

doi:10.3969/j.issn.1673-9833.2020.01.001

具收获率的 Holling-IV 型两种群生物系统的定性分析

李冰森^{1,2}, 赵育林¹, 张子龙¹

(1. 湖南工业大学 理学院, 湖南 株洲 412007, 2. 中南大学 数学与统计学院, 湖南 长沙 410083)

摘要: 对一类具有收获率的 Holling-IV 型食饵-捕食者系统作定性分析, 利用 Poincare 形式级数法、Poincare-Bendixson 环域定理、Dulac 定理及分支理论等, 得到了此系统平衡点的性态、正平衡点的焦点量、极限环存在和不存在性的条件, 并借助数学软件对主要结果进行了数值验证。

关键词: 收获率; Holling-IV 型; 极限环; 食饵-捕食系统

中图分类号: O175

文献标志码: A

文章编号: 1673-9833(2020)01-0001-08

引文格式: 李冰森, 赵育林, 张子龙. 具收获率的 Holling-IV 型两种群生物系统的定性分析 [J]. 湖南工业大学学报, 2020, 34(1): 1-8.

A Qualitative Analysis of Two Groups of Holling-IV Biological Systems with Harvest Rate

LI Bingsen^{1,2}, ZHAO Yulin¹, ZHANG Zilong¹

(1. College of Science, Hunan University of Technology, Zhuzhou Hunan 412007, China;

2. School of Mathematics and Statistics, Central South University, Changsha 410083, China)

Abstract: A qualitative analysis has been made of a class of Holling-IV prey-predator systems with the harvest rate. By using Poincare formal series method, Poincare Bendixson ring domain theorem, Dulac theorem and branch theory, such statistics as the behavior of equilibrium point, the focus quantity of positive equilibrium point, the existence and nonexistence conditions of limit cycle can be obtained, with the main results to be verified via mathematical software.

Keywords: harvest rate; Holling-IV; limit cycle; prey-predator system

0 引言

生物数学, 主要是通过建立数学模型, 用数学方法进行分析, 研究种群之间发展变化规律的一个数学分支。在日常生产中, 养殖业者需要降低自己的养殖成本, 并且尽可能地提高自己的收益, 但又不能顾

前不顾后, 养殖者既希望能维持当下较高的收益, 又不破坏将来的收益, 这就需要考虑在何时进行捕捞。另外, 人类的生存发展依赖于各种生物资源, 而生物资源的合理开发需要运用科学的方法进行管理, 这体现了研究具有收获率的种群生物捕食系统的重要性。建立合理的生物种群模型, 利用动力学方法进行定性

收稿日期: 2019-06-27

基金项目: 湖南省自然科学基金资助项目 (2019JJ40068)

作者简介: 李冰森 (1998-), 男, 河北石家庄人, 中南大学硕士生, 主要研究方向为微分方程与动力系统, E-mail: lbs31415926@163.com

通信作者: 赵育林 (1973-), 男, 湖南湘潭人, 湖南工业大学教授, 博士, 硕士生导师, 主要从事常微分方程边值问题, 分数阶脉冲微分方程和偏微分方程方面的教学与研究, E-mail: zhaoylch@sina.com

分析,以更好地开发生物资源。

本文在部分已讨论的种群生物模型基础上,对一类具有收获率的 Holling-IV 型功能反应生物模型进行研究,为维持此类食饵-捕食者系统中两种群数量在一定的平衡状态,提出相应的干预策略,从而保持相应的生态平衡。

1 模型的建立

具有功能性反应捕食项的捕食者与食饵种群模型,由于其广泛的应用性在生物数学方向吸引了许多学者的关注,并且在具有 Holling-IV 型功能性反应函数和收获率的种群模型的研究上,已经取得了诸多成果^[1-8]。在实际情况下,人们会对食饵进行捕获或收获,因此考虑食饵种群具有收获率的生态模型具有重要意义。本文主要研究如下—类具有收获率的 Holling-IV 型两种群生物系统:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = rx(a - bx - cx^2) - \frac{xy}{k + x^2} - qEx, \\ \frac{dy}{dt} = y\left(\frac{x}{k + x^2} - d\right). \end{cases} \quad (1)$$

式中: x 、 y 分别为食饵和捕食者在时间 t 的种群密度;

r 为食饵内禀增长率;

k 为食饵的生存环境最大容量;

q 为对种群的收获率;

E 为对种群的捕捞强度;

d 为捕食者的死亡率;

qEx 表示线性收获率;

$x/(k+x^2)$ 表示 Holling-IV 型功能反应函数。

由系统 (1) 的生态意义可知, a 、 b 、 c 、 d 、 E 、 k 、 q 均为正常数,且只需在 $G = \{(x, y) | x \geq 0, y \geq 0\}$ 内对其进行研究。

2 模型的定性分析

2.1 平衡点的稳定性分析

作时间变换 $dt = (k+x^2)d\tau$, 且仍用 dt 表示 $d\tau$, 则系统 (1) 可化为

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x[(a_1 - a_2x - a_3x^2)(k + x^2) - y] \equiv P(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = y(-dx^2 + x - kd) \equiv Q(x, y). \end{cases} \quad (2)$$

式中: $a_1 = ra - qE$;

$a_2 = rb$;

$a_3 = rc$ 。

显然原点 $(0, 0)$ 总是系统 (2) 的平衡点。

令 $\Phi(x) = a_1 - a_2x - a_3x^2$, 则 $\Phi'(x) = -2a_3x - a_2$ 。由于 $x \in (0, +\infty)$ 时, $\Phi'(x) < 0$, 故 $\Phi(x)$ 是单调递减函数。

当 $a_1 \leq 0$ 时, $\Phi(x) = 0$ 没有正根;

当 $a_1 > 0$ 时, $\Phi(x) = 0$ 存在一个正根:

$$x_2 = \frac{a_2 - \sqrt{a_2^2 + 4a_1a_3}}{-2a_3}。$$

因此系统 (2) 有平衡点 $(x_2, 0)$ 。

记 $\Psi(x) = -dx^2 + x - kd$ 。当 $\Delta = 1 - 4kd^2 > 0$, 即 $4kd^2 < 1$ 时, $\Psi(x) = 0$ 有两个正根:

$$\bar{x}_1 = \frac{1 - \sqrt{1 - 4kd^2}}{2d}, \quad \bar{x}_2 = \frac{1 + \sqrt{1 - 4kd^2}}{2d}。$$

