doi:10.3969/j.issn.1673-9833.2019.04.005

改进型 Bessel-Legendre 不等式在时滞系统稳定性上的应用

刘晓桂，王　炜

（湖南工业大学 电气与信息工程学院，湖南 株洲 412007）

摘　要：改进型 Bessel-Legendre 不等式具有在时变时滞系统中易于处理的优点，且克服了基于辅助函数的积分不等式与 Bessel-Legendre 不等式由于在结果的界定上具有逆凸性从而导致这两个不等式在处理时变时滞系统时不易处理的弱点。首先，通过构造合适的 Lyapunov-Krasovskii 泛函，并应用这种改进型 Bessel-Legendre 不等式处理泛函导数中的积分项，建立了一个新的时滞系统鲁棒稳定性判据。然后，通过数值实例进行了仿真验证，并将仿真结果与其它已有文献中的仿真结果进行了对比，得知所提方法的系统最大允许时滞上界明显优于其它文献中的结果，可见系统的时滞稳定裕度得到本质上的改善，从而证明了所提方法的有效性与优越性。

关键词：时变时滞；Lyapunov-Krasovskii 泛函；鲁棒稳定判据；Bessel-Legendre 不等式

中图分类号：TP13　　　　**文献标志码**：A　　　　**文章编号**：1673-9833(2019)04-0025-06

引文格式：刘晓桂，王　炜．改进型 Bessel-Legendre 不等式在时滞系统稳定性上的应用 [J]. 湖南工业大学学报，2019，33(4)：25-30.

Application of Improved Bessel-Legendre Inequality to the Stability of Time-Delay Systems

LIU Xiaogui，WANG Wei

（College of Electrical and Information Engineering，Hunan University of Technology，Zhuzhou Hunan 412007，China）

Abstract：The improved Bessel-Legendre inequality is characterized with such an advantage as being easy to deal with in time-varying delay systems, which overcomes the flaws of the integral inequality based on auxiliary functions and the Bessel-Legendre inequality in dealing with time-varying delay systems due to their inverse convexity in the definition of results. A new robust stability criterion for time-delay systems has thus been established by constructing appropriate Lyapunov-Krasovskii functional and applying the improved Bessel-Legendre inequality to deal with the integral terms in the functional derivatives. Finally, a numerical example is given to verify the simulation results, which are then compared with those in the existing literature. The results show that the upper bound of the system maximum allowable time-delay of the proposed method is obviously superior to the results in other literature. It can be seen that the time-delay stability margin of the system has been improved substantially, which further proves the effectiveness and superiority of the proposed method.

收稿日期：2019-01-21

基金项目：国家自然科学基金资助项目（61374064，61672225，61703153）

作者简介：刘晓桂（1987-），男，湖南武冈人，湖南工业大学硕士生，主要研究方向为电力系统，时滞系统和神经网络，E-mail：405319366@qq.com

通信作者：王　炜（1979-），女，天津人，湖南工业大学高级实验师，主要从事电力系统和网络控制系统方面的教学与研究，E-mail：wangwei9804@163.com

Keywords：time-varying delay；Lyapunov-Krasovskii functional；robust stability criterion；Bessel-Legendre inequality

1 研究背景

时滞现象普遍存在于生活中的各个领域，而它的存在会对系统的稳定性产生一定的影响[1-5]。如冶金工业、智能电网、钻井工程、交通系统等方面都存在着信息传输、信息处理与网络阻塞等现象。这些现象的存在会对系统的正常性能产生不良影响，甚至使整个系统瘫痪。因此，对时滞系统的研究具有一定的现实意义。

目前，国内外越来越多的科研人员正从事着时滞相关稳定性的研究工作，同时也推导出了大量的时滞相关稳定性判据。如文献 [4] 指出，在保证系统稳定的前提下，获得最大时滞稳定裕度是其研究的关键所在，主要是通过 Lyapunov-Krasovskii 泛函的选取和泛函导数中积分项的界定方法进行改善。而 Lyapunov-Krasovskii 泛函求导过程中所产生的积分项的界定是当前该方向研究面临的一大难题。目前对这一问题主要有 3 类解决方法：模型变换法[6]、自由权矩阵法[7]与积分不等式法。其中积分不等式法又包括 Jensen 不等式法[8]、Wirtinger 积分不等式法[9]、Bessel-Legendre 不等式法[10]、基于自由矩阵积分不等式法[11]与辅助函数的积分不等式法[12-15]等。以上各方法的提出，为今后对时滞系统的研究工作奠定了坚实的基础。

