

doi:10.3969/j.issn.1673-9833.2019.05.009

基于唯一特征的 BP 神经网络求解 平面 2R 机械手逆运动学

肖帆, 李光, 游雨龙

(湖南工业大学 机械工程学院, 湖南 株洲 412007)

摘要: 针对神经网络求解机器人逆运动学时输入与输出间需要建立正确的映射关系, 提出一种基于唯一特征的 BP 神经网络求解平面 2R 机械手逆运动学的方法。该方法通过在机械手的工作空间中进行几何分析, 确定了逆运动学多解的规律, 同时在 BP 神经网络的输入中增加方位角作为特征参数。仿真结果表明: 所提方法只需要一个 BP 神经网络, 就可以求得平面 2R 机械手的逆运动学完整解; 预测误差较小在 $-0.002 \sim 0.002$ rad 之间。

关键词: 逆运动学解; 多解; 平面 2R 机械手; BP 神经网络

中图分类号: TP242.2

文献标志码: A

文章编号: 1673-9833(2019)05-0051-06

引文格式: 肖帆, 李光, 游雨龙. 基于唯一特征的 BP 神经网络求解平面 2R 机械手逆运动学 [J]. 湖南工业大学学报, 2019, 33(5): 51-56.

Inverse Kinematics Solution of Planar 2R Manipulator Based on BP Neural Network with Unique Feature

XIAO Fan, LI Guang, YOU Yulong

(College of Mechanical Engineering, Hunan University of Technology, Zhuzhou Hunan 412007, China)

Abstract: Aiming at the need to establish a correct mapping relationship between input and output in solving inverse kinematics of robots by neural network, a method has thus been proposed of solving inverse kinematics of planar 2R manipulator based on BP neural network with unique feature. Based on a geometric analysis in the workspace of the manipulator, the law of multiple solutions of inverse kinematics can be determined. Meanwhile, azimuth angle is added to the input of BP neural network as the characteristic parameter. The simulation results show that the complete inverse kinematics solution of planar 2R manipulator can be obtained with only one BP neural network, with a prediction error between -0.002 rad and 0.002 rad.

Keywords: inverse kinematics; multiple solution; planar 2R manipulator; BP neural network

收稿日期: 2018-09-05

基金项目: 湖南省自然科学基金资助项目 (2018JJ4079), 湖南工业大学研究生科研创新基金资助项目 (CX1908)

作者简介: 肖帆 (1988-), 男, 湖南涟源人, 湖南工业大学硕士生, 主要研究方向为机器人智能控制,

E-mail: 297067972@qq.com

通信作者: 李光 (1963-), 男, 湖北武汉人, 湖南工业大学教授, 硕士生导师, 主要从事复杂机电一体化建模和控制方面的教学与研究, E-mail: liguangw@126.com

1 研究背景

机器人逆运动学求解,是将机器人末端执行器在笛卡尔坐标系中的位置,转换成关节空间中各关节角变量的过程,它在机器人控制中占有非常重要的地位,是机器人运动分析、离线编程、轨迹规划等的基础,是机器人学中十分重要的问题^[1]。特别在机器人的轨迹规划过程中,逆运动学求解的准确性会直接影响到末端执行器轨迹的平滑性^[2]。因此,对机器人逆运动学求解,是当前国内外研究者研究、优化的热点问题。

机器人逆运动学模型是一个多输入、多输出的系统,它通常是非线性方程组的求解。与线性方程组的求解不同,非线性方程组没有通用的求解算法。传统的求机器人逆向运动学多解的方法有解析法^[3]、数值迭代法^[4]以及几何法^[5]等。解析法计算量大,在消元过程中容易产生错误,且很难得到正确的一元高次方程组。几何法和迭代法在逆运动学求解过程中,需要在特定的条件下才能实现。