从而 $y_i = \Phi(\bar{x}_i)(k + \bar{x}_i^2)$, $i = 1, 2$ 。

所以系统 (2) 存在正平衡点 (\bar{x}_i, \bar{y}_i) ($i = 1, 2$) 的充要条件为 $\Phi(\bar{x}_i) > 0$ 。

显然, 系统 (2) 对应的 Jacobian 矩阵为

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} \zeta(x, y) & -x \\ \Psi'(x)y & \Psi(x) \end{pmatrix},$$

其中, $\zeta(x, y) = (k + 3x^2)\Phi(x) + x(k + x^2)\Phi'(x) - y$ 。

记 $P = -\text{tr}J(\bar{x}_1, \bar{y}_1) = -[\bar{x}_1(k + \bar{x}_1^2)\Phi'(\bar{x}_1) + 2\bar{x}_1\Phi(\bar{x}_1)]$,

因此有如下的定理 1。

定理 1 1) 当 $a_1 > 0$ 时, $O(0, 0)$ 为鞍点; 当 $a_1 < 0$ 时, 平衡点 O 始终是不稳定的。

2) 当 $4kd^2 < 1$, $a_1 > 0$ 时,

I) 若 $\bar{x}_1 < x_2 < \bar{x}_2$, 则 $E(x_2, 0)$ 为鞍点; 系统 (2) 只存在一个正平衡点 $Q(\bar{x}_1, \bar{y}_1)$, 且

当 $P > 0$ 时, $Q(\bar{x}_1, \bar{y}_1)$ 为稳定的结点或焦点;

当 $P < 0$ 时, $Q(\bar{x}_1, \bar{y}_1)$ 为不稳定的结点或焦点;

当 $P = 0$ 时, $Q(\bar{x}_1, \bar{y}_1)$ 为中心或焦点。

II) 若 $x_2 < \bar{x}_1$, 则 $E(x_2, 0)$ 为稳定的结点或焦点, 且系统 (2) 不存在正平衡点。

III) 若 $x_2 > \bar{x}_2$, 则 $E(x_2, 0)$ 为稳定的结点或焦点, 且系统 (2) 存在两个正平衡点 $Q(\bar{x}_1, \bar{y}_1)$ 和 $M(\bar{x}_2, \bar{y}_2)$, 其中 Q 的类型与 I) 相同, 而 $M(\bar{x}_2, \bar{y}_2)$ 是鞍点。

证明 1) 当 $a_1 < 0$ 时, 总有 $\text{tr}J(0, 0) < 0$, $\det J(0, 0) = ka_1 - kd < 0$, 故平衡点 $O(0, 0)$ 始终是不稳定的。当 $a_1 > 0$ 时, $\det J = k^2 da_1 < 0$, 故平衡点 $O(0, 0)$ 是鞍点。

2) 当 $4kd^2 < 1$, $a_1 > 0$ 时, $\bar{x}_1, x_2, \bar{x}_2$ 的可能位置关系如图 1 所示。

I) 若 $\bar{x}_1 < x_2 < \bar{x}_2$ 时, 由图 1a 可知: $\Phi'(x_2) < 0$, $\Phi'(\bar{x}_1) < 0$, $\Phi(\bar{x}_1) < 0$, 且 $\Phi(\bar{x}_2) < 0$, $\Psi(x_2) > 0$, 此时系统 (2) 只有平衡点 $E(x_2, 0)$ 和平衡点 $Q(\bar{x}_1, \bar{y}_1)$ 。

因为 $\det J(\bar{x}_1, \bar{y}_1) = \bar{x}_1(k + \bar{x}_1^2)\Phi(\bar{x}_1)\sqrt{1 - 4kd^2}$, 且 $P = -\bar{x}_1[(k + \bar{x}_1^2)\Phi'(\bar{x}_1) + 2\bar{x}_1\Phi(\bar{x}_1)]$ 。所以 $\det J(\bar{x}_1, \bar{y}_1) > 0$,

而 P 的正负性不定。从而当 $P > 0$ 时, $Q(\bar{x}_1, \bar{y}_1)$ 为稳定的结点或焦点; 当 $P < 0$ 时, $Q(\bar{x}_1, \bar{y}_1)$ 是不稳定的结点或焦点; 当 $P = 0$ 时, $Q(\bar{x}_1, \bar{y}_1)$ 为中心或焦点。

又因为 $\det J(x_2, 0) = (k + x_2^2)\Phi'(x_2)\Psi(x_2) < 0$, 故 $E(x_2, 0)$ 为鞍点。

II) 当 $0 < x_2 < \bar{x}_1$ 时, 由图 1b 可知: $\Phi'(x_2) < 0$, $\Phi(\bar{x}_1) < 0$, $\Psi(x_2) < 0$ 和 $\Phi(\bar{x}_2) < 0$, 此时系统 (2) 只有平衡点 $E(x_2, 0)$ 。

因 $\det J(x_2, 0) > 0$, $\text{tr} J(x_2, 0) < 0$, 故 $E(x_2, 0)$ 是稳定的焦点或结点。

III) 当 $x_2 > \bar{x}_2$ 时, 由图 1c 和图 1d 可知: $\Phi'(x_2) < 0$, $\Psi(x_2) < 0$, $\Phi(\bar{x}_1) > 0$ 和 $\Phi(\bar{x}_2) > 0$, 此时系统 (2) 有平衡点 $E(x_2, 0)$ 和两个正平衡点 $Q(\bar{x}_1, \bar{y}_1)$ 、 $M(\bar{x}_2, \bar{y}_2)$ 。

由 II) 可知 $E(x_2, 0)$ 是稳定的焦点或结点; 由 I) 知 $Q(\bar{x}_1, \bar{y}_1)$ 为中心或焦点。

因为 $\det J(\bar{x}_2, \bar{y}_2) = -\bar{x}_2(k + \bar{x}_2^2)\Phi(\bar{x}_2)\sqrt{1 - 4kd^2} < 0$, 则由平衡点类型判别定理^[1]知 $M(\bar{x}_2, \bar{y}_2)$ 为鞍点。