本文拟在时域范围内，针对时变时滞线性系统的经典模型与相关约束条件，应用鲁棒控制理论分析系统的稳定性问题。选取了合适的 Lyapunov-Krasovskii 泛函，并应用最新提出的改进型 Bessel-Legendre 不等式方法对泛函导数中的积分项进行了处理，推导出了系统的稳定性判据。最后，通过数值实例仿真验证，并将仿真结果与其它已有文献给出的仿真结果进行对比，得知本文方法具有一定的优越性。

本文标号：$\mathbb{R}^{n\times m}$ 与 $\mathbb{R}^{n}$ 分别代表实数域的 $n\times m$ 阶矩阵空间与 n 维向量空间；上标“T”和“−1”分别代表矩阵的“转置”与“逆”；“$\boldsymbol{I}$”和“$\boldsymbol{0}$”分别代表合适维度的单位矩阵和零矩阵；文中符号 $\begin{pmatrix} n \\ l \end{pmatrix}$ 代表二项式系数，等价于 $\dfrac{n!}{l!(n-l)!}$；$\mathbb{N}$ 代表非负整数集；同时 $Sym\{\boldsymbol{X}\}=\boldsymbol{X}+\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}$；diag(⋯) 代表对角矩阵；$\boldsymbol{P}>0$ 意味着矩阵 $\boldsymbol{P}$ 是对称与正定的。

2 系统描述

给出时变时滞线性系统的一般形式如下：

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{A}_{\mathrm{d}}\boldsymbol{x}(t-h(t)),\ t>0； \\ \boldsymbol{x}(t)=\phi(t),\ t\in[-h_2,0]。 \end{cases} \tag{1}$$

式中：$\boldsymbol{x}(t)\in\mathbb{R}^{n}$，是状态向量；

$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{A}_d$ 为系统矩阵；

$h(t)$ 是满足约束条件 $0<h_1<h(t)<h_2$ 的时变时滞函数，其中 h_1、h_2 为常数；

$\phi(t)$ 是初始状态，它是一个向量值函数。

为建立本文的主要结论，需要用到以下引理。

引理 1[16] 给定一个矩阵 $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}>0$，存在一个矩阵 $\boldsymbol{X}$，向量值函数 $\dot{\boldsymbol{x}}(\cdot)$ 在区间 $[a,b]\to\mathbb{R}^{n}$ 上是连续可微的，并且对于任意整数 $N\in\mathbb{N}$，有如下的不等式（2）成立

$$-\int_a^b \dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{R}\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s\leqslant-\varsigma_N^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varDelta}(\boldsymbol{X})\varsigma_N。 \tag{2}$$

式中

$$\varsigma_N=\begin{cases}\left[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(b)\ \ \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(a)\right]^{\mathrm{T}}, & N=0； \\ \left[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(b)\ \ \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(a)\ \ \dfrac{1}{b-a}\boldsymbol{\varTheta}_0^{\mathrm{T}}\cdots\dfrac{1}{b-a}\boldsymbol{\varTheta}_{N-1}^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}}, & N>0；\end{cases}$$

其中

$$\boldsymbol{\varTheta}_k=\int_a^b T_k(s)\boldsymbol{x}(s)\mathrm{d}s，且$$

$$T_k(s)=(-1)^k\sum_{l=0}^{k}\left[(-1)^l\begin{pmatrix}k\\l\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k+l\\l\end{pmatrix}\right]\left(\frac{s-a}{b-a}\right)^l；$$

$$\boldsymbol{\varDelta}(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}\boldsymbol{\varGamma}_N+\left(\boldsymbol{X}\boldsymbol{\varGamma}_N\right)^{\mathrm{T}}-(b-a)\boldsymbol{X}\tilde{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}，$$