随着机器人结构越来越复杂和计算机发展的突飞猛进,研究者正广泛研究应用现代智能算法来求逆解。其中,神经网络因其具有对任意连续函数的逼近能力和泛化能力,而被应用在机器人逆运动学求解中。M. Z. Al-Faiz^[6]和张培艳等^[7]分别采用FRBP (finite recurrent back propagation) 和RBF (radial basis function) 神经网络研究了机器人逆运动学求解问题,并取得了一些成果,但是他们都是在机器人只有逆运动学单解的条件下进行的研究。从关节空间正向运动学得到的空间位姿是唯一的,但是由位姿到关节空间的逆映射,却是一对多的。通常用神经网络求逆运动学解时,将空间位姿作为输入,关节角作为输出,如果输入-输出间没有建立唯一的映射关系,使用单独的神经网络结构是无法准确求得机器人逆运动学多解的。为了使神经网络训练样本的输入与输出间具有唯一映射关系,B. Daya等^[8]提出一种由6个子神经网络组成的神经网络体系结构,很好地求出了平面2R机械手的两组逆运动学解,但是该方法所需要训练的神经网络较多。A. V. Duka等^[9]通过增加方位角作为神经网络输入的特征参数,从而在输入与输出之间建立了唯一映射关系,但是缺乏对逆运动学多解的分析,最终只求得了平面3R机械手的一组逆运动学解。

本文通过将连杆分离-重新组合的方式,对平面2R机械手进行几何分析,确定了其逆运动学多解的规律,用一个含三层隐含层的BP神经网络对样本进

行训练,同时输入中增加方位角作为特征参数,消除了由于存在逆运动学多解造成的映射错误。

2 平面2R机械手的运动学分析

2.1 逆运动学多解的几何分析

图1所示是平面2R机械手。

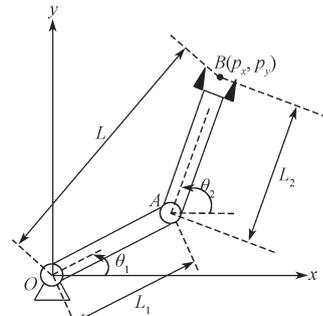


图1 平面2R机械手

Fig.1 Planar 2R manipulator

图中,连杆的长度分别为 $OA=L_1$, $AB=L_2$,两个关节角的取值范围为 $\theta_1 \in (-\pi, \pi)$, $\theta_2 \in (-\pi, \pi)$ 。末端执行器B点的坐标为 (p_x, p_y) ,OB的距离为L,

$$L = \sqrt{p_x^2 + p_y^2}。$$

假设 $L_2 < L_1$,连杆从A点断开分为两部分,在OA连杆运动中,A点的轨迹是以坐标原点O为圆心的圆,记为圆O;在AB连杆运动中,A点的轨迹是以B为圆心的圆,记为圆B,且圆心B是动点。图2是两根连杆分离后单独运动时A点的轨迹。

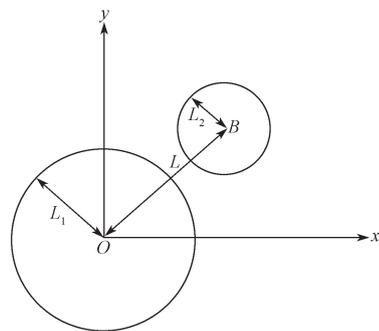


图2 A点的轨迹

Fig.2 Trajectory of point A

现考虑两个圆的位置关系:

Case 1 当 $L > L_1 + L_2$ 时,两圆相离,此时没有公共点,表示两根连杆的A点无法重新结合;

Case 2 当 $L = L_1 + L_2$ 时,两圆外切,此时有唯一公共点,表示两根连杆的A点可以在该处重新结合;

Case 3 当 $L = L_1 - L_2$ 时,两圆内切,此时有唯一公共点,表示两根连杆的A点可以在该处重新结合;

Case 4 当 $L_1 - L_2 < L < L_1 + L_2$ 时,两圆相交,此时有两个公共点,表示两根连杆的A点可以在两个点

重新结合;

Case 5 当 $L < L_1 - L_2$ 时, 圆 B 在圆 O 内部, 且没有公共点, 表示两根连杆的 A 点没有可以重新结合的位置存在。

从上述分析, 当末端执行器的点给定时有:

1) 若 $L < L_1 - L_2$ 或 $L > L_1 + L_2$, 2R 机械手无逆运动学解;

2) 若 $L = L_1 + L_2$ 或 $L = L_1 - L_2$, 2R 机械手有唯一逆运动学解;

