(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{X}+\boldsymbol{X}\boldsymbol{D}_1。\quad(9)$$

因为 $\boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{D}_1^{\mathrm T}\otimes\boldsymbol{I}$ 是非奇异 M- 矩阵，因此算子 L 是可逆的，并且对 $\boldsymbol{X}>\boldsymbol{0}$ 时，$L^{-1}(\boldsymbol{X})>\boldsymbol{0}$。根据式（9），迭代式（8）可等价于

$$\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{X}_{i+1}+\boldsymbol{X}_{i+1}\boldsymbol{D}_1=\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{C}\boldsymbol{X}_i+\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{D}_2+$$
$$\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{X}_i+\boldsymbol{B}+\sum\boldsymbol{E}_l\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{E}_l^{\mathrm T},\ i=0,1,\cdots。\quad(10)$$

定理 4 如果对于非负矩阵 $\boldsymbol{X}$，$R(\boldsymbol{X})\leqslant\boldsymbol{0}$，则由不动点迭代式（8）给定初始迭代点 $\boldsymbol{X}_0=\boldsymbol{0}$，对任意的 $k\geqslant 1$ 有

$$\boldsymbol{X}_0<\boldsymbol{X}_1<\cdots<\boldsymbol{X}_k<\cdots,\quad(11)$$

而且 $\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{X}_k=\boldsymbol{S}$ 是方程（7）的一个最小非负解。

证明 对不动点迭代式（8），采用数学归纳法证明

$$\boldsymbol{X}_k<\boldsymbol{X}_{k+1},\ \boldsymbol{X}_k<\boldsymbol{X}。$$

当 $k=0$ 时，有

$$\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{X}_1+\boldsymbol{X}_1\boldsymbol{D}_1=\boldsymbol{B},$$

这个方程等价于

$$(\boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{D}_1^{\mathrm T}\otimes\boldsymbol{I})\mathrm{vec}(\boldsymbol{X}_1)=\mathrm{vec}(\boldsymbol{B})。$$

因为 $\boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{D}_1^{\mathrm T}\otimes\boldsymbol{I}$ 是非奇异 M- 矩阵，从式（10）可知 $\mathrm{vec}(\boldsymbol{X}_1)>\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{X}_1>\boldsymbol{0}$。所以归纳假设对 $k=0$ 时成立。

设当 $k=i\geqslant 0$ 时归纳假设成立。

由式（7）和式（10）得

$$\boldsymbol{A}_1(\boldsymbol{X}_{i+1}-\boldsymbol{X})+(\boldsymbol{X}_{i+1}-\boldsymbol{X})\boldsymbol{D}_1=$$
$$\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{C}\boldsymbol{X}_i-\boldsymbol{X}\boldsymbol{C}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{A}_2(\boldsymbol{X}_i-\boldsymbol{X})+(\boldsymbol{X}_i-\boldsymbol{X})\boldsymbol{D}_2+\sum\boldsymbol{E}_l(\boldsymbol{X}_i-\boldsymbol{X})\boldsymbol{E}_l^{\mathrm T}。$$

因为 $\boldsymbol{X}_i<\boldsymbol{X}$，$\boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{D}_1^{\mathrm T}\otimes\boldsymbol{I}$ 是非奇异 M- 矩阵，所以 $\boldsymbol{X}_{i+1}<\boldsymbol{X}$。

另一方面，由式（10）得

$$\boldsymbol{A}_1(\boldsymbol{X}_{i+1}-\boldsymbol{X}_{i+2})+(\boldsymbol{X}_{i+1}-\boldsymbol{X}_{i+2})\boldsymbol{D}_1=$$
$$\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{C}\boldsymbol{X}_i-\boldsymbol{X}_{i+1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{X}_{i+1}+\boldsymbol{A}_2(\boldsymbol{X}_i-\boldsymbol{X}_{i+1})+$$
$$(\boldsymbol{X}_i-\boldsymbol{X}_{i+1})\boldsymbol{D}_2+\sum\boldsymbol{E}_l(\boldsymbol{X}_i-\boldsymbol{X}_{i+1})\boldsymbol{E}_l^{\mathrm T}<0。$$