其中，

$$\boldsymbol{\varGamma}_N=\left[\boldsymbol{\pi}_N^{\mathrm{T}}(0)\ \ \boldsymbol{\pi}_N^{\mathrm{T}}(1)\cdots\boldsymbol{\pi}_N^{\mathrm{T}}(N)\right]^{\mathrm{T}}，且$$

$$\boldsymbol{\pi}_N(k)=\begin{cases}\left[\boldsymbol{I}\ \ -\boldsymbol{I}\right], & N=0； \\ \left[\boldsymbol{I}\ \ (-1)^{K+1}\boldsymbol{I}\ \ \lambda_{Nk}^{0}\boldsymbol{I}\ \cdots\ \lambda_{Nk}^{N-1}\boldsymbol{I}\right], & N>0；\end{cases}$$

$$\lambda_{Nk}^{i}=\begin{cases}-(2i+1)\left(1-(-1)^{k+i}\right), & i\leqslant k； \\ 0, & i\geqslant k+1；\end{cases}$$

$\tilde{\boldsymbol{R}} = \mathrm{diag}\left(\frac{1}{R}, \frac{1}{3R}, \cdots, \frac{1}{(2N+1)R}\right)$。

3　主要结论

本节基于改进型 Bessel-Legendre 不等式方法，建立了具有更小保守性的系统稳定判据。给定变量与矩阵的定义如下：

$$\delta_1(s-t) = \frac{2(s-t+h_1)}{h_1} - 1;$$

$$\delta_2(s-t) = \frac{2(s-t+h(t))}{h(t)-h_1} - 1;$$

$$\delta_3(s-t) = \frac{2(s-t+h_2)}{h_2-h(t)} - 1;$$

$$\delta_4(s-t) = \frac{2(s-t+h_2)}{h_{12}} - 1;$$

$$\boldsymbol{\eta}_1(t) = \left[\boldsymbol{\gamma}_\mathrm{a}^\mathrm{T}(t) \quad \boldsymbol{\gamma}_\mathrm{b}^\mathrm{T}(t) \quad \boldsymbol{\gamma}_\mathrm{c}^\mathrm{T}(t)\right]^\mathrm{T};$$

$$\boldsymbol{\gamma}_\mathrm{a}(t) = \left[\boldsymbol{x}^\mathrm{T}(t) \int_{t-h_1}^{t} \boldsymbol{x}^\mathrm{T}(s)\mathrm{d}s \int_{t-h_1}^{t} \delta_1(s-t)\boldsymbol{x}^\mathrm{T}(s)\mathrm{d}s\right]^\mathrm{T};$$

$$\boldsymbol{\gamma}_\mathrm{b}(t) = \left[\int_{t-h_2}^{t-h_1} \boldsymbol{x}^\mathrm{T}(s)\mathrm{d}s \quad h_{12}\int_{t-h_2}^{t-h_1} \delta_4(s-t)\boldsymbol{x}^\mathrm{T}(s)\mathrm{d}s\right]^\mathrm{T};$$

$$\boldsymbol{\gamma}_\mathrm{c}(t) = \left[\int_{t-h_1}^{t} \dot{\boldsymbol{x}}^\mathrm{T}(s)\mathrm{d}s \quad \int_{t-h_2}^{t-h_1} \dot{\boldsymbol{x}}^\mathrm{T}(s)\mathrm{d}s\right]^\mathrm{T};$$

$$\boldsymbol{\eta}_2(t,s) = \left[\boldsymbol{\eta}_\mathrm{a}^\mathrm{T}(t,s) \quad \boldsymbol{\eta}_\mathrm{b}^\mathrm{T}(t,s)\right]^\mathrm{T};$$

$$\boldsymbol{\eta}_\mathrm{a}(t,s) = \left[\dot{\boldsymbol{x}}^\mathrm{T}(s) \quad \boldsymbol{x}^\mathrm{T}(s) \quad \boldsymbol{x}^\mathrm{T}(t) \quad \boldsymbol{x}^\mathrm{T}(t-h_1)\right]^\mathrm{T};$$

$$\boldsymbol{\eta}_\mathrm{b}(t,s) = \left[\boldsymbol{x}^\mathrm{T}(t-h_2) \quad \int_{s}^{t} \boldsymbol{x}^\mathrm{T}(\alpha)\mathrm{d}\alpha\right]^\mathrm{T};$$

$$\boldsymbol{\eta}_3(t,s) = \left[\boldsymbol{\eta}_\mathrm{c}^\mathrm{T}(t,s) \quad \boldsymbol{\eta}_\mathrm{d}^\mathrm{T}(t,s)\right]^\mathrm{T};$$

