doi:10.3969/j.issn.1673-9833.2019.05.006

基于改进的 Lyapunov 泛函的时变时滞系统稳定判据

李 佳，陈 刚，肖会芹

（湖南工业大学 电气与信息工程学院，湖南 株洲 412007）

摘 要：针对时变时滞系统的延迟依赖稳定性问题进行了研究。选取一个合适的 Lyapunov 泛函，把 Lyapunov 函数中某些积分项进行修改并增加一个积分项；通过将基于自由矩阵积分不等式得到的部分矩阵的松弛条件，与二阶 Bessel-Legendre 积分不等式相结合来得到改进的结果。数值实例验证了此方法的保守性和优越性。

关键词：时滞系统；稳定性；Lyapunov 泛函

中图分类号：TP273 **文献标志码**：A **文章编号**：1673-9833(2019)05-0032-04

引文格式：李 佳，陈 刚，肖会芹 . 基于改进的 Lyapunov 泛函的时变时滞系统稳定判据 [J]. 湖南工业大学学报，2019，33(5)：32-35.

On the Stability Criteria for Time-Varying Delay Systems Based on Improved Lyapunov Function

LI Jia，CHEN Gang，XIAO Huiqin

（College of Electrical and Information Engineering，Hunan University of Technology，Zhuzhou Hunan 412007，China）

Abstract：An investigation has been conducted on the flaw of delay-dependent stability found in time-vary delay systems, followed by the selection of a suitable Lyapunov function, with a modification of some integral terms in Lyapunov function and the addition of an integral term. The improved results can be obtained by combining the relaxation conditions of partial matrices based on free matrix integral inequalities with the second-order Bessel-Legendre integral inequalities. The conservativeness and superiority of this proposed method can be verified by numerical examples.

Keywords：time-delay system；stability；Lyapunov function

1 研究背景

无论是在现实生活中，还是在自然界中，亦或是控制的任何领域，时滞现象无处不在。因此，在过去的 20 多年中，时滞在控制领域中成为了热门的研究对象，到目前为止已经有较多文献对其提出了不同的解决方案。

众所周知，时滞的存在往往会引起系统的振荡、系统性能的恶化甚至不稳定，因此对时滞系统的稳定性分析在实验阶段之前就要求很高。在时滞系统

收稿日期：2018-08-06

基金项目：湖南省自然科学基金资助项目（2018JJ4075），国家自然科学基金资助项目（61703153）

作者简介：李 佳（1995-），女，湖南常德人，湖南工业大学硕士生，主要研究方向为鲁棒控制和时滞系统等，E-mail：812681466@qq.com

通信作者：肖会芹（1977-），女，河北定州人，湖南工业大学副教授，主要从事鲁棒控制，时滞系统，网络控制等方面的教学与研究，E-mail：xiaohq_610@126.com

稳定性研究上，最需要解决的问题是降低系统稳定判据的保守性。因此，在已有的文献中，大部分研究者所提出的方法是使时滞的最大允许上界尽可能大，这种方法便能有效降低时滞系统稳定判据的保守性 [1–4]。在解决最大允许上界的方法中，主要有：自由加权矩阵法 [5]、时滞分割法、自由矩阵积分不等式法 [6]、Jensen 不等式法、Wirtinger 积分不等式法、二阶 Bessel-Legendre 不等式法 [7] 等。这些方法都有一个共同点：在 Lyapunov 函数中的所有矩阵，即函数的每一项都必须是正定的，这会为系统稳定分析带来一定的局限性。

Xu S. 等 [8] 在降低系统稳定判据保守性的问题上提出了新的方法，可以在有效降低保守性的同时，还允许在恒定时滞区间内的矩阵 $\boldsymbol{P}$ 非正定。之后，文献 [9] 中的引理对此做了进一步的改进，即选取一个合适的 Lyapunov 函数，再基于自由矩阵不等式，得到函数中部分矩阵的松弛条件，单项积分函数的对称矩阵不再要求必须正定。