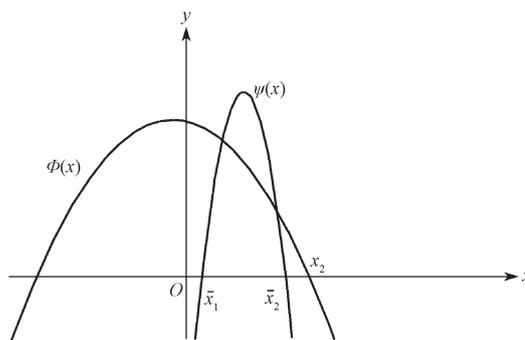
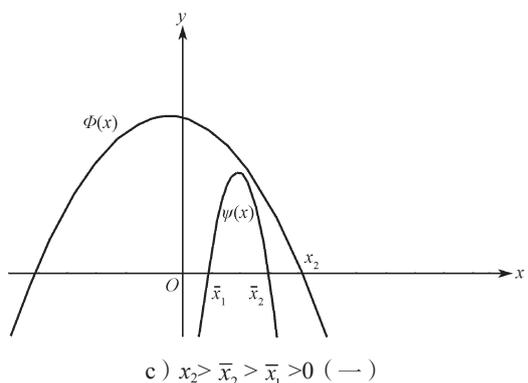
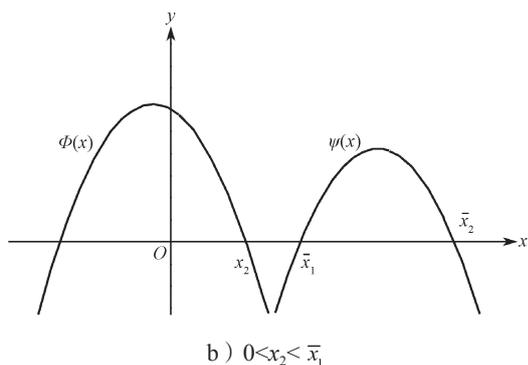
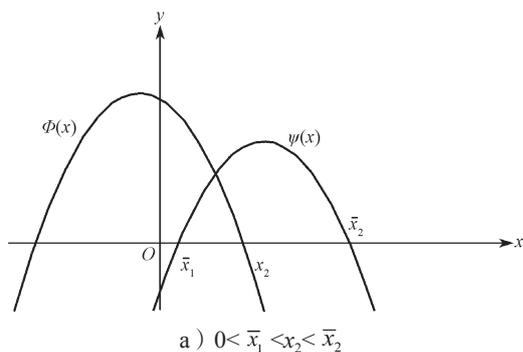


图 1 $\bar{x}_1, x_2, \bar{x}_2$ 可能的位置关系图

Fig. 1 Possible location diagram of $\bar{x}_1, x_2, \bar{x}_2$

下面给出定理 1 的数值仿真结果。

I) 当 $a_1 = 3, a_2 = 1, a_3 = 0.5, k = 20, d = 0.1$, 系统 (2) 的初始条件分别为 $[3, 5], [4, 4], [1, 6]$ 时的相位图如图 2 所示。此时 $x_2 = 1.6458, \bar{x}_1 = 2.7639, x_2 < \bar{x}_1$, 由图像观察到 $E(x_2, 0)$ 为稳定的结点或焦点, 与定理 1 的结论相吻合。

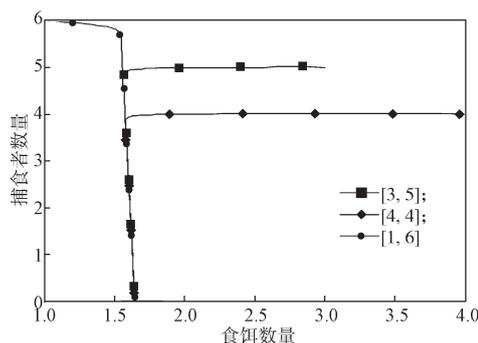


图 2 点 E 对应的相位图

Fig. 2 Corresponding phase diagram of point E

II) 当 $a_1 = 2, a_2 = 0.05, a_3 = 0.05, k = 20, d = 0.1$, 初始条件为 $[10, 10]$ 时, 系统 (2) 的相位图及解曲线图分别如图 3 和图 4 所示。经计算得 $x_2 = 5.8443, \bar{x}_1 = 2.7639, \bar{x}_2 = 7.2361$ 及 $P = 16.7539 > 0$, 易知 $\bar{x}_1 < x_2 < \bar{x}_2$ 。由图 3 观察到 $Q(\bar{x}_1, \bar{y}_1)$ 为稳定的结点或焦点, 与定理 1 的结论相吻合。