$$\boldsymbol{\eta}_\mathrm{c}(t,s) = \left[\dot{\boldsymbol{x}}^\mathrm{T}(s) \quad \boldsymbol{x}^\mathrm{T}(s) \quad \boldsymbol{x}^\mathrm{T}(t) \quad \boldsymbol{x}^\mathrm{T}(t-h_1)\right]^\mathrm{T};$$

$$\boldsymbol{\eta}_\mathrm{d}(t,s) = \left[\boldsymbol{x}^\mathrm{T}(t-h_2) \quad \int_{s}^{t-h_1} \boldsymbol{x}^\mathrm{T}(\alpha)\mathrm{d}\alpha\right]^\mathrm{T};$$

$$\xi(t) = \left[\xi_\mathrm{a}^\mathrm{T}(t) \quad \xi_\mathrm{b}^\mathrm{T}(t) \quad \xi_\mathrm{c}^\mathrm{T}(t)\right]^\mathrm{T};$$

$$\xi_\mathrm{a}(t) = \left[\xi_1^\mathrm{T}(t) \quad \xi_2^\mathrm{T}(t) \quad \xi_3^\mathrm{T}(t)\right]^\mathrm{T};$$

$$\xi_\mathrm{b}(t) = \left[\xi_4^\mathrm{T}(t) \quad \xi_5^\mathrm{T}(t) \quad \xi_6^\mathrm{T}(t)\right]^\mathrm{T};$$

$$\xi_\mathrm{c}(t) = \left[\xi_7^\mathrm{T}(t) \quad \xi_8^\mathrm{T}(t) \quad \xi_9^\mathrm{T}(t)\right]^\mathrm{T};$$

$$\xi_1(t) = \left[\boldsymbol{x}^\mathrm{T}(t) \ \boldsymbol{x}^\mathrm{T}(t-h_1) \ \boldsymbol{x}^\mathrm{T}(t-h(t)) \ \boldsymbol{x}^\mathrm{T}(t-h_2)\right]^\mathrm{T};$$

$$\xi_2(t) = \left[\frac{1}{h_1}\int_{t-h_1}^{t} \boldsymbol{x}^\mathrm{T}(s)\mathrm{d}s \ \ \frac{1}{h_1}\int_{t-h_1}^{t} \delta_1(s-t)\boldsymbol{x}^\mathrm{T}(s)\mathrm{d}s\right]^\mathrm{T};$$

$$\xi_3(t) = \left[\frac{1}{h(t)-h_1}\int_{t-h(t)}^{t-h_1} \boldsymbol{x}^\mathrm{T}(s)\mathrm{d}s\right]^\mathrm{T};$$

$$\xi_4(t) = \left[\frac{1}{h(t)-h_1}\int_{t-h(t)}^{t-h_1} \delta_2(s-t)\boldsymbol{x}^\mathrm{T}(s)\mathrm{d}s\right]^\mathrm{T};$$

$$\xi_5(t) = \left[\frac{1}{h_2-h(t)}\int_{t-h_2}^{t-h(t)} \boldsymbol{x}^\mathrm{T}(s)\mathrm{d}s\right]^\mathrm{T};$$

$$\xi_6(t) = \left[\frac{1}{h_2-h(t)}\int_{t-h_2}^{t-h(t)} \delta_3(s-t)\boldsymbol{x}^\mathrm{T}(s)\mathrm{d}s\right]^\mathrm{T};$$

$$\xi_7(t) = \left[\int_{t-h(t)}^{t-h_1} \boldsymbol{x}^\mathrm{T}(s)\mathrm{d}s \quad \int_{t-h(t)}^{t-h_1} \delta_2(s-t)\boldsymbol{x}^\mathrm{T}(s)\mathrm{d}s\right]^\mathrm{T};$$

$$\xi_8(t) = \left[\int_{t-h_2}^{t-h(t)} \boldsymbol{x}^\mathrm{T}(s)\mathrm{d}s \quad \int_{t-h_2}^{t-h(t)} \delta_3(s-t)\boldsymbol{x}^\mathrm{T}(s)\mathrm{d}s\right]^\mathrm{T};$$