3) 若 $L_1 - L_2 < L < L_1 + L_2$, 2R 机械手有两组逆运动学解。

参考文献 [9] 可知, 当方位角给定后, 机械手的逆运动学解也将唯一确定, 方位角公式如下:

$$\theta_B = \theta_1 + \theta_2, \quad (1)$$

式中 $\theta_B \in [-\pi, \pi]$ 。

式 (1) 中方位角的求法可用于后面神经网络训练中, 但是神经网络训练好以后, 方位角不能用式 (1) 求得。

现考虑求两圆相交时的方位角, 如图 3 所示。

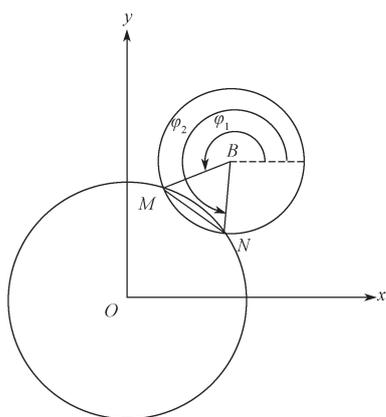


图3 两圆相交时的方位角

Fig. 3 Azimuth angle of two circles intersected

图 3 中, 圆 B 与圆 O 相交于 M 、 N , 两圆的方程分别如下:

$$x^2 + y^2 = L_1^2; \quad (2)$$

$$(x - p_x)^2 + (y - p_y)^2 = L_2^2. \quad (3)$$

式 (2)、式 (3) 分别表示圆 O 与圆 B 的方程, 其中圆 B 上的点可以表示为

$$\begin{cases} x = L_2 \cos \varphi + p_x, \\ y = L_2 \sin \varphi + p_y. \end{cases} \quad (4)$$

将式 (4) 代入式 (2) 中, 得:

$$\sin(\varphi + u) = \frac{L_1^2 - L_2^2 - p_x^2 - p_y^2}{2L_2 \sqrt{p_x^2 + p_y^2}}, \quad (5)$$

式中 $u = \arctan 2(p_x, p_y)$,

$$\text{则 } \sin u = \frac{p_x}{\sqrt{p_x^2 + p_y^2}}, \quad \cos u = \frac{p_y}{\sqrt{p_x^2 + p_y^2}},$$

令 $k = \varphi + u$, 则

$$\varphi_{1,2} = \arctan 2(\sin k, \pm \sqrt{1 - \sin^2 k}) - u. \quad (6)$$

令式 (6) 中 φ_1 和 φ_2 均在 $[0, 2\pi]$ 内。

在图 4 中分别延长 MB 、 NB , 其延长线与过圆心 B 的水平虚线 PQ 之间的夹角分别为 δ_1 、 δ_2 。 δ_1 、 δ_2 就是用于训练好的神经网络预测时的方位角, 根据已求得的 φ_1 和 φ_2 , 可以求出 δ_1 、 δ_2 :

$$\delta_i = \varphi_i - \pi, \quad i = 1, 2. \quad (7)$$

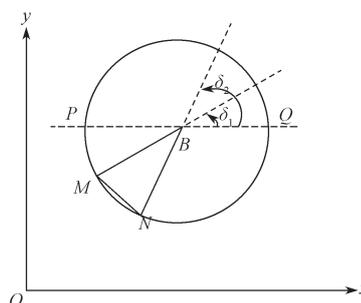


图4 用于神经网络预测的方位角

Fig. 4 Azimuth angle for neural network prediction

当两圆相切时, 同样可用上述方法求方位角, 此时 $\delta_1 = \delta_2 = \varphi - \pi$ 。

2.2 正向运动学模型

采用标准 D-H 法 [10] 给图 1 所示平面 2R 机械手建立运动学模型, 并确定各参数, 结果见图 5 和表 1, 其中 $L_1 = 200 \text{ mm}$, $L_2 = 160 \text{ mm}$ 。

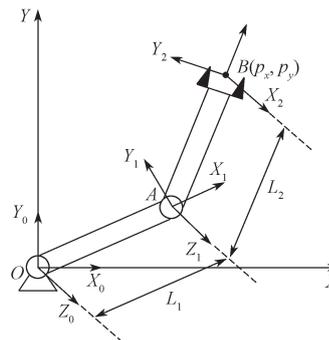


图5 机械手 D-H 模型

Fig. 5 D-H model of the manipulator

表1 机械手 D-H 参数

Table 1 D-H parameters of the manipulator

连杆 i	关节角 / rad	扭角 / rad	长度 / mm	偏置 / mm	变量范围 / rad
1	θ_1	0	L_1	0	$(-\pi, \pi)$
2	θ_2	0	L_2	0	$(-\pi, \pi)$