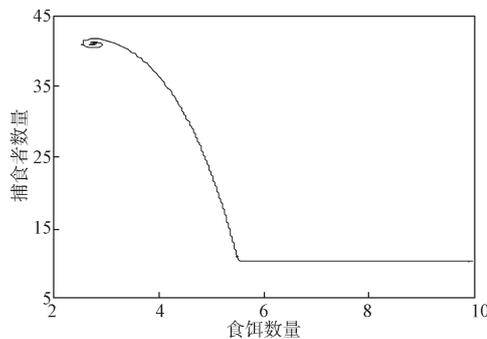


图 3 点 Q 稳定状态下的相位图

Fig. 3 Phase diagram in the stable state of point Q

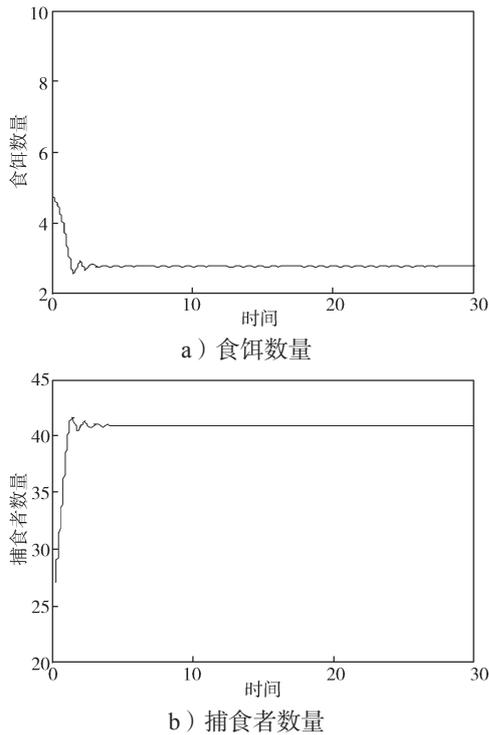


图4 食饵-捕食者系统的解曲线图

Fig. 4 Solution curve of the prey-predator system

III) 当 $a_1=1, a_2=0.05, a_3=0.05, k=10, d=0.1$, 初值为 $[1, 6]$ 时, 系统 (2) 的相位图如图 5 所示。经过计算可以得出 $x_2=4, \bar{x}_1=1.127 0, \bar{x}_2=8.873 0$, 且 $P=0.169 3 > 0, \bar{x}_1 < x_2 < \bar{x}_2$ 。根据定理 1 可知, 平衡点 $Q(\bar{x}_1, \bar{y}_1)$ 应为不稳定的结点或焦点。由图 5 可以观察到 $Q(\bar{x}_1, \bar{y}_1)$ 周围存在稳定的极限环, 因此 $Q(\bar{x}_1, \bar{y}_1)$ 为不稳定的结点或焦点, 与定理 1 的结论相吻合。

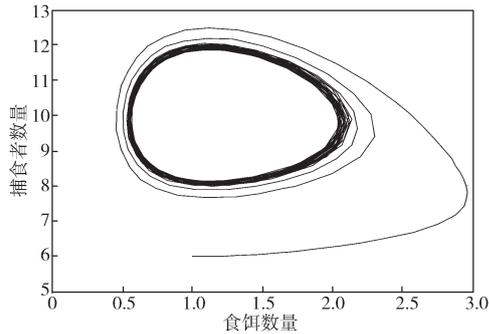


图5 点 Q 不稳定状态下的相位图

Fig. 5 Phase diagram in the unstable state of point Q

2.2 中心焦点的判别

定理 2 当 $4kd^2 < 1, a_1 > 0, \bar{x}_1 < x_2 < \bar{x}_2$ 时, 若 $P=0$, 则有

- I) 当 $W < 0$ 时, $Q(\bar{x}_1, \bar{y}_1)$ 为一阶不稳定细焦点;
- II) 当 $W=0$ 时, $Q(\bar{x}_1, \bar{y}_1)$ 可能是二阶细焦点;
- III) 当 $W > 0$ 时, $Q(\bar{x}_1, \bar{y}_1)$ 为一阶稳定细焦点。

其中: $W = -\frac{\pi}{2}(2DJ + L + 3F - DM - KJ); L = \frac{d}{\bar{x}_1} H,$

$$D = \frac{10a_3\bar{x}_1^3 + 6a_2\bar{x}_1^2 + 3(ka_3 - a_1)\bar{x}_1 + ka_2}{\bar{x}_1} H, \quad J = \frac{d}{1 - 2d\bar{x}_1},$$

$$F = \frac{10a_3\bar{x}_1^2 + 4a_2\bar{x}_1 + ka_3 - a_1}{\bar{x}_1} H, \quad M = \frac{1}{\bar{x}_1}, \quad K = \frac{(1 - 2d\bar{x}_1)}{\bar{x}_1} H;$$

$$H = \sqrt{\frac{\bar{x}_1}{(1 - 2d\bar{x}_1)\bar{y}_1}}.$$

证明 当 $P=0$ 时, 作平移变换: $X=x - \bar{x}_1, Y=y - \bar{y}_1, d\tau = -\bar{x}_1 dt$, 从而将平衡点 $Q(\bar{x}_1, \bar{y}_1)$ 平移至原点。仍用 x, y, t 表示 X, Y, τ , 则系统 (2) 可化为

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + \frac{10a_3\bar{x}_1^3 + 6a_2\bar{x}_1^2 + 3(ka_3 - a_1)\bar{x}_1 + ka_2}{\bar{x}_1} x^2 + \\ \frac{1}{\bar{x}_1} xy + \frac{10a_3\bar{x}_1^2 + 4a_2\bar{x}_1 + ka_3 - a_1}{\bar{x}_1} x^3 + \\ \frac{a_2 + 5\bar{x}_1}{\bar{x}_1} x^4 + \frac{a_3}{\bar{x}_1} x^5, \\ \frac{dy}{dt} = -\frac{(1 - 2d\bar{x}_1)\bar{y}_1}{\bar{x}_1} x + \frac{d\bar{y}_1}{\bar{x}_1} x^2 - \frac{(1 - 2d\bar{x}_1)}{\bar{x}_1} xy + \frac{d}{\bar{x}_1} x^2 y. \end{cases}$$

又因 $1 - 2d\bar{x}_1 = \sqrt{1 - 4kd^2} > 0$, 再作如下变量变换: $X=x, Y = \sqrt{\bar{x}_1 / ((1 - 2d\bar{x}_1)\bar{y}_1)} y, d\tau = \sqrt{(1 - 2d\bar{x}_1)\bar{y}_1 / \bar{x}_1} dt$ 。仍将 X, Y, τ 记为 x, y, t , 则上述系统可化为

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + Dx^2 + Mxy + Fx^3 + Gx^4 + Lx^5 = \\ y + \sum_{i=2}^5 P_i(x, y) \equiv \bar{P}(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = -x + Jx^2 - Kxy + Lx^2 y = \\ -x + \sum_{j=2}^3 Q_j(x, y) \equiv \bar{Q}(x, y), \end{cases} \quad (3)$$