$$\xi_9(t) = \left[\dot{\boldsymbol{x}}^\mathrm{T}(t-h_1) \quad \dot{\boldsymbol{x}}^\mathrm{T}(t-h_2)\right]^\mathrm{T};$$

$$\boldsymbol{g}_1(h(t)) = (h(t)-h_1)\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_7\\ \boldsymbol{e}_8\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_{11}\\ \boldsymbol{e}_{12}\end{bmatrix};$$

$$\boldsymbol{g}_2(h(t)) = (h_2-h(t))\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_9\\ \boldsymbol{e}_{10}\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_{13}\\ \boldsymbol{e}_{14}\end{bmatrix};$$

$$\boldsymbol{e}_i = \left[\boldsymbol{0}_{n\times(i-1)n} \quad \boldsymbol{I}_n \quad \boldsymbol{0}_{n\times(16-i)n}\right], \quad i = 1,2,\cdots,16;$$

$\boldsymbol{e}_0 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{A}_\mathrm{d}\boldsymbol{e}_3$;

$h_{12} = h_2 - h_1$。

下面给出系统的稳定判据。

定理 1　给定标量 h_1、h_2>0，这个系统（1）是渐近稳定的，若存在矩阵 $\boldsymbol{P}$（$\in\mathbb{R}^{7n\times7n}$）>0、$\boldsymbol{S}_1$（$\in\mathbb{R}^{6n\times6n}$）>0、$\boldsymbol{S}_2$（$\in\mathbb{R}^{6n\times6n}$）>0 和 $\boldsymbol{R}_1$、$\boldsymbol{R}_2$（$\in\mathbb{R}^{n\times n}$）>0，任意矩阵 $\boldsymbol{N}_1$、$\boldsymbol{N}_2$（$\in\mathbb{R}^{16n\times2n}$）>0、$\boldsymbol{Z}_1$、$\boldsymbol{Z}_2$ 与 $\boldsymbol{Z}_3$（$\in\mathbb{R}^{4n\times3n}$）>0，对于条件 0< h_1 <$h(t)$ <h_2，有下列不等式成立：

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Phi}(h_1) & h_1\boldsymbol{Q}_1^\mathrm{T}\boldsymbol{Z}_1 & h_{12}\boldsymbol{Q}_3^\mathrm{T}\boldsymbol{Z}_3\\ h_1\boldsymbol{Z}_1^\mathrm{T}\boldsymbol{Q}_1 & -h_1\boldsymbol{R}_\mathrm{z} & \boldsymbol{0}\\ h_{12}\boldsymbol{Z}_3^\mathrm{T}\boldsymbol{Q}_3 & \boldsymbol{0} & -h_{12}\boldsymbol{R}_\mathrm{w}\end{bmatrix} < 0, \qquad (3)$$

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Phi}(h_2) & h_1\boldsymbol{Q}_1^\mathrm{T}\boldsymbol{Z}_1 & h_{12}\boldsymbol{Q}_2^\mathrm{T}\boldsymbol{Z}_2\\ h_1\boldsymbol{Z}_1^\mathrm{T}\boldsymbol{Q}_1 & -h_1\boldsymbol{R}_\mathrm{z} & \boldsymbol{0}\\ h_{12}\boldsymbol{Z}_2^\mathrm{T}\boldsymbol{Q}_2 & \boldsymbol{0} & -h_{12}\boldsymbol{R}_\mathrm{w}\end{bmatrix} < 0。 \qquad (4)$$