因此有 $\boldsymbol{X}_{i+1}<\boldsymbol{X}_{i+2}$。这样就证明了对 $k=i+1$，归纳假设成立，从而归纳假设对所有 $k\geqslant 0$ 均成立。

不动点迭代产生的序列是适定的，且单调递增有上界。令 $\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{X}_k=\boldsymbol{S}$，则 $\boldsymbol{S}$ 是方程（7）的一个解。同样地，因为对任意满足 $R(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{0}$ 的 $\boldsymbol{X}$ 都有 $\boldsymbol{S}\leqslant\boldsymbol{X}$，所以 $\boldsymbol{S}$ 是方程（7）的最小非负解。

4　数值实验

本章通过数值实验验证牛顿迭代和不动点迭代的收敛理论，并比较两种迭代方法的数值表现。计算采用 Matlab 14a 编程，其机器精度为 2^{-53}，约为 2.2e−16。在不动点迭代法中，矩阵 $\boldsymbol{A}_1$ 和 $\boldsymbol{D}_1$ 分别为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{D}$ 的对角矩阵和下三角矩阵，记为不动点迭代 I 和不动点迭代 II。当两类算法方程残量小于 10^{-15} 时，终止算法。方程残量的计算公式为

$$RES=\frac{\left\|\boldsymbol{X}_k\boldsymbol{C}\boldsymbol{X}_k-\boldsymbol{X}_k\boldsymbol{D}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_k+\boldsymbol{B}+\sum\boldsymbol{E}_l\boldsymbol{X}_k\boldsymbol{E}_l^{\mathrm{T}}\right\|}{\left\|\boldsymbol{X}_k\boldsymbol{C}\boldsymbol{X}_{k\mathrm{k}}\right\|+\left\|\boldsymbol{X}_k\boldsymbol{D}\right\|+\left\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_k\right\|+\left\|\boldsymbol{B}\right\|+\left\|\sum\boldsymbol{E}_l\boldsymbol{X}_k\boldsymbol{E}_l^{\mathrm{T}}\right\|}。$$

例 1　考虑一类耦合非对称代数 Riccati 方程（1），其对应的系数矩阵为

$$\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}16.1&-1&0\\-3&31.8&-0.5\\-8&-2&21.8\end{pmatrix},\ \boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix}26&-5&0\\-1&6&-2\\-3&-1&4\end{pmatrix};$$

$$\boldsymbol{B}_1=\begin{pmatrix}1&&\\&0.5&\\&&2\end{pmatrix},\ \boldsymbol{B}_2=\begin{pmatrix}3&&\\&1&\\&&0\end{pmatrix};$$

$$\boldsymbol{C}_1=\begin{pmatrix}1.2&&\\&0.5&\\&&0.3\end{pmatrix},\ \boldsymbol{C}_2=\boldsymbol{C}_1;$$

$$\boldsymbol{D}_1=\begin{pmatrix}15.5&-3&-8\\-1&31.5&-2\\0&-0.5&21.5\end{pmatrix},\ \boldsymbol{D}_2=\begin{pmatrix}26&-1&-3\\-5&6&-1\\0&-2&4\end{pmatrix};$$

$$\boldsymbol{E}_1=\begin{pmatrix}0&\sqrt{0.7}\boldsymbol{I}\\\sqrt{0.5}\boldsymbol{I}&0\end{pmatrix}。$$

解　分别采用牛顿迭代和两类不动点迭代方法编程求解上述问题。当所有算法终止后，将迭代次数和方程残量列于表 1 中。

表 1　例 1 中牛顿迭代与不动点迭代数值表现

Table 1　Numerical representation of Newton’s method and two fixed-point iterations in example 1

