doi:10.3969/j.issn.1673-9833.2020.01.002

一类具有 Holling Ⅲ功能反应的时滞食饵 – 捕食系统正周期解的存在性

罗超良 [1]，侯爱玉 [1]，罗嘉程 [2]，刘清华 [1]，曾　彪 [1]

（1. 湖南工业大学 理学院，湖南 株洲 412007；2. 西安工程大学 城市规划与市政工程学院，陕西 西安 710048）

摘　要：利用重合度理论中的延拓定理，分析了一类时滞食饵 – 捕食系统正周期解的存在性，并给出了正周期解的存在性条件。

关键词：食饵 – 捕食系统；时滞；周期解；延拓定理

中图分类号：O175.1　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673-9833(2020)01-0009-05

引文格式：罗超良，侯爱玉，罗嘉程，等 . 一类具有 Holling Ⅲ功能反应的时滞食饵 – 捕食系统正周期解的存在性 [J]. 湖南工业大学学报，2020，34(1)：9-13.

Existence of Positive Periodic Solutions for a Delayed Predator-Prey System with Holling Ⅲ Functional Response

LUO Chaoliang[1]，HOU Aiyu[1]，LUO Jiacheng[2]，LIU Qinghua[1]，ZENG Biao[1]

（1. College of Science，Hunan University of Technology，Zhuzhou Hunan 412007，China；
2. School of Urban Planning and Municipal Engineering，Xi’an Polytechnic University，Xi’an 710048，China）

Abstract：By using the continuation theorem of coincidence degree theory, an analysis has been made of the existence of positive periodic solutions for a class of delayed predator-prey systems, thus working out the existence conditions of positive periodic solutions.

Keywords：predator-prey system；time delay；periodic solution；continuation theorem

0　引言

食饵 – 捕食者模型是生物数学中的一项重要研究内容，对食饵与捕食者相互作用的研究具有很高的理论价值与现实意义。近年来，很多学者对该模型进行了研究，并取得了较多的研究成果 [1-7]。如文献 [1] 研究了一类具有 Holling Ⅲ功能反应的非自治的食饵 – 捕食系统

$$\begin{cases} x'(t)=x(t)\left[a(t)-b(t)x(t)-\dfrac{c(t)x(t)y(t)}{m(t)+x^2(t)}-g(t)x(t)y(t)\right], \\ y'(t)=y(t)\left[-d(t)+\dfrac{h(t)x^2(t)}{m(t)+x^2(t)}\right], \end{cases} \tag{1}$$

收稿日期：2019-06-12

基金项目：国家自然科学基金资助项目（11801162），湖南省教育厅科学研究基金资助项目（17C0467，17C0468）

作者简介：罗超良（1975-），男，湖南娄底人，湖南工业大学副教授，博士，主要从事随机微分方程定性理论及分岔问题的教学与研究，E-mail：lcl197511@163.com

通信作者：侯爱玉（1978-），女，湖南安仁人，湖南工业大学讲师，博士，主要从事泛函微分方程定性理论及分岔问题的教学与研究，E-mail：aiyu78@126.com

周期解的存在性。

式中：$x(t)$ 为 t 时刻食饵总数；

$y(t)$ 为 t 时刻捕食者总数；

$a(t)$、$b(t)$、$c(t)$、$d(t)$、$g(t)$、$h(t)$、$m(t)$ 都是周期为 T 的非负连续函数。

在多因素综合影响下，不可避免地会出现时滞现象，这将会对生态系统的性质产生很大影响；同时，食饵数量增长速度与过去某时间的食饵数量及增长速度有关，捕食者数量增长速度也与过去某时间的食饵数量有关。基于此，本文考虑如下一类具有 Holling Ⅲ功能反应非自治的时滞食饵－捕食系统：

$$\begin{cases} x'(t)=x(t)\left[a(t)-b(t)x(t-\sigma_1)-\rho x'(t-\sigma_2)\right]- \\ \qquad \dfrac{c(t)x^2(t)y(t)}{m^2+x^2(t)}, \\ y'(t)=y(t)\left[-d(t)+\dfrac{h(t)x^2(t-\tau(t))}{m^2+x^2(t-\tau(t))}\right]。 \end{cases} \tag{2}$$