式（3）（4）中

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Phi}(h(t)) = {} & Sym\{\boldsymbol{\Pi}_1^\mathrm{T}\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Pi}_2 + \boldsymbol{\Pi}_7^\mathrm{T}\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{\Pi}_8 + \boldsymbol{\Pi}_9^\mathrm{T}\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{\Pi}_{10} + \\ & \boldsymbol{N}_1\boldsymbol{g}_1(h(t)) + \boldsymbol{N}_2\boldsymbol{g}_2(h(t))\} + \boldsymbol{\Pi}_3^\mathrm{T}\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{\Pi}_3 - \boldsymbol{\Pi}_4^\mathrm{T}\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{\Pi}_4 + \\ & \boldsymbol{\Pi}_5^\mathrm{T}\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{\Pi}_5 - \boldsymbol{\Pi}_6^\mathrm{T}\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{\Pi}_6 + h_1\boldsymbol{e}_0^\mathrm{T}\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{e}_0 + h_{12}\boldsymbol{e}_0^\mathrm{T}\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{e}_0 - \\ & \boldsymbol{Q}_1^\mathrm{T}\left(\boldsymbol{Z}_1\boldsymbol{M} + (\boldsymbol{Z}_1\boldsymbol{M})^\mathrm{T}\right)\boldsymbol{Q}_1 - \boldsymbol{Q}_2^\mathrm{T}\left(\boldsymbol{Z}_2\boldsymbol{M} + (\boldsymbol{Z}_2\boldsymbol{M})^\mathrm{T}\right)\boldsymbol{Q}_2 - \\ & \boldsymbol{Q}_3^\mathrm{T}\left(\boldsymbol{Z}_3\boldsymbol{M} + (\boldsymbol{Z}_3\boldsymbol{M})^\mathrm{T}\right)\boldsymbol{Q}_3。\end{aligned}$$

上式中：

$\boldsymbol{\Pi}_1=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Pi}_a^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{\Pi}_b^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{\Pi}_c^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$，

其中，

$$\boldsymbol{\Pi}_a=\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}} & h_1\boldsymbol{e}_5^{\mathrm{T}} & h_1\boldsymbol{e}_6^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{e}_{11}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{e}_{13}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\Pi}_b=\left[\left(h_2-h(t)\right)\left(\boldsymbol{e}_{11}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{e}_{14}^{\mathrm{T}}\right)+\left(h(t)-h_1\right)\left(\boldsymbol{e}_{11}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{e}_{13}^{\mathrm{T}}\right)\right]^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\Pi}_c=\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{e}_4^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}};$$

$\boldsymbol{\Pi}_2=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Pi}_d^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{\Pi}_e^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{\Pi}_f^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{\Pi}_g^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$，

其中，

$$\boldsymbol{\Pi}_d=\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_0^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\Pi}_e=\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}}-2\boldsymbol{e}_5^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{e}_4^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\Pi}_f=\left[h_{12}\left(\boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{e}_4^{\mathrm{T}}\right)-2\left(\boldsymbol{e}_{11}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{e}_{13}^{\mathrm{T}}\right)\right]^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\Pi}_g=\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_0^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{e}_{15}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{e}_{15}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{e}_{16}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}};$$

$$\boldsymbol{\Pi}_3=\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_0^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{e}_4^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0}_{16n\times n}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}};$$

$$\boldsymbol{\Pi}_4=\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_{15}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{e}_4^{\mathrm{T}} & h_1\boldsymbol{e}_5^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}};$$

$$\boldsymbol{\Pi}_5=\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_{15}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{e}_4^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0}_{16n\times n}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}};$$

$$\boldsymbol{\Pi}_6=\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_{16}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{e}_4^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{e}_4^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{e}_{11}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{e}_{13}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}};$$

$$\boldsymbol{\Pi}_7=\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}} & h_1\boldsymbol{e}_5^{\mathrm{T}} & h_1\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}} & h_1\boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}} & h_1\boldsymbol{e}_4^{\mathrm{T}} & \dfrac{h_1^2}{2}\left(\boldsymbol{e}_6^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{e}_5^{\mathrm{T}}\right)\end{bmatrix}^{\mathrm{T}};$$

$$\boldsymbol{\Pi}_8=\begin{bmatrix}\boldsymbol{0}_{16n\times n} & \boldsymbol{0}_{16n\times n} & \boldsymbol{e}_0^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{e}_{15}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{e}_{16}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}};$$

$\boldsymbol{\Pi}_9=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Pi}_h^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{\Pi}_i^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{\Pi}_j^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\Pi}_k^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$，