迭代方法	迭代次数	方程残量
牛顿迭代	3	1.48e−16
不动点迭代 I	33	4.64e−16
不动点迭代 II	24	2.79e−16

从表 1 可以看出，迭代终止时，牛顿法迭代次数比不动点迭代 I 和不动点迭代 II 少很多。迭代终止时，牛顿法迭代能获得比不动点迭代 I 和不动点迭代 II 更小的方程残量。对两种不动点迭代而言，不动点迭代 II 的迭代次数比不动点迭代 I 少，其获得的方程残量也比不动点迭代 I 更小。实际上，不动点迭代 I 等价于 Jacobi 迭代，而不动点迭代 II 等价于 Gauss-Seidel 迭代。

图 1 为 3 种迭代方法方程残量的历史图。从图中可以看出，牛顿迭代法是二次收敛，而两种不动点迭代都是线性收敛，但不动点迭代 II 比不动点迭代 I 在每步都能获得更小的方程残量。

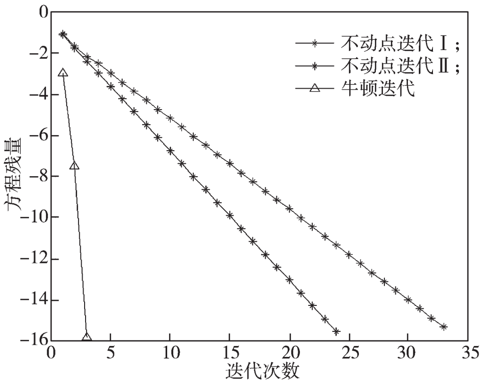

图 1　例 1 中牛顿迭代与不动点迭代方程残量历史图

Fig. 1　Residual history diagram for Newton’s method and fixed-point iteration equation in example 1

例 2　考虑一类耦合非对称代数 Riccati 方程（1），其对应的系数矩阵为

$$\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}34&-1&0\\-0.3&11&-0.5\\-0.8&-0.2&18\end{pmatrix},\ \boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix}42&-0.5&-0.25\\-1.2&75&-1.2\\-0.3&-1&37\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}_3=\begin{pmatrix}13&-2.2&-1.1\\-1.5&21&-0.9\\-0.4&-0.7&26\end{pmatrix};\ \boldsymbol{B}_1=\begin{pmatrix}25&&\\&1&\\&&4\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{B}_2=\begin{pmatrix}37&&\\&70&\\&&34\end{pmatrix},\ \boldsymbol{B}_3=\begin{pmatrix}10&&\\&16&\\&&21\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{C}_1=\begin{pmatrix}0.707&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{C}_2=\boldsymbol{C}_1,\ \boldsymbol{C}_3=\boldsymbol{C}_1;$$

$$\boldsymbol{D}_1=\begin{pmatrix}31&-0.3&-0.8\\-1&8&-0.2\\0&-0.5&15\end{pmatrix},\ \boldsymbol{D}_2=\begin{pmatrix}42&-1.2&-0.3\\-0.5&75&-1\\-0.25&-1.2&37\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{D}_3=\begin{pmatrix}12&-1.5&-0.4\\-2.2&20&-0.7\\-1.1&-0.9&25\end{pmatrix};\ \boldsymbol{E}_1=\begin{pmatrix}0&\sqrt{0.5}\boldsymbol{I}&0\\\boldsymbol{I}&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{E}_2=\begin{pmatrix}0&0&\sqrt{2.5}\boldsymbol{I}\\\boldsymbol{I}&0&0\\\sqrt{0.7}\boldsymbol{I}&0&0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{E}_3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&\boldsymbol{I}\\0&\sqrt{0.3}\boldsymbol{I}&0\end{pmatrix}。$$

解　与例 1 类似，分别采用牛顿迭代和两类不动点迭代方法编程求解上述问题。当所有算法终止后，将迭代次数和方程残量列于表 2 中。

表 2　例 2 中牛顿迭代与不动点迭代数值表现

Table 2　Numerical representation of Newton’s method and two fixed-point iterations in example 2