本文在改进 Lyapunov 函数的基础上，利用文献 [9] 的方法以及二阶 Bessel-Legendre 不等式和一个等于零的恒等式，得到时变时滞系统的稳定判据且有效降低了其保守性。由于在选取 Lyapunov 函数时没有约定俗成的规定，因此本研究在对 Lyapunov 函数中的某些积分项进行修改后只额外增加了一个积分项。

考虑一个时变时滞系统

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}(t-h(t)),\\ \boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\varphi}(t),\end{cases} \quad t\in[-h,0]。 \tag{1}$$

式中：$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为具有合适维度的矩阵；

$\boldsymbol{x}(t)\in\mathbf{R}^n$ 为状态向量；

$\boldsymbol{\varphi}(t)$ 为初始状态，是给定的向量值函数；

$h(t)$ 为时变时滞，且 $0\leqslant h(t)\leqslant h$，$\mu_1\leqslant\dot{h}(t)\leqslant\mu_2\leqslant 1$，其中 h 和 $\mu_i(i=1, 2)$ 恒定。

2　主要结论

主要符号说明：$\boldsymbol{C}^{\perp}$ 表示矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的正交补；$\mathrm{Sym}(\boldsymbol{N})=\boldsymbol{N}+\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}$；* 表示分块矩阵的对称矩阵；$\boldsymbol{I}$ 和 $\boldsymbol{0}$ 分别表示单位矩阵和零矩阵；$\boldsymbol{S}>0$ 表示 $\boldsymbol{S}$ 是对称正定矩阵。

为了得到主要结论，先给出以下引理。

引理 1[9]　给定系统（1）一个正定的常量 h，如果存在正定矩阵 $\boldsymbol{M}_i\in\mathbf{R}^{2n\times 2n}(i=1, 2)$，对称矩阵 $\boldsymbol{\Re}\in\mathbf{R}^{5n\times 5n}$ 和 $\boldsymbol{E}_i\in\mathbf{R}^{4n\times 4n}(i=1, 2)$，任意矩阵 $\boldsymbol{K}_i\in\mathbf{R}^{4n\times 2n}(i=1, 2)$，满足线性矩阵不等式

$$\Sigma_{[h(t)]}>0,\ \forall h(t)\in\{0,h\}, \tag{2}$$

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_1 & \boldsymbol{K}_1\\ * & \boldsymbol{M}_1\end{bmatrix}\geqslant 0,\ \begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_2 & \boldsymbol{K}_2\\ * & \boldsymbol{M}_2\end{bmatrix}\geqslant 0。 \tag{3}$$

当 $0\leqslant h(t)\leqslant h$ 时，函数

$$V_{\mathrm{a}}(t)=\boldsymbol{\gamma}_1^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\Re}\boldsymbol{\gamma}_1(t)+\int_{t-h(t)}^{t}\boldsymbol{\gamma}_2^{\mathrm{T}}(v)\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{\gamma}_2(v)\mathrm{d}v+\int_{t-h}^{t-h(t)}\boldsymbol{\gamma}_2^{\mathrm{T}}(v)\boldsymbol{M}_2\boldsymbol{\gamma}_2(v)\mathrm{d}v$$

正定。其中：

$$\boldsymbol{\Sigma}_{[h(t)]}=\boldsymbol{\Pi}_{1[h(t)]}\cdot\boldsymbol{\Pi}_{1[h(t)]}^{\mathrm{T}}-\frac{h(t)}{3}\boldsymbol{\Pi}_{2[h(t)]}\boldsymbol{E}_1\boldsymbol{\Pi}_{2[h(t)]}^{\mathrm{T}}-\frac{h(t)}{3}\boldsymbol{\Pi}_{3[h(t)]}\boldsymbol{E}_2\boldsymbol{\Pi}_{3[h(t)]}^{\mathrm{T}}-\mathrm{Sym}\{\boldsymbol{\Pi}_{2[h(t)]}\boldsymbol{K}_1\boldsymbol{\Pi}_{4[h(t)]}^{\mathrm{T}}\}-\mathrm{Sym}\{\boldsymbol{\Pi}_{3[h(t)]}\boldsymbol{K}_2\boldsymbol{\Pi}_{5[h(t)]}^{\mathrm{T}}\},$$