式中：ρ、m、σ_1、σ_2 都为常数，且 $\rho>0$、$m>0$；

$a(t)$、$b(t)$、$c(t)$、$d(t)$、$h(t)$、$\tau(t)$ 是周期为 ω 的连续函数。

下面讨论系统（2）正周期解的存在性。

1 主要结论

在主要结论之前，先给出下面 3 个引理。

引理 1 （Arzele-Ascoli 定理）[2] 集合 $A\subset C[a,b]$ 列紧的充分必要条件是下列 2 个条件成立：

1）集合 A 是一致有界的，即存在正常数 M，使得对于 $\forall x\in A$，恒有 $\left|\underset{t\in[a,b]}{x(t)}\right|\leqslant M$；

2）集合 A 是等度连续的，即对 $\forall\varepsilon>0$，始终存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$，使得对于任意的 $t_1, t_2\in[a, b]$，当 $|t_1-t_2|<\delta$ 时，就有 $|x(t_1)-x(t_2)|<\delta$，$\forall x\in A$。

引理 2[2] 如果 $f(t)$、$g(t)$ 为区间 $[\alpha, \beta]$ 上的非负连续函数，则 $\exists\xi\in[\alpha,\beta]$，使得

$$\int_\alpha^\beta f(t)g(t)\mathrm{d}t=f(\xi)\int_\alpha^\beta g(t)\mathrm{d}t。$$

引理 3 （延拓定理）[2] 设 X、Y 是两个 Banach 空间，L 是指标为零的 Fredholm 算子，$\varOmega\subset X$ 是 X 中的有界开集，$N: X\to Y$ 在 $\bar{\varOmega}\subset X$ 上是 L 紧的，若下列条件满足：

i）对于任意的 $\lambda\in(0, 1)$，方程 $Lx=\lambda Nx$ 的解满足 $x\notin\partial\varOmega\cap\mathrm{Dom}\,L$；

ii）对于任意的 $x\in\partial\varOmega\cap\mathrm{Ker}\,L$，$QNx\neq 0$，其中 $N: X\to Y$，$Q: Y\to Y$ 均为连续映射；

iii）$\deg\{JQN, \varOmega\cap\mathrm{Ker}\,L, 0\}\neq 0$，其中 $JQN: \mathrm{Ker}\,L\to\mathrm{Ker}\,L$；

则方程 $Lx=\lambda Nx$ 在 $\bar{\varOmega}\cap\mathrm{Dom}\,L$ 内至少存在一个解。

为研究方便，引入以下记号：

$|f|_0=\max\limits_{t\in[0,\omega]}\{|f(t)|\}$，$\bar{f}=\dfrac{1}{\omega}\displaystyle\int_0^\omega f(t)\mathrm{d}t$，$\hat{f}=\dfrac{1}{\omega}\displaystyle\int_0^\omega |f(t)|\mathrm{d}t$，

其中 $f(t)$ 是连续的 ω 周期函数。

在给出主要结论之前，先作如下假设：

H1 对 $\forall t\in[0, \omega]$，有 $\bar{a}>0$，$\bar{d}>0$，$b(t)>0$，$c(t)>0$，$h(t)>0$；

H2 $\rho\mathrm{e}^B<1$，其中 $B=\ln A+\rho A+(\bar{a}+\hat{a})\omega$，$A=\max\limits_{t\in[0,\omega]}\left\{\dfrac{2\bar{a}}{b(t)}\right\}$；

H3 $\bar{c}<2m\bar{a}$；

H4 $\bar{d}<\bar{h}$。

定理 1 假设 H1~H4 都成立，则系统（2）至少存在一个正周期解。

2 主要结论的证明

首先，考虑如下系统

$$\begin{cases} u_1'(t)=a(t)-b(t)\mathrm{e}^{u_1(t-\sigma_2)}-\rho\mathrm{e}^{u_1(t-\sigma_2)}u_1'(t-\sigma_2)- \\ \qquad \dfrac{c(t)\mathrm{e}^{u_1(t)}\mathrm{e}^{u_2(t)}}{m^2+\mathrm{e}^{2u_1(t)}}, \\ u_2'(t)=-d(t)+\dfrac{h(t)\mathrm{e}^{2u_1(t-\tau(t))}}{m^2+\mathrm{e}^{2u_1(t-\tau(t))}}。 \end{cases} \tag{3}$$