式中: $G = \frac{a_2 + 5a_3\bar{x}_1}{\bar{x}_1};$

$$I = \frac{a_3}{\bar{x}_1} \cdot H.$$

作形式级数: $F(x, y) = x^2 + y^2 + \sum_{k=3}^{\infty} F_k(x, y)$, 其中 $F_k(x, y)$ 为 x 和 y 的齐次多项式。

$$\text{令 } \frac{\partial F}{\partial t} \cdot \bar{P}(x, y) + \frac{\partial F}{\partial t} \cdot \bar{Q}(x, y) = 0, \text{ 则}$$

$$\left(2x + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{\partial F_k}{\partial x} \right) \left(y + \sum_{i=2}^{\infty} P_i(x, y) \right) + \left(2y + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{\partial F_k}{\partial y} \right) \left(-x + \sum_{i=2}^{\infty} Q_i(x, y) \right) = 0. \quad (4)$$

由式 (4) 中的三次项和四次项为 0, 则能确定 F_3, F_4 。

记 $-H_3(x, y) = 2xP_2(x, y) + 2yQ_2(x, y)$, 则

$$H_3(x, y) = -2Dx^3 - (2M + 2J)x^2y + 2Kxy^2.$$

记 $F_3(x, y) = b_0x^3 + b_1x^2y + b_2xy^2 + b^3y^3$, 则

$$y \frac{\partial F_3}{\partial x} - x \frac{\partial F_3}{\partial y} = y(3b_0x^2 + 2b_1xy + b_2y^2) - x(b_1x^2 + 2b_2xy + 3b_3xy^3) - b_1x^3 + (3b_0 - 2b_2)x^2y + (2b_1 - 3b_3)xy^2 + b_2y^3。$$

由 $y \frac{\partial F_3}{\partial x} - x \frac{\partial F_3}{\partial y} = H_3(x, y)$ 可得

$$-b_1x^3 + (3b_0 - 2b_2)x^2y + (2b_1 - 3b_3)xy^2 + b_2y^3 = -2Dx^3 - (2M + 2J)x^2y + 2Kxy^2。$$

比较上式两端的系数可得

$$b_0 = -\frac{2(M+J)}{3}, b_1 = 2D, b_2 = 0, b_3 = \frac{2(2D-k)}{3};$$

$$F_3(x, y) = -\frac{2(M+J)}{3}x^3 + 2Dx^2y + \frac{2(2D-k)}{3}y^3。$$

从而

$$H_4(x, y) = 2xP_3 + 2yQ_3 + \frac{\partial F_3}{\partial x} \cdot P_2 + \frac{\partial F_3}{\partial y} \cdot Q_2 = A_1xy^3 + A_2x^3y + A_3x^2y^2 + A_4x^4,$$

式中: $A_1 = 2(K^2 - 2DK)$;

$$A_2 = 2(2D^2 - M^2 - EJ - DK);$$

$$A_3 = 2(L + 2DM + 2DJ - K);$$

$$A_4 = 2(F - DM)。$$

作极坐标变换: $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$, 则

$$W = \int_0^{2\pi} H_4(\cos \theta, \sin \theta) d\theta = \frac{\pi}{2}(DM + KJ - 2DJ - 3F - L)。$$

由 Poincare 中心焦点判别法知, 当 $W > 0$ 时, $O(0, 0)$ 是系统 (3) 的一阶不稳定细焦点。考虑作时间变换 $d\tau = -\bar{x}_1 dt$, 因此, 当 $W < 0$ 时, $Q(\bar{x}_1, \bar{y}_1)$ 为一阶不稳定细焦点; 当 $W = 0$ 时, $Q(\bar{x}_1, \bar{y}_1)$ 可能是二阶细焦点; 当 $W > 0$ 时, $Q(\bar{x}_1, \bar{y}_1)$ 为一阶稳定细焦点。

2.3 极限环的不存在性

定理 3 若系统 (2) 满足以下条件中的任意一个, 则系统 (2) 在第一象限内不存在奇异闭轨线或任何闭曲线。

I) $a_1 \leq d, ka_2 \geq 1$;

II) $a_1 \leq ka_3$;

III) $a_1 > ka_3, f(\bar{x}_2) \leq 0$, 其中 $f(x), \bar{x}$ 分别由式 (5) 和 (6) 给出。

证明 I) 由 Poincare 切性曲线法, 作曲线族 $F(x, y) = \ln x + \ln y = c$, 其中 c 为任意非零常数。由系统 (2) 可知, 在区域 G 上, $F(x, y) \in C'(G)$ 。又因为

$$\frac{dF}{dt} \Big|_{(2)} = (k + x^2)(a_1 - a_2x - a_3x^2) - y - dx^2 + x - kd = B_1 + B_2x + B_3x^2 - a_2x^3 - a_3x^4 - y,$$

其中 $B_1 = k(a_1 - d), B_2 = 1 - ka_2, b_3 = a_1 - d - ka_3$ 。所以, 当 $a_1 < d, ka_2 \geq 1$ 时, $\frac{dF}{dt} \Big|_{(2)} < 0$, 且系统 (2) 的整条轨线并不被 $\frac{dF}{dt} \Big|_{(2)} = 0$ 包含。因此系统 (2) 在第一象限内不存在奇异闭轨线或者任何闭曲线。

为了证明 II) 和 III) 的结论, 作 Dulac 函数

$$B(x, y) = x^{-1}y^{-1}。$$

根据系统 (2), 对 $\forall (x, y) \in G$, 有

$$\Gamma = \frac{\partial(BP)}{\partial x} + \frac{\partial(BQ)}{\partial y} = \frac{-ka_2 + 2(a_1 - ka_3)x - 3a_2x^2 - 4a_3x^3}{y}。$$