而 $\boldsymbol{\Pi}_{1[h(t)]}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{r}_1 & \boldsymbol{r}_2 & \boldsymbol{r}_3 & h(t)\boldsymbol{r}_4 & (h-h(t))\boldsymbol{r}_5\end{bmatrix}$,

$\boldsymbol{\Pi}_{2[h(t)]}=\begin{bmatrix}h(t)\boldsymbol{r}_4 & \boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2 & \boldsymbol{r}_6 & \boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_4\end{bmatrix}$,

$\boldsymbol{\Pi}_{3[h(t)]}=\begin{bmatrix}(h-h(t))\boldsymbol{r}_5 & \boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_3 & \boldsymbol{r}_7 & \boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_5\end{bmatrix}$,

$\boldsymbol{\Pi}_{4[h(t)]}=\begin{bmatrix}2\boldsymbol{r}_6-h(t)\boldsymbol{r}_4 & \boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_2-2\boldsymbol{r}_4\end{bmatrix}$,

$\boldsymbol{\Pi}_{5[h(t)]}=\begin{bmatrix}2\boldsymbol{r}_7-(h-h(t))\boldsymbol{r}_5 & \boldsymbol{r}_2+\boldsymbol{r}_3-2\boldsymbol{r}_5\end{bmatrix}$,

$\boldsymbol{r}_i=\begin{bmatrix}\boldsymbol{0}_{n\times(i-1)n} & \boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{0}_{n\times(7-i)n}\end{bmatrix}, (i=1,2,\cdots,7)$；

$$\boldsymbol{\gamma}_1(t)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t) & \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-h(t)) & \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-h) & \int_{t-h(t)}^{t}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s)\mathrm{d}s & \int_{t-h}^{t-h(t)}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s)\mathrm{d}s\end{bmatrix}^{\mathrm{T}};$$

$$\boldsymbol{\gamma}_2(v)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(v) & \dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(v)\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}。$$

引理 2[10]　对于任意常实数矩阵 $\boldsymbol{\Psi}(\in\mathbf{R}^{n\times n})>0$，两个标量 r_1、r_2，且 $r_1<r_2$，定义的可导函数 $\boldsymbol{\omega}:[r_1, r_2]\to\mathbf{R}^n$ 满足

$$-\int_{r_1}^{r_2}\dot{\boldsymbol{\omega}}(s)\boldsymbol{\Psi}\dot{\boldsymbol{\omega}}(s)\mathrm{d}s\leqslant-\frac{1}{r_2-r_1}\boldsymbol{\zeta}^{\mathrm{T}}(r_1, r_2)\tilde{\boldsymbol{\Psi}}\boldsymbol{\zeta}(r_1, r_2)。$$

其中：$\tilde{\boldsymbol{\Psi}}:=\mathrm{diag}\{\boldsymbol{\Psi}, 3\boldsymbol{\Psi}, 5\boldsymbol{\Psi}\}$；

$\boldsymbol{\zeta}(r_1,r_2):=\mathrm{col}\{\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$，而 $\boldsymbol{v}_0:=\boldsymbol{\omega}(r_2)-\boldsymbol{\omega}(r_1)$,

$$\boldsymbol{v}_1:=\boldsymbol{\omega}(r_2)+\boldsymbol{\omega}(r_1)-\frac{2}{r_2-r_1}\int_{r_1}^{r_2}\boldsymbol{\omega}(s)\mathrm{d}s,$$

$$\boldsymbol{v}_2:=\boldsymbol{\omega}(r_2)-\boldsymbol{\omega}(r_1)-\frac{6}{r_2-r_1}\int_{r_1}^{r_2}\boldsymbol{\omega}(s)\mathrm{d}s+\frac{12}{(r_2-r_1)^2}\int_{r_1}^{r_2}(r_2-s)\boldsymbol{\omega}(s)\mathrm{d}s。$$