显然，若系统（3）存在周期解 $\left(u_1^*(t), u_2^*(t)\right)^{\mathrm{T}}$，则 $\left(x_1^*(t), y_2^*(t)\right)^{\mathrm{T}}=\left(\mathrm{e}^{u_1^*(t)}, \mathrm{e}^{u_2^*(t)}\right)^{\mathrm{T}}$ 为系统（2）的周期解。于是，接下来只需证明系统（3）存在周期解。

令

$$X=\left\{u=\left(u_1(t), u_2(t)\right)^{\mathrm{T}}\in C^1\left(\mathbf{R},\mathbf{R}^2\right): u_i(t+\omega)=u_i(t), t\in\mathbf{R}, i=1, 2\right\},$$

$$Z=\left\{u=\left(u_1(t), u_2(t)\right)^{\mathrm{T}}\in C\left(\mathbf{R},\mathbf{R}^2\right): u_i(t+\omega)=u_i(t), t\in\mathbf{R}, i=1, 2\right\}$$

则当 $|u|_\infty=\max\limits_{t\in[0,\omega]}\{|u_1(t)|+|u_2(t)|\}$，$\|u\|=|u|_\infty+|u'|_\infty$ 时，X 和 Z 在范数 $|\bullet|_\infty$，$\|\bullet\|$ 下均为 Banach 空间。

设 $L: X\to Z$，$N: X\to Z$，且

$$L\left(u_1(t),\ u_2(t)\right)^{\mathrm{T}}=\left(u_1'(t),\ u_2'(t)\right)^{\mathrm{T}},$$

$$N\begin{bmatrix}u_1(t)\\u_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a(t)-b(t)\mathrm{e}^{u_1(t-\sigma_1)}-\rho\mathrm{e}^{u_1(t-\sigma_2)}u_1'\left(t-\sigma_2\right)-\\ \dfrac{c(t)\mathrm{e}^{u_1(t)}\mathrm{e}^{u_2(t)}}{m^2+\mathrm{e}^{2u_1(t)}}\\ -d(t)+\dfrac{h(t)\mathrm{e}^{2u_1(t-\tau(t))}}{m^2+\mathrm{e}^{2u_1(t-\tau(t))}}\end{bmatrix},$$

则系统（3）可以改写成 $Lu=Nu$，$u\in X$，$\mathrm{Im}\ L=\left\{\left(u_1(t),\ u_2(t)\right)^{\mathrm{T}}\in Z:\int_0^{\omega}u_i(t)\mathrm{d}t=0,\ i=1,\ 2\right\}$。

显然，$\mathrm{Ker}\ L=\mathbf{R}^2$ 是 Z 的闭子空间，且 $\dim\mathrm{Ker}\ L=\mathrm{codim}\ \mathrm{Im}\ L=2$。因此，$L$ 是指标为 0 的 Fredholm 算子。

设 $P:X\to X$，$Q:Z\to Z$，且

$$P\left(u_1(t),\ u_2(t)\right)^{\mathrm{T}}=\left(\bar{u}_1,\ \bar{u}_2\right)^{\mathrm{T}},\ \left(u_1(t),\ u_2(t)\right)^{\mathrm{T}}\in X,$$

$$Q\left(u_1(t),\ u_2(t)\right)^{\mathrm{T}}=\left(\bar{u}_1,\ \bar{u}_2\right)^{\mathrm{T}},\ \left(u_1(t),\ u_2(t)\right)^{\mathrm{T}}\in Z,$$

P 和 Q 是两个连续的映射，则

$$\mathrm{Im}\ P=\mathrm{Ker}\ L，\mathrm{Ker}\ Q=\mathrm{Im}\ L=\mathrm{Im}(I-Q)。$$

此外，L 的广义逆算子 $K_P:\mathrm{Im}\ L\to\mathrm{Ker}\ P\cap\mathrm{Dom}\ L$ 满足

$$K_P(u)=\int_0^{\omega}u(s)\mathrm{d}s-\frac{1}{\omega}\int_0^{\omega}\int_0^{t}u(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t。$$