当 $a_1 \leq ka_3$ 时, $\Gamma \leq 0$ 。若 $a_1 > ka_3$, 则记

$$f(x) = -ka_2 + 2(a_1 - ka_3)x - 3a_2x^2 - 4a_3x^3, \quad (5)$$

从而有

$$f'(x) = 2(a_1 - ka_3) - 6a_2x - 12a_3x^2。$$

由于 $\Delta = 2\sqrt{9a_2^2 + 24a_3(a_1 - ka_3)} > 0$, 所以 $f'(x) = 0$ 有两个不同的实根 \bar{x}_1, \bar{x}_2 , 其中

$$\bar{x}_1 = \frac{-3a_2 - \sqrt{9a_2^2 + 24a_3(a_1 - ka_3)}}{12a_3},$$

$$\bar{x}_2 = \frac{-3a_2 + \sqrt{9a_2^2 + 24a_3(a_1 - ka_3)}}{12a_3},$$

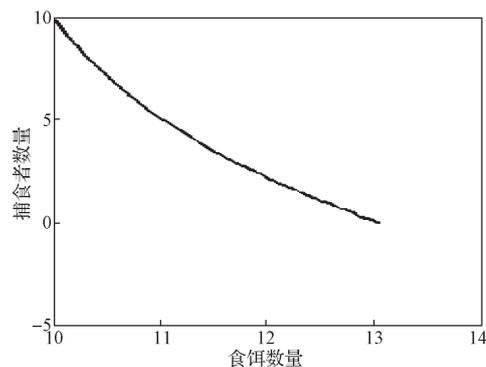
且 \bar{x}_1, \bar{x}_2 是 $f(x)$ 的拐点。

又 $f(0) < -ka_2 < 0$, 由导数和函数图像间的关系可知, 当 $f(\bar{x}_2) < 0$, 且 $x \geq 0$ 时, $f(x) \leq 0$ 。从而当 $x \geq 0, y \geq 0$ 时, 可得

$$\Gamma = f(x)y \leq 0。$$

由 Dulac 定理知, 当 $a_1 \leq ka_3$ 或 $a_1 > ka_3, f(\bar{x}_2) \leq 0$ 时, 系统 (2) 在第一象限内不存在奇异闭轨线或任何闭曲线。

下面给出定理 3 的数值仿真, 系统 (2) 的相位图如图 6 的所示。



a) 满足条件 I)

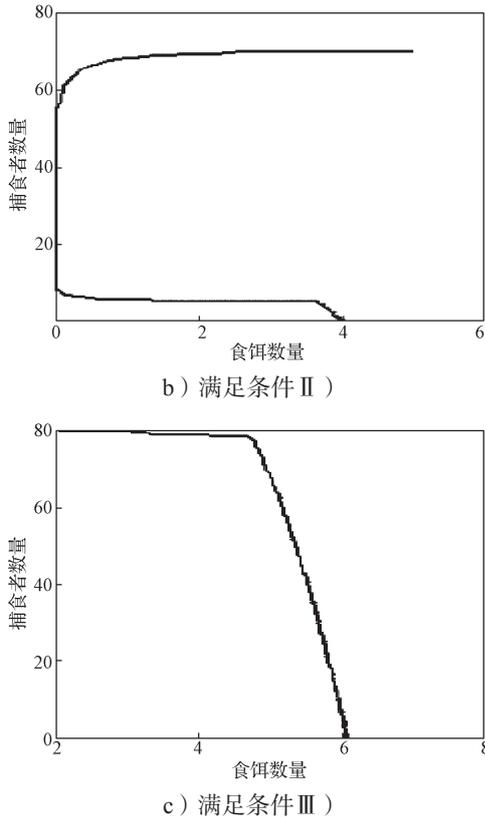


图 6 3种情况下的相位图

Fig. 6 Phase diagrams under three conditions

I) 当 $a_1=0.15, a_2=0.005, a_3=0.0005, d=0.2, k=300$ 时, $a_1 \leq d, ka_2 \geq 1$, 相位图如图 6a 所示。

II) 当 $a_1=0.1, a_2=0.05, a_3=0.05, k=25, d=0.1$ 时, $a_1 \leq ka_3$, 相位图如图 6b 所示。

III) 当 $a_1=4, a_2=0.05, a_3=0.1, k=30, d=0.1$ 时, $a_1 > ka_3, f(\bar{x}_2) = -0.006 \leq 0$, 相位图如图 6c 所示。

对比定理 3 可知, 图像结果与定理 3 的结论相吻合, 不存在闭轨。

2.4 正初始解的有界性

记 $g(x) = a_1 - a_2x - a_3x^2, \phi(x) = x/(k+x^2), a_1 = ra - qe, a_2 = rb, a_3 = rc$ 。则系统 (1) 可化为

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = xg(x) - y\phi(x), \\ \frac{dy}{dt} = y(-d + \phi(x)). \end{cases} \quad (6)$$

考虑到生物种群的实际意义, $g(x)$ 应该满足如下条件:

H) 存在 $x_2 > 0$, 使得 $g(x_2) = 0$; 当 $x \geq 0$ 时, $g'(x) < 0, g(0) = a_1 = ra - qe > 0$ 。

定理 4 若条件 H) 满足, 且系统 (6) 的初始条件满足 $x(0) > 0, y(0) > 0$, 则系统 (6) 的解是有界的。

证明 I) 当 $0 < x(0) < x_2$ 时, 则有 $x(t) < x_2$; 反之若 $x(t) > x_2$, 由 $x(t)$ 的连续性, 则存在 $t_1 > 0$, 使得

$x(t_1) = x_2$, 且 $x'(t_1) \geq 0$, 这与

$$x'(t_1) = -x_2 y^2 / (k + x_2^2) < 0$$

矛盾。因此 $x(t) < x_2$ 成立。

II) 当 $x_2 < x(0)$ 时, 由上述条件 H 知, 存在如下两种情形: 一是 $x(t)$ 一直减少到某个大于等于 x_2 的常数; 二是 $\exists t_2 > 0$ 满足 $x(t_2) < x_2$, 从而当 $t \geq t_2$ 时, $x(t) < x_2$, 所以 $x(t) \leq \max\{x_2, x(0)\}$ 。

III) 将系统 (6) 的两个方程相加可得

$$\frac{d(x+y)}{dt} = xg(x) - yd = xg(x) + xd - (x+y)d \leq M_1 - (x+y)$$

求解上式得

$$y(t) \leq \left(x(0) + y(0) - \frac{M_1}{d} \right) \exp(-dt) + \frac{M_1}{d} - x(t),$$