引理 3[11]　给定向量 $\boldsymbol{\zeta}\in\mathbf{R}^n$，以及矩阵 $\boldsymbol{\varDelta}=\boldsymbol{\varDelta}^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^{n\times n}$ 和 $\boldsymbol{C}\in\mathbf{R}^{m\times n}(\mathrm{rank}(\boldsymbol{C})<n)$；下列不等式等价：

1）$\boldsymbol{\zeta}^{\mathrm{T}}\Delta\boldsymbol{\zeta}<0$，$\forall\boldsymbol{C}\boldsymbol{\zeta}=0$，$\boldsymbol{\zeta}\neq 0$；

2）$(\boldsymbol{C}^{\perp})^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{C}^{\perp}<0$。

根据引理给出新的稳定判据，在导出主要结论之前，先定义如下向量：

$$\boldsymbol{\zeta}^{\mathrm{T}}(t)=\Big[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\quad \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\big(t-h(t)\big)\quad \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-h)\quad \dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(t)$$
$$\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\big(t-h(t)\big)\quad \dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(t-h)\quad \frac{1}{h(t)}\int_{t-h(t)}^{t}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s)\mathrm{d}s$$
$$\frac{1}{h-h(t)}\int_{t-h}^{t-h(t)}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s)\mathrm{d}s\quad \int_{t-h}^{t}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s)\mathrm{d}s$$
$$\frac{1}{\big(h(t)\big)^2}\int_{t-h(t)}^{t}(t-s)\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s)\mathrm{d}s$$
$$\frac{1}{\big(h-h(t)\big)^2}\int_{t-h}^{t-h(t)}\big(t-h(t)-s\big)\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s)\mathrm{d}s\Big]^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\eta}_1(t)=\Big[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\quad \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\big(t-h(t)\big)\quad \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-h)$$
$$\int_{t-h(t)}^{t}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s)\mathrm{d}s\quad \int_{t-h}^{t-h(t)}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s)\mathrm{d}s$$
$$\int_{t-h}^{t}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s)\mathrm{d}s\quad \frac{1}{h(t)}\int_{t-h(t)}^{t}(t-s)\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s)\mathrm{d}s$$
$$\frac{1}{h-h(t)}\int_{t-h}^{t-h(t)}\big(t-h(t)-s\big)\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s)\mathrm{d}s\Big]^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\eta}_2(v)=\Big[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(v)\quad \dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(v)\quad \int_{v}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(s)\mathrm{d}s$$
$$\int_{v}^{t-h(t)}\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(s)\mathrm{d}s\quad \int_{v}^{t-h}\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(s)\mathrm{d}s\Big]^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\eta}_3(v)=\Big[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(v)\quad \dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(v)\quad \int_{v}^{t-h(t)}\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(s)\mathrm{d}s$$
$$\int_{v}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(s)\mathrm{d}s\quad \int_{v}^{t-h}\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(s)\mathrm{d}s\Big]^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{e}_i=\Big[\boldsymbol{0}_{n\times(i-1)n}\quad \boldsymbol{I}_n\quad \boldsymbol{0}_{n\times(11-i)n}\Big],\ (i=1,2,\cdots,11)。$$

定理1 对于给定的一个连续常量 $h>0$，如果存在矩阵 $\boldsymbol{P}\in\mathbf{R}^{8n\times 8n}$，$\boldsymbol{Q}_i\in\mathbf{R}^{5n\times 5n}(i=1,2)$，$\boldsymbol{R}\in\mathbf{R}^{n\times n}$，对称矩阵 $\boldsymbol{S}\in\mathbf{R}^{5n\times 5n}$，$\boldsymbol{H}\in\mathbf{R}^{11n\times n}$，满足线性矩阵不等式

$$\big(\boldsymbol{\Gamma}^{\perp}\big)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Omega}\big(\boldsymbol{\Gamma}^{\perp}\big)<0,\tag{4}$$