则 $QN:X\to Z$，$K_P(I-Q)N:X\to X$ 分别为：

$$(QN)u=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{\omega}\displaystyle\int_0^{\omega}\left[a(t)-b(t)\mathrm{e}^{u_1(t-\sigma_1)}-\dfrac{c(t)\mathrm{e}^{u_1(t)}\mathrm{e}^{u_2(t)}}{m^2+\mathrm{e}^{2u_1(t)}}\right]\mathrm{d}t\\ \dfrac{1}{\omega}\displaystyle\int_0^{\omega}\left[-d(t)+\dfrac{h(t)\mathrm{e}^{2u_1(t-\tau(t))}}{m^2+\mathrm{e}^{2u_1(t-\tau(t))}}\right]\mathrm{d}t\end{bmatrix},$$

显然，QN 和 $K_P(I-Q)N$ 都是连续的。

$$\left(K_P\left(I-Q\right)N\right)u=$$
$$\begin{bmatrix}\displaystyle\int_0^{t}\left[a(s)-b(s)\mathrm{e}^{u_1(s-\sigma_1)}-\dfrac{c(s)\mathrm{e}^{u_1(s)}\mathrm{e}^{u_2(s)}}{m^2+\mathrm{e}^{2u_1(s)}}\right]\mathrm{d}s-\rho\left[\mathrm{e}^{u_1(t-\sigma_2)}-\mathrm{e}^{u_1(-\sigma_2)}\right]\\ \displaystyle\int_0^{t}\left[-d(s)+\dfrac{h(s)\mathrm{e}^{2u_1(s-\tau(s))}}{m^2+\mathrm{e}^{2u_1(s-\tau(s))}}\right]\mathrm{d}s\end{bmatrix}-$$
$$\begin{bmatrix}\dfrac{1}{\omega}\displaystyle\int_0^{\omega}\int_0^{t}\left[a(s)-b(s)\mathrm{e}^{u_1(s-\sigma_1)}-\dfrac{c(s)\mathrm{e}^{u_1(s)}\mathrm{e}^{u_2(s)}}{m^2+\mathrm{e}^{2u_1(s)}}\right]\mathrm{d}s\mathrm{d}t-\dfrac{1}{\omega}\rho\int_0^{\omega}\left[\mathrm{e}^{u_1(t-\sigma_2)}-\mathrm{e}^{u_1(-\sigma_2)}\right]\mathrm{d}t\\ \dfrac{1}{\omega}\displaystyle\int_0^{\omega}\int_0^{t}\left[-d(s)+\dfrac{h(s)\mathrm{e}^{2u_1(s-\tau(s))}}{m^2+\mathrm{e}^{2u_1(s-\tau(s))}}\right]\mathrm{d}s\mathrm{d}t\end{bmatrix}-$$
$$\begin{bmatrix}\left(\dfrac{t}{\omega}-\dfrac{1}{2}\right)\displaystyle\int_0^{\omega}\left[a(s)-b(s)\mathrm{e}^{u_1(s-\sigma_1)}-\dfrac{c(s)\mathrm{e}^{u_1(s)}\mathrm{e}^{u_2(s)}}{m^2+\mathrm{e}^{2u_1(s)}}\right]\mathrm{d}s\\ \left(\dfrac{t}{\omega}-\dfrac{1}{2}\right)\displaystyle\int_0^{\omega}\left[-d(s)+\dfrac{h(s)\mathrm{e}^{2u_1(s-\tau(s))}}{m^2+\mathrm{e}^{2u_1(s-\tau(s))}}\right]\mathrm{d}s\end{bmatrix}。$$

根据引理 1，对于 $\forall\Omega\subset X$，$QN\left(\bar{\Omega}\right)$ 有界，$K_P\left(I-Q\right)N\left(\bar{\Omega}\right)$ 是紧致集。因此，对于 $\forall\Omega\subset X$，N 在 Ω 上也是 L 紧的。

令 $Lu=\lambda Nu$，$\lambda\in(0,1)$，于是有

$$\begin{cases}u_1'(t)=\lambda\left[a(t)-b(t)\mathrm{e}^{u_1(t-\sigma_1)}-\rho\mathrm{e}^{u_1(t-\sigma_2)}u_1'\left(t-\sigma_2\right)-\right.\\ \qquad\left.\dfrac{c(t)\mathrm{e}^{u_1(t)}\mathrm{e}^{u_2(t)}}{m^2+\mathrm{e}^{2u_1(t)}}\right],\\ u_2'(t)=\lambda\left[-d(t)+\dfrac{h(t)\mathrm{e}^{2u_1(t-\tau(t))}}{m^2+\mathrm{e}^{2u_1(t-\tau(t))}}\right]。\end{cases}\tag{4}$$