其中 $M_1 = \max\{xg(x) + xd\}$ 。

由于 $x(t), g(x)$ 有界, 从而 $y(t)$ 有界。

综上所述, 即当 $x(0) > 0, y(0) > 0$ 时, 系统 (6) 的解 $x(t), y(t)$ 有界。

2.5 极限环的存在性

定理 5 若 $Q(\bar{x}_1, \bar{y}_1)$ 是不稳定焦点或结点, 即 $4kd^2 < 1, a_1 > 0, \bar{x}_1 < x_2 < \bar{x}_2, P < 0$ 时, 则系统 (2) 在 G 内存在极限环。

证明 作直线 $L_1: x = \bar{x}_2$, 则在 G 内当 $y > 0$ 时,

$$\left. \frac{dx}{dt} \right|_{L_1} = -\bar{x}_2 y < 0,$$

L_1 是无切直线, 系统 (2) 的轨线自右而左穿过 L_1 。

再作直线 $L_2: y = Kx + n, 0 < x < \bar{x}_2, K$ 为大于 0 的常数, 则对系统 (2) 有

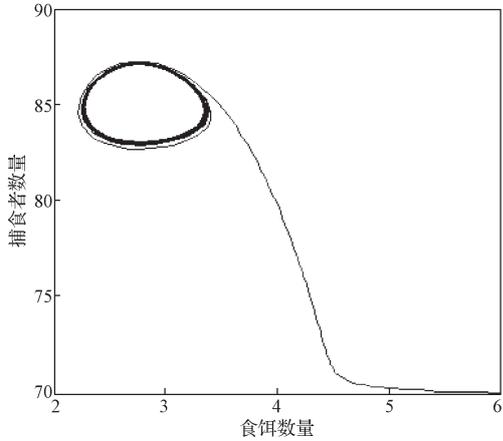
$$\begin{aligned} \frac{dL_2}{dt} &= \left[\frac{dy}{dt} - K \frac{dx}{dt} \right]_{y=Kx+n} = \\ &= (Kx+n)(-dx^2 + x - kd) - \\ &= Kx \left[(a_1 - a_2x - a_3x^2)(k + x^2) - (Kx+n) \right] = \\ &= b_1x^5 + b_2x^4 + b_3x^3 + b_4x^2 + b_5x - nkd. \end{aligned}$$

当 n 充分大时, $dL_2/dt < 0$, 故 L_2 是无切直线, 轨线自上而下穿过 L_2 。由于 $x=0, y=0$ 均是系统 (2) 的轨线, 而 $Q(\bar{x}_1, \bar{y}_1)$ 是不稳定的, 根据 Poincare-Bendixon 环域定理知, 系统 (2) 在 $Q(\bar{x}_1, \bar{y}_1)$ 附近存在极限环。

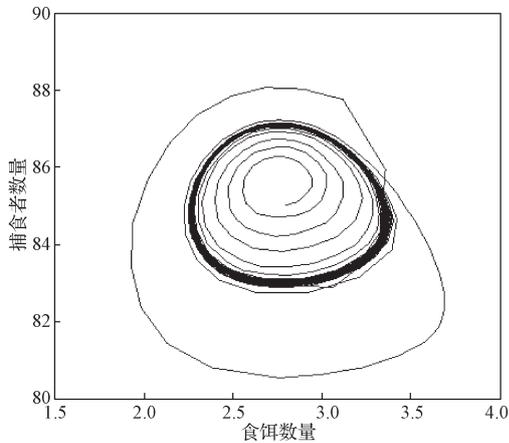
下面给出定理 5 的数值仿真。

对于系统 (2), 当 $a_1=4, a_2=0.05, a_3=0.1, k=20, d=0.1$ 时, 计算得到 $x_2=6.07, \bar{x}_1=2.76, \bar{x}_2=7.23, P=-1.282$, 满足定理 5 的条件。此时 $4kd^2 < 1, a_1 > 0, \bar{x}_1 < x_2 < \bar{x}_2, P < 0$, 系统应存在极限环。

图 7 是系统 (2) 初值分别为 [6, 70] 和 [2.8, 85] 时的相位图。由图 7 可知, 系统存在极限环。



a) 初值为 [6, 70] 时



b) 初值为 [2.8, 85] 时

图 7 具有极限环的相位图

Fig. 7 Phase diagram with a limit cycle

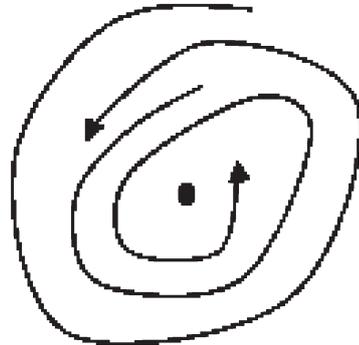
2.6 Hopf 分支

定理 6 I) 当 $4kd^2 < 1, a_1 > 0, \bar{x}_1 < x_2 < \bar{x}_2, W > 0$ 时, 若 $\exists 0 < \delta_1 \ll 1$ 满足 $-\delta_1 < P < 0$, 则系统 (2) 在 $Q(\bar{x}_1, \bar{y}_1)$ 的某一个邻域内至少存在一个极限环, 若该极限环唯一, 则该极限环为稳定环。

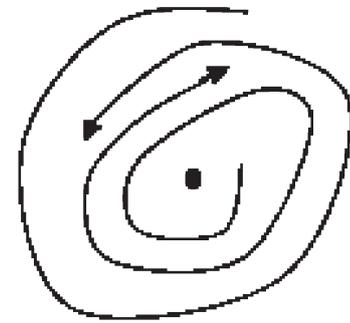
II) 当 $4kd^2 < 1, a_1 > 0, \bar{x}_1 < x_2 < \bar{x}_2, W < 0$ 时, 若 $\exists 0 < \delta_2 \ll 1$ 满足 $0 < P < \delta_2$, 则系统 (2) 在 $Q(\bar{x}_1, \bar{y}_1)$ 的某一个邻域内至少存在一个极限环, 若该极限环唯一, 则该极限环为不稳定环。