则系统（1）是渐进稳定的。其中：

$$\boldsymbol{\Gamma}=[\boldsymbol{A}\quad \boldsymbol{B}\quad \boldsymbol{0}\quad -\boldsymbol{I}\quad \boldsymbol{0}\quad \boldsymbol{0}\quad \boldsymbol{0}\quad \boldsymbol{0}\quad \boldsymbol{0}\quad \boldsymbol{0}\quad \boldsymbol{0}],$$
$$\boldsymbol{\Omega}=\mathrm{Sym}\{\boldsymbol{\Pi}_1\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Pi}_2^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{H}\boldsymbol{\Pi}_{13}\}+\boldsymbol{\Omega}_1+\boldsymbol{\Omega}_2+$$
$$\boldsymbol{\Omega}_3+h^2\boldsymbol{e}_4\boldsymbol{R}\boldsymbol{e}_4^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\Phi}_1+\boldsymbol{\Phi}_2,$$

而 $\boldsymbol{\Omega}_1=\boldsymbol{\Pi}_3\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{\Pi}_3^{\mathrm{T}}-\big(1-\dot{h}(t)\big)\boldsymbol{\Pi}_4\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{\Pi}_4^{\mathrm{T}}+\mathrm{Sym}\{\boldsymbol{\Pi}_5\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{\Pi}_6^{\mathrm{T}}\}$，

$\boldsymbol{\Omega}_2=\big(1-\dot{h}(t)\big)\boldsymbol{\Pi}_7\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{\Pi}_7^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{\Pi}_8\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{\Pi}_8^{\mathrm{T}}+\mathrm{Sym}\{\boldsymbol{\Pi}_9\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{\Pi}_{10}^{\mathrm{T}}\}$，

$\boldsymbol{\Omega}_3=\boldsymbol{\Pi}_3\boldsymbol{S}\boldsymbol{\Pi}_3^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{\Pi}_{11}\boldsymbol{S}\boldsymbol{\Pi}_{11}^{\mathrm{T}}+\mathrm{Sym}\{\boldsymbol{\Pi}_{12}\boldsymbol{S}\boldsymbol{\Pi}_6^{\mathrm{T}}\}$，

$\boldsymbol{\Phi}_1=-\boldsymbol{\Pi}_{14}\tilde{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{\Pi}_{14}^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\Phi}_2=-\boldsymbol{\Pi}_{15}\tilde{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{\Pi}_{15}^{\mathrm{T}}$，

$$\boldsymbol{\Pi}_1=\Big[\boldsymbol{e}_1\quad \boldsymbol{e}_2\quad \boldsymbol{e}_3\quad h(t)\boldsymbol{e}_7\quad \big(h-h(t)\big)\boldsymbol{e}_8$$
$$\boldsymbol{e}_9\quad h(t)\boldsymbol{e}_{10}\quad \big(h-h(t)\big)\boldsymbol{e}_{11}\Big],$$

$$\boldsymbol{\Pi}_2=\Big[\boldsymbol{e}_4\quad \big(1-\dot{h}(t)\big)\boldsymbol{e}_5\quad \boldsymbol{e}_6\quad \boldsymbol{e}_1-\big(1-\dot{h}(t)\big)\boldsymbol{e}_2$$
$$\big(1-\dot{h}(t)\big)\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_3\quad \boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_3$$
$$-\big(1-\dot{h}(t)\big)\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_7-\dot{h}(t)\boldsymbol{e}_{10}$$
$$-\boldsymbol{e}_3+\big(1-\dot{h}(t)\big)\boldsymbol{e}_8+\dot{h}(t)\boldsymbol{e}_{11}\Big],$$