假设 $\left(u_1(t),\ u_2(t)\right)^{\mathrm{T}}\in X$ 是系统（4）的一个解，$\lambda\in(0,1)$，系统（3）在区间 $(0,\omega)$ 内满足

$$\int_0^{\omega}\left[b(t)\mathrm{e}^{u_1(t-\sigma_1)}+\frac{c(t)\mathrm{e}^{u_1(t)}\mathrm{e}^{u_2(t)}}{m^2+\mathrm{e}^{2u_1(t)}}\right]\mathrm{d}t=\bar{a}\omega,\tag{5}$$

$$\int_0^{\omega}\frac{h(t)\mathrm{e}^{2u_1(t-\tau(t))}}{m^2+\mathrm{e}^{2u_1(t-\tau(t))}}\mathrm{d}t=\bar{d}\omega。\tag{6}$$

所以

$$\int_0^{\omega}\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[u_1(t)+\lambda\rho\mathrm{e}^{u_1(t-\sigma_2)}\right]\right|\mathrm{d}t\leqslant\int_0^{\omega}\left|a(t)\right|\mathrm{d}t+\int_0^{\omega}\left|b(t)\mathrm{e}^{u_1(t-\sigma_1)}+\frac{c(t)\mathrm{e}^{u_1(t)}\mathrm{e}^{u_2(t)}}{m^2+\mathrm{e}^{2u_1(t)}}\right|\mathrm{d}t=\left(\bar{a}+\hat{a}\right)\omega。\tag{7}$$

由式（5）可知

$$\int_0^{\omega}b(t)\mathrm{e}^{u_1(t-\sigma_1)}\mathrm{d}t\leqslant\bar{a}\omega。\tag{8}$$

由式（8）及 $u_1(t)$ 的周期性，可得

$$\bar{a}\omega\geqslant\int_0^{\omega}b(t)\mathrm{e}^{u_1(t-\sigma_1)}\mathrm{d}t=\int_0^{\omega}b\left(t-\sigma_2+\sigma_1\right)\mathrm{e}^{u_1(t-\sigma_2)}\mathrm{d}t,\tag{9}$$

$$\bar{a}\omega\geqslant\int_0^{\omega}b(t)\mathrm{e}^{u_1(t-\sigma_1)}\mathrm{d}t=\int_{-\sigma_1}^{\omega-\sigma_1}b\left(s+\sigma_1\right)\mathrm{e}^{u_1(s)}\mathrm{d}s=\int_0^{\omega}b\left(t+\sigma_1\right)\mathrm{e}^{u_1(t)}\mathrm{d}t\tag{10}$$

结合式（9）和（10），可得

$$\int_0^{\omega} b(t+\sigma_1)\mathrm{e}^{u_1(t)}+b(t-\sigma_2+\sigma_1)\mathrm{e}^{u_1(t-\sigma_2)}\mathrm{d}t \leqslant 2\bar{a}\omega 。$$

进一步利用微分中值定理，则$\exists\xi\in[0,\omega]$满足

$$b(\xi+\sigma_1)\mathrm{e}^{u_1(\xi)}+b(\xi-\sigma_2+\sigma_1)\mathrm{e}^{u_1(\xi-\sigma_2)}\leqslant 2\bar{a},$$

所以

$$u_1(\xi)\leqslant \ln\frac{2\bar{a}}{b(\xi+\sigma_1)}\leqslant \ln A, \tag{11}$$

$$\mathrm{e}^{u_1(\xi-\sigma_2)}\leqslant\frac{2\bar{a}}{b(\xi-\sigma_2+\sigma_1)}\leqslant A。 \tag{12}$$

对于$\forall t\in[0,\omega]$，由式（7）（11）（12）和假设 H2 可得

$$u_1(t)+\lambda\rho\mathrm{e}^{u_1(t-\sigma_2)}\leqslant \ln A+\rho A+(\bar{a}+\hat{a})\omega=B。$$