B 点的正向运动学方程如下:

$$\begin{cases} p_x=L_1\cos\theta_1+L_2\cos(\theta_1+\theta_2), \\ p_y=L_1\sin\theta_1+L_2\sin(\theta_1+\theta_2). \end{cases} \quad (8)$$

3 BP神经网络

3.1 BP神经网络的结构

BP神经网络具有多层结构，分别是输入层、一层或多层隐含层、输出层。各层神经元之间是全连接的，层内无连接。隐含层各神经元节点采用Sigmoid^[11]作为激励函数。图6是一个三层的BP神经网络，其中阈值未画出。

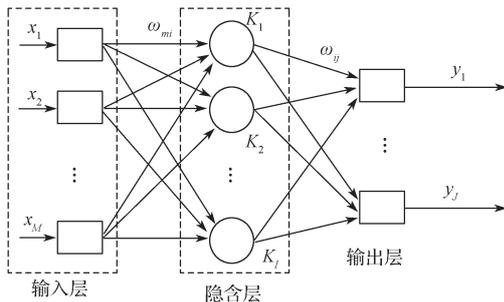


图6 三层BP神经网络

Fig. 6 Three-layered BP neural network

图6中，输入层有M个神经元，输入向量 $\mathbf{X}=[x_1, x_2, \dots, x_M]^T$ ；隐含层有I个神经元；输出层有J个神经元，输出向量 $\mathbf{Y}=[y_1, y_2, \dots, y_J]^T$ ； ω_{mi} 是输入层与隐含层之间的权值， ω_{ij} 是隐含层与输出层之间的权值，隐含层各神经元阈值为 $a_i(i=1, 2, \dots, I)$ ，输出层各神经元阈值为 $b_j(j=1, 2, \dots, J)$ 。

根据图6可以得到网络的输出：

$$y_j = \sum_{i=1}^I \omega_{ij} f\left(\sum_{m=1}^M \omega_{mi} x_m + a_i\right) + b_j, \quad j=1, 2, \dots, J. \quad (9)$$

式中 f^* 为隐含层的激励函数。

3.2 Matlab神经网络工具箱

Matlab是一款功能强大的数学软件，它将数值分析、矩阵计算、可视化、动态系统建模仿真等功能集成在一个开发环境中，为科研和工作提供了强大的支持^[12]。

根据文献[12]，在Matlab中可通过以下步骤训练BP神经网络。

1) 创建前向神经网络 net

$$\mathbf{net}=\text{feedforwardnet}(\text{hiddenSizes}, \text{trainFcn}). \quad (10)$$

式中：**hiddenSizes**为一个大于等于1的列向量，列数为隐含层数，每列的数值为各隐含层神经元个数；**trainFcn**为训练权值的算法，默认为“trainlm”，lm是levenberg-marquadt算法的缩写。lm算法将梯度下降法与高斯-牛顿法相结合，既有高斯-牛顿法的

局部收敛性，又具有梯度下降法的全局特性^[13]，具有收敛快，误差小的优点。

2) 设定参数

其中，net.trainParam.epochs为迭代最大次数；

net.trainParam.lr为学习率；

net.trainParam.goal为目标误差；

net.trainParam.max_fail为训练最大的失败次数，默认为6；

net.divideParam.trainRatio为训练样本占总样本百分比，默认为75%；

net.divideParam.valRatio为校验样本占总样本百分比，默认为15%；

net.divideParam.testRatio为测试样本占总样本百分比，默认为15%。

3) 训练BP神经网络

$$[\mathbf{net}, \mathbf{TR}]=\text{train}(\mathbf{net}, \mathbf{P}, \mathbf{T}). \quad (11)$$

式中：**P**为训练样本的输入矩阵；

T为训练样本的输出矩阵；

TR为记录训练的结果。

4) 预测数据

$$\mathbf{T}_p=\mathbf{net}(\mathbf{T}_i). \quad (12)$$

式中：**T_p**为网络预测结果；

T_i为需要预测的输入。

3.3 样本选取

本研究采用以下方式得到样本，在关节空间中先将 $\theta_j(j=1, 2)$ 平均分成M、I份，然后将 θ_j 进行组合，如图7所示。

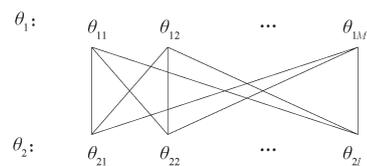


图7 关节角组方法

Fig. 7 Joint angle compound method

关节角组合一共有 $M \times I$ 组，记为 \mathbf{Q} 。将 \mathbf{Q} 代入式(1)和式(8)，得到BP神经网络的样本输入 $\mathbf{T}=[p_x, p_y, \mathbf{Q}_B]^T$ ， \mathbf{Q} 作为BP神经网络的样本输出。