$$\boldsymbol{\Pi}_3=[\boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_4\ \boldsymbol{e}_0\ \boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_3-\boldsymbol{e}_1],$$
$$\boldsymbol{\Pi}_4=[\boldsymbol{e}_2\ \boldsymbol{e}_5\ \boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2\ \boldsymbol{e}_0\ \boldsymbol{e}_3-\boldsymbol{e}_2],$$
$$\boldsymbol{\Pi}_5=\Big[h(t)\boldsymbol{e}_7\quad \boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2\quad h(t)\big(\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_7\big)$$
$$h(t)\big(\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_7\big)\quad h(t)\big(\boldsymbol{e}_3-\boldsymbol{e}_7\big)\Big],$$
$$\boldsymbol{\Pi}_6=\Big[\boldsymbol{e}_0\ \ \boldsymbol{e}_0\ \ \boldsymbol{e}_4\ \ \big(1-\dot{h}(t)\big)\boldsymbol{e}_5\ \ \boldsymbol{e}_6\Big],$$
$$\boldsymbol{\Pi}_7=[\boldsymbol{e}_2\ \boldsymbol{e}_5\ \boldsymbol{e}_0\ \boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2\ \boldsymbol{e}_3-\boldsymbol{e}_2],$$
$$\boldsymbol{\Pi}_8=[\boldsymbol{e}_3\ \boldsymbol{e}_6\ \boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_3\ \boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_3\ \boldsymbol{e}_0],$$
$$\boldsymbol{\Pi}_9=\Big[\big(h-h(t)\big)\boldsymbol{e}_8\quad \boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_3\quad \big(h-h(t)\big)\big(\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_8\big)$$
$$\big(h-h(t)\big)\big(\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_8\big)\quad \big(h-h(t)\big)\big(\boldsymbol{e}_3-\boldsymbol{e}_8\big)\Big],$$
$$\boldsymbol{\Pi}_{10}=\Big[\boldsymbol{e}_0\ \ \boldsymbol{e}_0\ \ \big(1-\dot{h}(t)\big)\boldsymbol{e}_5\ \ \boldsymbol{e}_4\ \ \boldsymbol{e}_6\Big],$$
$$\boldsymbol{\Pi}_{11}=[\boldsymbol{e}_3\ \boldsymbol{e}_6\ \boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2\ \boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_3\ \boldsymbol{e}_0],$$
$$\boldsymbol{\Pi}_{12}=[\boldsymbol{e}_9\ \boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_3\ \boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_9\ \boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_9\ \boldsymbol{e}_3-\boldsymbol{e}_9],$$
$$\boldsymbol{\Pi}_{13}=h(t)\boldsymbol{e}_7+\big(h-h(t)\big)\boldsymbol{e}_8-\boldsymbol{e}_9,$$
$$\boldsymbol{\Pi}_{14}=[\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2\ \ \boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2-2\boldsymbol{e}_7\ \ \boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2-6\boldsymbol{e}_7+12\boldsymbol{e}_{10}],$$
$$\boldsymbol{\Pi}_{15}=[\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_3\ \ \boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3-2\boldsymbol{e}_8\ \ \boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_3-6\boldsymbol{e}_8+12\boldsymbol{e}_{11}],$$

$\boldsymbol{e}_0=\boldsymbol{0}_{n\times 11n}$，$\tilde{\boldsymbol{R}}=\mathrm{diag}\{\boldsymbol{R},3\boldsymbol{R},5\boldsymbol{R}\}$。

证明 选取一个合适的 Lyapunov 函数

$$V(t)=\boldsymbol{\eta}_1^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}\boldsymbol{\eta}_1(t)+\int_{t-h(t)}^{t}\boldsymbol{\eta}_2^{\mathrm{T}}(v)\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{\eta}_2(v)\mathrm{d}v+$$
$$\int_{t-h}^{t-h(t)}\boldsymbol{\eta}_3^{\mathrm{T}}(v)\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{\eta}_3(v)\mathrm{d}v+\int_{t-h}^{t}\boldsymbol{\eta}_2^{\mathrm{T}}(v)\boldsymbol{S}\boldsymbol{\eta}_2(v)\mathrm{d}v+$$
$$h\int_{t-h}^{t}\int_{v}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{R}\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}v。\tag{5}$$