因为$\lambda\rho\mathrm{e}^{u_1(t-\sigma_2)}>0$，所以

$$u_1(t)\leqslant B,\ t\in[0,\omega]。 \tag{13}$$

于是，由式（4）（5）和（13）可得

$$\int_0^{\omega}|u_1'(t)|\mathrm{d}t\leqslant(\bar{a}+\hat{a})\omega+\rho\mathrm{e}^B\int_0^{\omega}|u_1'(t-\sigma_2)|\mathrm{d}t=$$
$$(\bar{a}+\hat{a})\omega+\rho\mathrm{e}^B\int_0^{\omega}|u_1'(t)|\mathrm{d}t。$$

又由假设 H2 得

$$\int_0^{\omega}|u_1'(t)|\mathrm{d}t\leqslant\frac{1}{1-\rho\mathrm{e}^B}(\bar{a}+\hat{a})\omega。 \tag{14}$$

若$(u_1(t),\ u_2(t))^{\mathrm{T}}\in X$，则$\exists\xi_i,\eta_i\in[0,\omega]$ $(i=1, 2)$，使得

$$u_i(\xi_i)=\min_{t\in[0,\omega]}\{u_i(t)\},\ u_i(\eta_i)=\max_{t\in[0,\omega]}\{u_i(t)\}。 \tag{15}$$

由式（5）（15）及基本不等式 $a^2+b^2\geqslant 2ab$，有

$$\omega\left(\bar{a}-\bar{b}\mathrm{e}^{u_1(\eta_1)}\right)\leqslant\int_0^{\omega}\left[a(t)-b(t)\mathrm{e}^{u_1(t-\sigma_1)}\right]\mathrm{d}t\leqslant$$
$$\int_0^{\omega}\frac{c(t)\mathrm{e}^{u_1(t)}e^{u_2(t)}}{2m\mathrm{e}^{u_1(t)}}\mathrm{d}t=\frac{1}{2m}\bar{c}\omega。$$

又因$u_1(\eta_1)\geqslant\ln\left(\dfrac{2m\bar{a}-\bar{c}}{2m\bar{b}}\right)$，所以对$\forall t\in[0,\ \omega]$有

$$u_1(t)\geqslant\ln\left(\frac{2m\bar{a}-\bar{c}}{2m\bar{b}}\right)-\frac{1}{1-\rho e^B}(\bar{a}+\hat{a})\omega=:\beta_1。 \tag{16}$$

于是

$$|u_1|_0\leqslant\max\{|B|,\ |\beta_1|\}=:\beta_2。 \tag{17}$$

由式（6）和引理 2 可知，$\exists\xi\in[0,\ \omega]$，使得

$$\frac{\mathrm{e}^{2u_1(\xi-\tau(\xi))}}{m^2+\mathrm{e}^{2u_1(\xi-\tau(\xi))}}=\frac{\bar{d}}{\bar{h}}。$$

令 $\xi-\tau(\xi)=\delta+k\omega$，$\delta\in[0,\ \omega]$，$k$ 为整数，则

$$\frac{\mathrm{e}^{2u_1(\delta)}}{m^2+\mathrm{e}^{2u_1(\delta)}}=\frac{\bar{d}}{\bar{h}}。 \tag{18}$$

结合式（15）（17）和（18）可得

$$\frac{\bar{d}}{\bar{h}}=\frac{\mathrm{e}^{2u_1(\delta)}}{m^2+\mathrm{e}^{2u_1(\delta)}}\leqslant\frac{\mathrm{e}^{2\beta_2}}{m^2+\mathrm{e}^{2\beta_2}},$$
$$\frac{\bar{d}}{\bar{h}}=\frac{\mathrm{e}^{2u_1(\delta)}}{m^2+\mathrm{e}^{2u_1(\delta)}}\geqslant\frac{\mathrm{e}^{-2\beta_2}}{m^2+\mathrm{e}^{-2\beta_2}}。$$

因此

$$u_2(\xi_2)\leqslant\beta_2+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\bar{h}-\bar{d}}{m^2\bar{d}}\right),$$

$$u_2(\eta_2)\geqslant-\beta_2+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\bar{h}-\bar{d}}{m^2\bar{d}}\right)。$$