迭代方法	迭代次数	方程残量
牛顿法	4	1.48e−16
不动点迭代 I	17	1.58e−16
不动点迭代 II	14	8.01e−16

从表 2 可以得出，当迭代终止时，牛顿法所需的迭代次数比不动点迭代要少得多，而且能获得更小的方程残量。

图 2 为 3 种迭代方法方程残量的历史图。从图中可以看出牛顿法迭代是二次收敛的，而 2 种不动点迭代都是线性收敛。

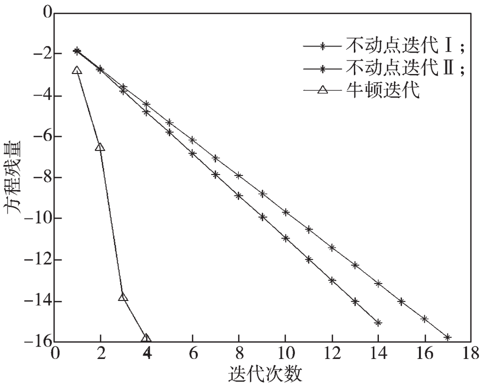

图 2　例 2 中牛顿迭代与不动点迭代方程残量历史图

Fig. 2　Residual history diagram for Newton’s method and fixed-point iteration equations in example 2

5　结语

本文采用牛顿迭代法和不动点迭代法求解一类非对称耦合的 Riccati 方程。在一定条件下证明了这两种迭代方法单调收敛到具有实际意义的最小非负解，数值实验验证了提出方法的有效性。

参考文献：

[1] JUANG J. Existence of Algebraic Matrix Riccati Equations Arising in Transport Theory[J]. Linear Algebra and Its Applications，1995，230：89−100.

[2] DONG N，JIN J C，YU B. Convergence Rates of a Class of Predictor-Corrector Iterations for the Nonsymmetric Algebraic Riccati Equation Arising in Transport Theory[J]. Advances in Applied Mathematics and Mechanics，2017，9(4)：944−963.

[3] YU B，FAN H，CHU E K W. Large-Scale Algebraic Riccati Equations with High-Rank Constant Terms[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics，2019，361：130−143.

[4] BAI Z Z，GUO X X，XU S F. Alternately Linearized Implicit Iteration Methods for the Minimal Nonnegative Solutions of the Nonsymmetric Algebraic Riccati Equations[J]. Numerical Linear Algebra with Applications，2006，13(8)：655−674.

[5] GUO C H. Nonsymmetric Algebraic Riccati Equations and Wiener：Hopf Factorization for M-Matrices[J]. SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications，2001，23(1)：225−242.

[6] BINI D A，IANNAZZO B，LATOUCHE G，et al. On the Solution of Algebraic Riccati Equations Arising in Fluid Queues[J]. Linear Algebra and Its Applications，2006，413(2/3)：474−494.

[7] GUO C H，LAUB A J. On the Iterative Solution of a Class of Nonsymmetric Algebraic Riccati Equations[J]. SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications，2000，22(2)：376−391.

[8] VARGA R S. Matrix Iterative Analysis[M]. Englewood：Cliffs Prentice-Hall Inc.，1962：31−36.

[9] BERMAN A，PLEMMONS R J. Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences[M]. New York：Academic Press，1979：63−86.

[10] GOLUB H G，VAN LOAN C F. Matrix Computations[M]. 3rd ed. Baltimore：Johns Hopkins University Press，1996：56−58.

[11] BARTELS R H，STEWART G W. Solution of the Matrix Equation ***AX*+*XB*=*C***[J]. Communications of the ACM，1972，15(9)：820−826.

[12] ORTEGA J M，RHEINBOLDT W C. Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables[M]. Philadelphia：SIAM，2000：174−181.

[13] LANCASTER P，RODMAN L. Algebraic Riccati Equations[M]. [S. l.]：Oxford University Press，1995：211−221.

[14] LANCASTER P，TISMENETSKY M. The Theory of Matrices[M]. 2nd ed. Orlando：Academic Press，1985：89−91.

（责任编辑：邓光辉）