当 $\boldsymbol{S}>0$ 且 $\boldsymbol{R}>0$ 时，根据引理1，易证函数 $V(t)>0$。

对 $V(t)$ 求导，得

$$\dot{V}(t)=2\dot{\boldsymbol{\eta}}_1^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{P}\boldsymbol{\eta}_1(t)+\boldsymbol{\zeta}^{\mathrm{T}}(t)\Big[\boldsymbol{\Pi}_3\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{\Pi}_3^{\mathrm{T}}-$$
$$\big(1-\dot{h}(t)\big)\boldsymbol{\Pi}_4\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{\Pi}_4^{\mathrm{T}}+\big(1-\dot{h}(t)\big)\boldsymbol{\Pi}_7\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{\Pi}_7^{\mathrm{T}}-$$
$$\boldsymbol{\Pi}_8\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{\Pi}_8^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\Pi}_3\boldsymbol{S}\boldsymbol{\Pi}_3^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{\Pi}_{11}\boldsymbol{S}\boldsymbol{\Pi}_{11}^{\mathrm{T}}+h^2\boldsymbol{e}_4\boldsymbol{R}\boldsymbol{e}_4^{\mathrm{T}}+$$
$$\mathrm{Sym}\{\boldsymbol{\Pi}_5\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{\Pi}_6^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\Pi}_9\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{\Pi}_{10}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\Pi}_{12}\boldsymbol{S}\boldsymbol{\Pi}_6^{\mathrm{T}}\}\Big]\boldsymbol{\zeta}(t)-$$
$$h\int_{t-h(t)}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{R}\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s-h\int_{t-h}^{t-h(t)}\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{R}\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s。$$

应用引理2，将上式的积分项进行处理得

$$-h\int_{t-h(t)}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{R}\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s\leqslant-\boldsymbol{\zeta}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\Pi}_{14}\tilde{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{\Pi}_{14}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\zeta}(t),\tag{6}$$
$$-h\int_{t-h}^{t-h(t)}\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{R}\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s\leqslant-\boldsymbol{\zeta}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\Pi}_{15}\tilde{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{\Pi}_{15}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\zeta}(t)。\tag{7}$$

此外，在 $\dot{V}(t)$ 中再加入一个等于0的恒等式

$$\boldsymbol{\zeta}^{\mathrm{T}}(t)\big(\boldsymbol{\Pi}_{13}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{H}\boldsymbol{\Pi}_{13}\big)\boldsymbol{\zeta}(t)=0,\tag{8}$$

式中 $\boldsymbol{\zeta}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\Pi}_{13}^{\mathrm{T}}=\int_{t-h(t)}^{t}\boldsymbol{x}(s)\mathrm{d}s+\int_{t-h}^{t-h(t)}\boldsymbol{x}(s)\mathrm{d}s-\int_{t-h}^{t}\boldsymbol{x}(s)\mathrm{d}s$。

由式（5）~（8）可得

$$\dot{V}(t)\leqslant\boldsymbol{\zeta}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\zeta}(t)。$$

根据引理3，当定理1中的式（4）成立时，线性矩阵不等式（4）等价于 $\boldsymbol{\zeta}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\zeta}(t)<0$，

$\forall \boldsymbol{\Gamma\zeta}(t)=0$，$\boldsymbol{\zeta}(t)\neq 0$，这意味着 $\dot{V}(t)<0$ 成立。根据 Lyapunov 稳定性定理，系统（1）渐进稳定。证毕。

注释 1　大多数文献都要求 Lyapunov 函数为正定函数时其所涉及的所有矩阵都必须是正定的，但本文在论证的过程中引用了文献 [9] 的方法，即并不要求所有的矩阵正定，这为矩阵 $\boldsymbol{P}$ 只需要对称而不需要 $\boldsymbol{P}>0$ 提供了一个松弛条件。

注释 2　引理 2 的应用是降低时变时滞系统稳定判据保守性的主要原因。另外，时变时滞系统稳定判据的推导不仅需要利用积分不等式，还需要构建一个合适的 Lyapunov 函数。

3　数值算例

考虑系统（1）和参数

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & -0.9\end{bmatrix},\ \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ -1 & -1\end{bmatrix},$$