证明 I) 当 $W > 0, P = 0$ 时, 由定理 2 可知 $Q(\bar{x}_1, \bar{y}_1)$ 为系统 (2) 的一阶稳定细焦点, 所以在点 $Q(\bar{x}_1, \bar{y}_1)$ 的周围, 系统 (2) 的轨线盘旋逼近点 $Q(\bar{x}_1, \bar{y}_1)$ 。若系统 (2) 的参数做微小的扰动, 使得 $P < 0$ 时, 由定理 1 知, 平衡点 $Q(\bar{x}_1, \bar{y}_1)$ 变成不稳定的, 导致点 $Q(\bar{x}_1, \bar{y}_1)$ 在一定的邻域内的轨线盘旋离开点 $Q(\bar{x}_1, \bar{y}_1)$ 而构成 Bendixson 环域的内境界线。由解关于参数的稳定性可知, 平衡点 $Q(\bar{x}_1, \bar{y}_1)$ 外围轨线只是

做了微小的扰动, 从而构成 Bendixson 环域的外境界线。根据 Bendixson 定理, 系统 (2) 在 $Q(\bar{x}_1, \bar{y}_1)$ 的某一个邻域内存在极限环, 如图 8 所示。



a) 扰动前状态



b) 扰动后状态

图 8 系统 (2) 的极限环

Fig. 8 Limit cycle of system (2)

II) 当 $W < 0, P = 0$ 时, 由定理 2 知 $Q(\bar{x}_1, \bar{y}_1)$ 为系统 (2) 的一阶不稳定细焦点, 所以在点 $Q(\bar{x}_1, \bar{y}_1)$ 的周围, 系统 (2) 的轨线盘旋远离点 $Q(\bar{x}_1, \bar{y}_1)$ 。若系统 (2) 的参数做微小的扰动, 使得 $P > 0$ 时, 由定理 1 知, 平衡点 $Q(\bar{x}_1, \bar{y}_1)$ 变成稳定的, 导致点 $Q(\bar{x}_1, \bar{y}_1)$ 在一定的邻域内的轨线盘旋逼近点 $Q(\bar{x}_1, \bar{y}_1)$ 而构成 Bendixson 环域的内境界线。由解关于参数的稳定性可知, 平衡点 $Q(\bar{x}_1, \bar{y}_1)$ 的外围轨线只做了微小的扰动, 从而构成 Bendixson 环域的外境界线。根据 Bendixson 定理, 系统 (2) 在 $Q(\bar{x}_1, \bar{y}_1)$ 的某一个邻域内存在不稳定的极限环。

3 结论

由定理 1、定理 2、定理 5 和 Hopf 分支理论^[9]可知, 系统 (2) 只存在一个正平衡点时, 在一定条件下, 两个生物种群能够趋于周期平衡状态。但在一定条件下, 系统会存在两个正平衡点, 此时, 当初始状态食饵种群数量保持在某个范围内时, 捕食者种群将会逐渐灭绝, 导致生态恶化。因此对于该类食饵-捕食者系统, 在食饵种群数量达到一定的范围时, 应

当对食饵种群进行干预（即进行适当的收获），从而使两个种群数量维持一定的平衡。

参考文献：

- [1] 潘丽钦, 吴承强. 食饵有非线性收获率的 Holling-IV 类功能性反应的捕食系统定性分析 [J]. 福州大学学报 (自然科学版), 2011, 39(4): 486-492.
PAN Liqin, WU Chengqiang. The Qualitative Analysis of a Predator-Prey System with Nonlinear-Rate Prey Harvesting Under Type-IV Functional Response[J]. Journal of Fuzhou University (Natural Science Edition), 2011, 39(4): 486-492.
- [2] 戴国仁. 食饵具有常数收获率的 Kolmogorov 系统 [J]. 四川大学学报 (自然科学版), 1989, 26(3): 252-259.
DAI Guoren. Kolmogorov System with Constant-Rate Prey Harvesting[J]. Journal of Sichuan University (Natural Science Edition), 1989, 26(3): 252-259.
- [3] 王继华, 曾宪武. 一类具有简化 Holling IV 类功能反应的捕食-食饵模型的定性分析 [J]. 数学杂志, 2004, 24(6): 701-705.
WANG Jihua, ZENG Xianwu. The Qualitative Analysis of a Predator-Prey System with Holling Type-IV Functional Response[J]. Journal of Mathematics, 2004, 24(6): 701-705.
- [4] 何德明, 何万生, 谢保利. 一类具有线性收获率的生物捕食系统的定性分析 [J]. 纯粹数学与应用数学, 2013, 29(1): 33-39.
HE Deming, HE Wansheng, XIE Baoli. A Qualitative Analysis of a Kind of Prey-Predator System with Linear Harvesting Rates[J]. Pure and Applied Mathematics, 2013, 29(1): 33-39.
- [5] 周稻祥. 种群生态模型的分叉与稳定性研究 [D]. 重庆: 重庆大学, 2013.
ZHOU Daoxiang. The Bifurcation and Stability Research on Population Ecology Model[D]. Chongqing: Chongqing University, 2013.
- [6] 陈江彬. 具避难所的捕食者-食饵系统的定性研究 [J]. 福州大学学报 (自然科学版), 2014, 42(6): 812-818.
CHEN Jiangbin. Qualitative Analysis of a Prey-Predator Model Incorporating a Prey Refuge[J]. Journal of Fuzhou University (Natural Science Edition), 2014, 42(6): 812-818.
- [7] LAJMIRI Z, GHAZIANI R K, GUASEMI M. Numerical Bifurcation and Stability Analysis of an Predator-Prey System with Generalized Holling Type III Functional Response[J]. Boletim Da Sociedade Paranaense De Matemática, 2018, 36(3): 89-102.
- [8] HUANG J C, RUAN S G, SONG J. Bifurcations in a Predator-Prey System of Leslie Type with Generalized Holling Type III Functional Response[J]. Journal of Differential Equations, 2014, 257(6): 1721-1752.
- [9] 罗定军, 张祥, 董梅芳. 动力系统的定性与分支理论 [M]. 北京: 科学出版社, 1999: 145-148.
LUO Dingjun, ZHANG Xiang, DONG Meifang. Qualitative and Branch Theory of Dynamical Systems[M]. Beijing: Science Press, 1999: 145-148.

(责任编辑: 邓光辉)