3.4 样本归一化

神经网络在预测前通常会对数据样本进行归一化处理，其目的是取消输入输出间的数量级差别，从而减小预测误差。归一化的方法有最大最小法和平均数方差法。本研究采用最大最小法：

$$x = (x_k - x_{\min}) / (x_{\max} - x_{\min}). \quad (13)$$

式中： x 为归一化后的数； x_k 为需要归一化的数；

x_{\max} 为序列中的最大值； x_{\min} 为序列中的最小值。

3.5 测试效果评定

用 θ_{pim} ($i=1, 2; m=1, 2, \dots, N$) 表示预测得到的关节角, θ_{im} ($i=1, 2; m=1, 2, \dots, N$) 表示实际的关节角, 其中 i 是关节角序号, m 是测试样本序号。评价指标公式为 $e_m = \theta_{im} - \theta_{pim}$ (14)

式中 e_m 为预测的关节角与实际关节角间的误差。

4 仿真实例

4.1 神经网络训练及其测试结果

以 2.2 节中的二连杆机械手为例, 用 BP 神经网络对其进行逆运动学求解的仿真实验。令 $M=33$, $I=33$, 得到 1 089 组样本, 根据 2.2 节的步骤, 在 Matlab 中训练 BP 神经网络权值, 参数设置如下:

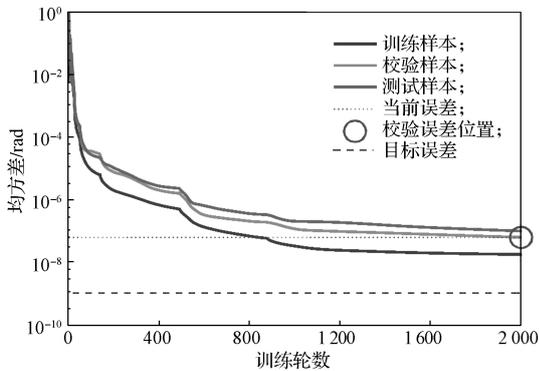
net.trainParam.epochs=2 000;

hiddenSizes=[19 14 8];

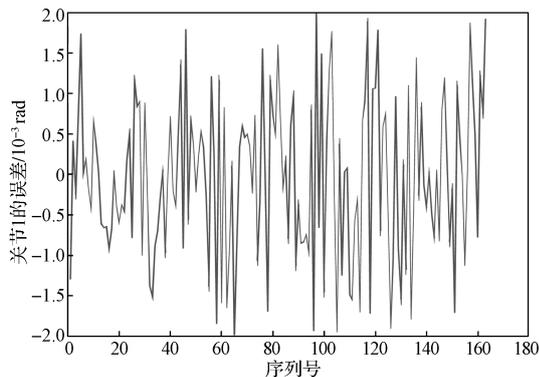
net.trainParam.goal= 10^{-8} 。

网络隐含层的激活函数设为 tansig 函数, 输出层的激活函数设为线性函数 purelin, 其余均设为默认值。

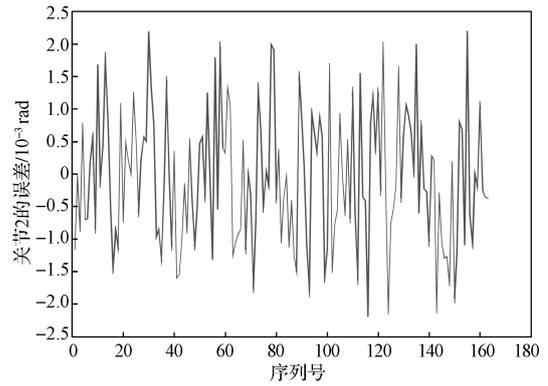
图 8a 是训练 BP 神经网络过程中训练样本、校验样本、测试样本的均方差, 图中显示训练到 2000 轮时停止, 校验样本最优均方差为 6.1521×10^{-8} rad。图 8 中 b、c 图是测试样本中预测的关节角与实际关节角的误差, 可知两关节的预测误差基本在 $-0.002 \sim 0.002$ rad 之间。