当采用本文方法或文献 [9][12][13] 的方法分析时，所得结果如表 1 所示。

表 1　当 $\dot{h}(t)=-\mu_1=\mu_2$ 不同时，不同方法所得的最大允许上界 h

Table 1　Maximal allowable upper bound h values with $\dot{h}(t)=-\mu_1=\mu_2$

方法	最大允许上界 h				
	$\dot{h}(t)=0$	$\dot{h}(t)=0.1$	$\dot{h}(t)=0.2$	$\dot{h}(t)=0.5$	$\dot{h}(t)=0.8$
文献 [12]		4.811 0	4.101 0	3.061 0	2.612 0
文献 [13]	6.059 0	4.788 0	4.060 0	3.055 0	2.615 0
文献 [9]	6.059 0	4.825 7	4.127 4	3.113 1	2.676 3
本文	6.168 9	4.891 2	4.167 6	3.110 4	2.636 1

在表 1 中对时滞的最大允许上界进行了比较，可知本文的结果要比表中文献 [9][12][13] 所得结果要好，这说明了本文方法的有效性和优越性。

4　结语

本文在对 Lyapunov 函数进行改进的基础上，根据所提出的引理，对所给的不等式进行论证。并且通过数值实例证明，在松弛条件与二阶 Bessel-Legendre 不等式以及恒等于 0 的等式相结合的条件下，本文的结果具有较好的保守性。

参考文献：

[1] ZHANG C K，HE Y，JIANG L，et al. An Extended Reciprocally Convex Matrix Inequality for Stability Analysis of Systems with Time-Varying Delay[J]. Automatica，2017，85：481–485.

[2] ZHANG C K，HE Y，JIANG L，et al. Notes on Stability of Time-Delay Systems：Bounding Inequalities and Augmented Lyapunov-Krasovskii Functions[J]. IEEE Transactions on Automatic Control，2017，62(10)：5331–5336.

[3] ZHANG C K，HE Y，JIANG L，et al. Stability Analysis of Discrete-Time Neural Networks with Time-Varying Delay Via an Extended Reciprocally Convex Matrix Inequality[J]. IEEE Transactions on Cybernetics，2017，47(10)：3040–3049.

[4] ZHANG C K，HE Y，JIANG L，et al. Delay-Variation-Dependent Stability of Delayed Discrete-Time Systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control，2016，61(9)：2663–2669.

[5] WU M，HE Y，SHE J H，et al. Delay-Dependent Criteria for Robust Stability of Time-Varying Delay Systems[J]. Automatica，2004，40(8)：1435–1439.

[6] ZENG H B，HE Y，WU M，et al. New Results on Stability Analysis for Systems with Discrete Distributed Delay[J]. Automatic，2015，60：189–192.

[7] LIU K，SEURET A，XIA Y Q. Stability Analysis of Systems with Time-Varying Delays Via the Second-Order Bessel-Legendre Inequality[J]. Automatica，2017，76：138–142.

[8] XU S，LAM J，ZHANG B，et al. New Insight into Delay-Dependent Stability of Time-Delay Systems[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control，2015，25(7)：961–970.

[9] LEE T H，PARK J H，XU S Y. Relaxed Conditions for Stability of Time-Varying Delay Systems[J]. Automatica，2017，75：11–15.

[10] SEURET A，GOUAISBAUT F. Hierarchy of LMI Conditions for the Stability of Time Delay Systems[J]. Systems & Control，2015，81：1–7.

[11] SKELTON R E，IWASAKI T，GRIGORIADIS D E. A Unified Algebraic Approach to Control Design[M]. New York：Taylor and Francis，1997：29–45.

[12] KWON O M，PARK M J，PARK J H，et al. Improved Results on Stability of Linear Systems with Time-Varying Delays Via Wirtinger-Based Integral Inequality[J]. Journal of the Franklin Institute，2014，351(12)：5386–5398.

[13] ZENG H B，HE Y，WU M，et al. Free-Matrix-Based Integral Inequality for Stability Analysis of Systems with Time-Varying Delay[J]. IEEE Transactions on Automatic Control，2015，60(10)：2768–2772.

（责任编辑：邓光辉）