此外，由式（4）（6）和假设 H1 可知，对于$\forall t\in[0,\ \omega]$有

$$\int_0^{\omega}|u_2'(t)|\mathrm{d}t\leqslant\int_0^{\omega}|d(t)|\mathrm{d}t+$$
$$\int_0^{\omega}\frac{h(t)\mathrm{e}^{2u_1(t-\tau(t))}}{m^2+\mathrm{e}^{2u_1(t-\tau(t))}}\mathrm{d}t=(\bar{d}+\hat{d})\omega。$$

因此，对于$\forall t\in[0,\ \omega]$，有

$$u_2(t)\leqslant u_2(\xi_2)+\int_0^{\omega}|u_2'(t)|\mathrm{d}t\leqslant$$
$$\beta_2+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\bar{h}-\bar{d}}{m^2\bar{d}}\right)+(\bar{d}+\hat{d})\omega=:\beta_3,$$

$$u_2(t)\geqslant u_2(\eta_2)-\int_0^{\omega}|u_2'(t)|\mathrm{d}t\geqslant$$
$$-\beta_2+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\bar{h}-\bar{d}}{m^2\bar{d}}\right)-(\bar{d}+\hat{d})\omega=:\beta_4。$$

所以

$$|u_2|_0\leqslant\max\{|\beta_3|,\ |\beta_4|\}=:\beta_5。 \tag{19}$$

由式（4）（13）（19）可得，对于$\forall t\in[0,\ \omega]$有

$$|u_1'(t)|\leqslant|a|_0+|b|_0\,\mathrm{e}^B+\rho\mathrm{e}^B|u_1'|_0+|c|_0\frac{1}{2m},$$

$$|u_2'(t)|=\left|\lambda\left[-d(t)+\frac{h(t)\mathrm{e}^{2u_1(t-\tau(t))}}{m^2+\mathrm{e}^{2u_1(t-\tau(t))}}\right]\right|\leqslant$$
$$|d(t)|+|h(t)|\leqslant|d|_0+|h|_0。$$

又由假设 H2 得

$$|u_1'|_0\leqslant\frac{1}{1-\rho\mathrm{e}^B}\left[|a|_0+|b|_0\,\mathrm{e}^B+|c|_0\frac{1}{2m}\right]=:\beta_6,$$
$$|u_2'|_0\leqslant|d|_0+|h|_0=:\beta_7。$$

所以

$$\|u\|=|u|_{\infty}+|u'|_{\infty}\leqslant\beta_2+\beta_5+\beta_6+\beta_7。$$

又因为系统

$$\begin{cases}\bar{a}\bar{b}\mathrm{e}^{u_1}-\bar{c}\dfrac{\mathrm{e}^{u_1}\mathrm{e}^{u_2}}{m^2+\mathrm{e}^{2u_1}}=0,\\ -\bar{d}+\bar{h}\dfrac{\mathrm{e}^{2u_1}}{m^2+\mathrm{e}^{2u_1}}=0。\end{cases} \tag{20}$$

存在唯一解 $\left(u_1^*,\ u_2^*\right)^{\mathrm{T}} \in \boldsymbol{R}^2$，且 $u_1^* = \ln\left(\dfrac{\bar{a}\bar{h} - l\bar{c}\bar{d}}{\bar{b}\bar{h}}\right)$，$u_2^* = u_1^* + \ln l$，其中 $l = \sqrt{\dfrac{\bar{h} - \bar{d}}{m^2 \bar{d}}}$。

令 $\beta=\beta_2+\beta_5+\beta_6+\beta_7+\beta_0$，其中 β_0 足够大使得系统（20）存在唯一解$\left(u_1^*,\ u_2^*\right)^{\mathrm{T}}$，且

$$\left\|\left(u_1^*,\ u_2^*\right)^{\mathrm{T}}\right\| = \left|u_1^*\right| + \left|u_2^*\right| < \beta_0。$$

显然，β 不依赖于 λ，则

$$\Omega=\left\{\left(u_1(t),\ u_2(t)\right)^{\mathrm{T}} \in X : \left\|\left(u_1(t),\ u_2(t)\right)^{\mathrm{T}}\right\| < \beta\right\},$$