a) BP 神经网络训练结果



b) 关节 1 的误差



c) 关节 2 的误差

图 8 BP 神经网络的训练结果和测试结果

Fig. 8 Training and testing results of BP neural network

4.2 运动轨迹

为进一步验证训练完毕的 BP 神经网络, 可以求平面 2R 机械手的逆运动学多解, 在机械手的工作空间中规划一段圆形轨迹, 取 4.1 节的 43 个点用训练完毕的 BP 神经网络进行预测。圆形轨迹的方程为

$$\begin{cases} p_x = 60\cos\beta + 290; \\ p_y = 60\sin\beta + 20. \end{cases} \quad (15)$$

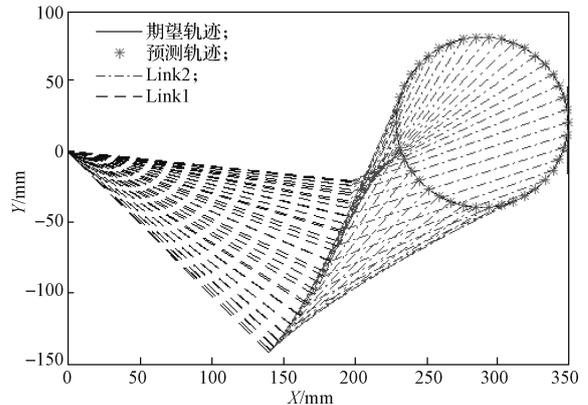
式中 $\beta \in [0, 2\pi]$, 圆心坐标是 (290, 20), 令 $\beta=0:\pi/21:2\pi$ 进行取点, 其中起始点与最后一个点重合。所得到的点位置组成矩阵 P :

$$P = \begin{bmatrix} p_{x1} & \dots & p_{x43} \\ p_{y1} & \dots & p_{y43} \end{bmatrix}, i=1, 2, \dots, 43. \quad (16)$$

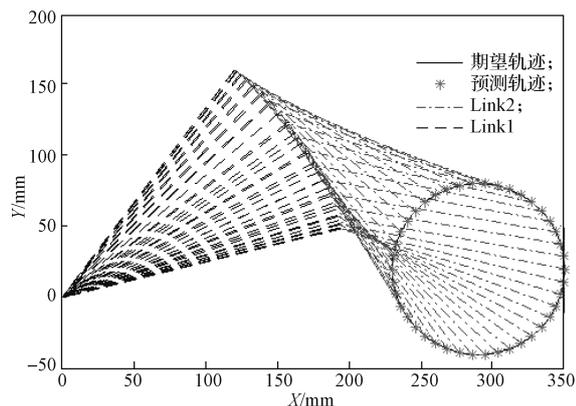
通过式 (5)~(7) 得到两组方位角向量 $\theta_i (i=1, 2)$, 二者组成 BP 神经网络的预测输入:

$$T_{ti} = \begin{bmatrix} P \\ \theta_i \end{bmatrix}, i=1, 2. \quad (17)$$

式 (17) 是 4×43 的矩阵。将式 (17) 代入式 (12), 再将所得结果 $T_{pi} (i=1, 2)$ 代入式 (8), 最终得到其预测的点位置。图 9 是预测点的棍轨迹图



a) 预测轨迹 1



b) 预测轨迹 2

图 9 预测轨迹棍形图

Fig. 9 Stick chart for the predicted trajectory

图 9 中“*”表示预测得到的点位置，“-”表示原轨迹。图中对于相同位置，连杆的形态是不一样的，说明 BP 神经网络的预测输入求得了平面 2R 机械手的两组逆运动学解。

5 结语

本研究通过分离-重新组合的方式对平面 2R 机械手进行了几何分析，将逆运动学解的问题转化为了平面中圆与圆之间的位置关系：当两圆相离或者动圆在定圆内部且不相切时，机械手没有逆运动学解；当两圆外切或者内切时，末端执行器的一个位置点只有一组逆运动学解；当两圆相交时，末端执行器的一个位置点有两组逆运动学解。同时确定了方位角的获得方法，并增加至 BP 神经网络中作为输入的特征参数，与文献[8]相比，不仅减少了所需神经网络的个数，而且可以求得平面 2R 机械手高精度的逆运动学多解。另外含 3 层隐含层的 BP 神经网络，比一层或二层隐含层的 BP 神经网络预测精度更高。

参考文献:

- [1] 韩兴国, 殷 鸣, 刘晓刚, 等. 6R 机器人逆运动学求解与运动轨迹仿真[J]. 四川大学学报(工程科学版), 2015, 47(6): 185-190.
HAN Xingguo, YIN Ming, LIU Xiaogang, et al. Solution of Inverse Kinematics and Movement Trajectory Simulation for 6R Robot[J]. Journal of Sichuan University(Engineering Science Edition), 2015, 47(6): 185-190.
- [2] 徐 扣. 六自由度机械臂的逆运动学求解与轨迹规划研究[D]. 广州: 广东工业大学, 2016.
XU Kou. Inverse Kinematics Solution and Trajectory Planning of 6-DOF Manipulator[D]. Guangzhou: Guangdong University of Technology, 2016.
- [3] VASILYEV I A, LYASHIN A M. Analytical Solution to Inverse Kinematic Problem for 6-DOF Robot-Manipulator[J]. Automation and Remote Control, 2010, 71(10): 2195-2199.
- [4] LOH B, ROSEN J. Kinematic Analysis of 7 Degrees of Freedom Upper-Limb Exoskeleton Robot with Tilted Shoulder Abduction[J]. International Journal of Precision Engineering and Manufacturing, 2013, 14(1): 69-76.
- [5] MOHAMED H A F, YAHYA S, MOGHAVVEMI M, et al. A New Inverse Kinematics Method for Three Dimensional Redundant Manipulators[C]// 2009 ICCAS-SICE. Fukuoka: IEEE, 2009: 1557-1562.
- [6] AL-FAIZ M Z. Inverse Kinematics Solution for Robot Manipulator Based on Neural Network[J]. MASAUM Journal of Basic and Applied Sciences, 2009, 1(2): 147-154.
- [7] 张培艳, 吕恬生, 宋立博. 基于径向基函数网络的 MOTOMAN 机械手运动学逆解[J]. 机械科学与技术, 2004, 23(5): 523-525.
ZHANG Peiyan, LÜ Tiansheng, SONG Libo. A RBF-Neural-Network-Based Method for Solving Inverse Kinematics of MOTOMAN Manipulator[J]. Mechanical Science and Technology, 2004, 23(5): 523-525.
- [8] DAYA B, KHAWANDI S, AKOUM M. Applying Neural Network Architecture for Inverse Kinematics Problem in Robotics[J]. Journal of Software Engineering and Applications, 2010, 3(3): 230-239.
- [9] DUKA A V. Neural Network Based Inverse Kinematics Solution for Trajectory Tracking of a Robotic Arm[J]. Procedia Technology, 2014, 12: 20-27.
- [10] 傅国栋, 郑相周, 黄 思. 一种 5 自由度机械手的运动学分析[J]. 机械传动, 2015, 39(9): 151-154.
FU Guodong, ZHENG Xiangzhou, HUANG Si. Kinematics Analysis of a 5-DOF Manipulator[J]. Journal of Mechanical Transmission, 2015, 39(9): 151-154.
- [11] 张 尧. 激活函数导向的 RNN 算法优化[D]. 杭州: 浙江大学, 2017.
ZHANG Yao. Activation Function Awareness of RNN Algorithm Optimization[D]. Hangzhou: Zhejiang University, 2017.
- [12] 陈 明. MATLAB 神经网络原理与实例精解[M]. 北京: 清华大学出版社, 2013: 104-173.
CHEN Ming. Theory and Example of Neural Network on MATLAB[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2013: 104-173.
- [13] 张 屹, 邓贵仕. Levenberg-Marquardt 神经网络在煤矿作业人员因可靠性评价中应用研究[J]. 大连理工大学学报, 2015, 55(4): 424-430.
ZHANG Qiao, DENG Guishi. Investigation on Application of Levenberg-Marquardt Neural Networks to Human Reliability Evaluation of Coalmine Workers[J]. Journal of Dalian University of Technology, 2015, 55(4): 424-430.

(责任编辑: 申 剑)