即引理 3 中的条件 i）满足。

若 $\left(u_1(t),\ u_2(t)\right)^{\mathrm{T}} \in \partial\Omega \cap \operatorname{Ker} L = \partial\Omega \cap \mathbf{R}^2$，由于 $\left|u_1\right| + \left|u_2\right| = \beta$，所以 $\left(u_1(t),\ u_2(t)\right)^{\mathrm{T}}$ 在 $\mathbf{R}_2$ 中是一个常向量，则

$$QN\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{a} - \bar{b}\mathrm{e}^{u_1} - \bar{c}\dfrac{\mathrm{e}^{u_1}\mathrm{e}^{u_2}}{m^2 + \mathrm{e}^{2u_1}} \\ -\bar{d} + \bar{h}\dfrac{\mathrm{e}^{2u_1}}{m^2 + \mathrm{e}^{2u_1}} \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

即引理 3 中条件 ii）满足。

令 $J = I : \operatorname{Im} Q \to \operatorname{Ker} L$，$\left(u_1, u_2\right)^{\mathrm{T}} \to \left(u_1, u_2\right)^{\mathrm{T}}$，则

$$\deg\left\{JQN, \Omega \cap \operatorname{Ker} L, 0\right\} = \operatorname{sign}\left\{2m^2 \bar{b}\bar{h}\frac{\mathrm{e}^{2u_2^*}\mathrm{e}^{3u_1^*}}{\left(m^2 + \mathrm{e}^{2u_1^*}\right)^2}\right\} \neq 0,$$

所以引理 3 中条件 iii）满足。于是系统（3）至少存在一个正周期解，因此系统（2）至少有一个正周期解。证毕。

3　结语

本文研究了一类具有 Holling Ⅲ功能反应的时滞食饵－捕食系统正周期解的存在性。考虑到多种因素的综合影响，不可避免地会出现时滞现象，这对生态系统将产生很大影响。于是，在原始模型基础上加入了时滞因素，并利用 Mawhin 重合度理论中的延拓定理，得到了新系统正周期解的存在性条件。

参考文献：

[1]　李晨松，郝敦元. 一类具有 Holling Ⅲ型食饵－捕食系统的周期解存在性 [J]. 数学的实践与认识，2010，40(14)：80-84.
LI Chensong，HAO Dunyuan. The Existence of Periodic Solutions in Predator-Prey System with Holling Ⅲ Functional Response[J]. Mathematics in Practice and Theory，2010，40(14)：80-84.

[2]　GAINES R E，MAWHIN J L. Coincidence Degree, and Nonlinear Differential Equations[M]. Berlin：Springer-Verlag，1997：39-40.

[3]　高　刚，魏凤英. 具有捕获项及 Holling Ⅲ型功能反应的非自治 Lotka-Volterra 系统的多个正周期解 [J]. 福州大学学报（自然科学版），2016，44(3)：315-319.
GAO Gang，WEI Fengying. Multiple Positive Periodic Solutions of a Nonautonomous Lotka-Volterra System with Harvesting Terms and Holling Ⅲ Functional Response[J]. Journal of Fuzhou University(Natural Science Edition)，2016，44(3)：315-319.

[4]　LIU G R，YAN J R. Positive Periodic Solutions for Neutral Delay Ratio-Dependent Predator-Prey Model with Holling Type III Functional Response[J]. Applied Mathematics and Computation，2011，218(8)：4341-4348.

[5]　CAI Z，HUANG L H，CHEN H B. Positive Periodic Solution for a Multispecies Competition-Predator System with Holling III Functional Response and Time Delays[J]. Applied Mathematics and Computation，2011，217(10)：4866-4878.

[6]　XU R，CHAPLAIN M A J，DAVIDSON F A. Periodic Solutions for a Predator-Prey Model with Holling-Type Functional Response and Time Delays[J]. Applied Mathematics and Computation，2005，161(2)：637-654.

[7]　刘成钢，樊永红，王琳琳. 一类具 Holling II 型功能性反应的捕食者－食饵系统周期解的存在性 [J]. 鲁东大学学报（自然科学版），2015，31(2)：97-101.
LIU Chenggang，FAN Yonghong，WANG Linlin. Existence of Periodic Solution of a Predator-Prey System with Holling II Type Functional Response[J]. Ludong University Journal (Natural Science Edition)，2015，31(2)：97-101.

（责任编辑：邓光辉）