其中，

$$\boldsymbol{\Pi}_h=\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{e}_4^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{e}_{11}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{e}_{13}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\Pi}_i=\begin{bmatrix}\left(h_2-h_1\right)\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}} & h_{12}\boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}} & h_{12}\boldsymbol{e}_4^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\Pi}_j=\left[\frac{h(t)-h_1}{2}\left(\boldsymbol{e}_{12}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{e}_{11}^{\mathrm{T}}\right)\right]^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\Pi}_k=\left[\frac{h_2-h(t)}{2}\left(\boldsymbol{e}_{14}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{e}_{13}^{\mathrm{T}}\right)+\left(h_2-h(t)\right)\boldsymbol{e}_{11}^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}};$$

$$\boldsymbol{\Pi}_{10}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{0}_{16n\times n} & \boldsymbol{0}_{16n\times n} & \boldsymbol{e}_0^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{e}_{15}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{e}_{16}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}};$$

$$\boldsymbol{Q}_1=\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{e}_5^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{e}_6^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}};$$

$$\boldsymbol{Q}_2=\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{e}_3^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{e}_7^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{e}_8^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}};$$

$$\boldsymbol{Q}_3=\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_3^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{e}_4^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{e}_9^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{e}_{10}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}};$$

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_n & -\boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{I}_n & -2\boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{I}_n & -\boldsymbol{I}_n & 0 & -6\boldsymbol{I}_n\end{bmatrix};$$

$\boldsymbol{R}_z=\mathrm{diag}\left(\boldsymbol{R}_1 \quad 3\boldsymbol{R}_1 \quad 5\boldsymbol{R}_1\right)$；

$\boldsymbol{R}_w=\mathrm{diag}\left(\boldsymbol{R}_2 \quad 3\boldsymbol{R}_2 \quad 5\boldsymbol{R}_2\right)$。

证明 选取下面的 Lyapunov-Krasovskii 泛函

$$\begin{aligned}V(x_t)=&\boldsymbol{\eta}_1^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}\boldsymbol{\eta}_1(t)+\int_{t-h_1}^{t}\boldsymbol{\eta}_2^{\mathrm{T}}(t,s)\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{\eta}_2(t,s)\mathrm{d}s+\\&\int_{t-h_2}^{t-h_1}\boldsymbol{\eta}_3^{\mathrm{T}}(t,s)\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{\eta}_3(t,s)\mathrm{d}s+\\&\int_{-h_1}^{0}\int_{t+\theta}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{R}_1\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta+\\&\int_{-h_2}^{-h_1}\int_{t+\theta}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{R}_2\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta,\end{aligned}\tag{5}$$

当 $\boldsymbol{P}>0$、$\boldsymbol{S}_1>0$、$\boldsymbol{S}_2>0$、$\boldsymbol{R}_1>0$ 与 $\boldsymbol{R}_2>0$ 时，该函数正定，即 $V(x_t)>0$。对 $V(x_t)$ 求导可得：

$$\begin{aligned}\dot{V}(x_t)=&\dot{\boldsymbol{\eta}}_1^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}\boldsymbol{\eta}_1(t)+\boldsymbol{\eta}_1^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}\dot{\boldsymbol{\eta}}_1(t)+\boldsymbol{\eta}_2^{\mathrm{T}}(t,t)\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{\eta}_2(t,t)-\\&\boldsymbol{\eta}_2^{\mathrm{T}}\left(t,t-h_1\right)\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{\eta}_2\left(t,t-h_1\right)+h_1\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{R}_1\dot{\boldsymbol{x}}(t)+\\&\int_{t-h_1}^{t}2\boldsymbol{\eta}_2^{\mathrm{T}}(t,s)\boldsymbol{S}_1\frac{\partial\boldsymbol{\eta}_2(t,s)}{\partial t}\mathrm{d}s+h_{12}\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{R}_2\dot{\boldsymbol{x}}(t)+\\&\boldsymbol{\eta}_3^{\mathrm{T}}\left(t,t-h_1\right)\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{\eta}_3\left(t,t-h_1\right)-\\&\boldsymbol{\eta}_3^{\mathrm{T}}\left(t,t-h_2\right)\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{\eta}_3\left(t,t-h_2\right)+\\&\int_{t-h_2}^{t-h_1}2\boldsymbol{\eta}_3^{\mathrm{T}}(t,s)\boldsymbol{S}_2\frac{\partial\boldsymbol{\eta}_3(t,s)}{\partial t}\mathrm{d}s-\\&\int_{t-h_1}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{R}_1\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s-\int_{t-h_2}^{t-h_1}\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{R}_2\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s=\\&\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}(t)\Big[Sym\left\{\boldsymbol{\Pi}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Pi}_2+\boldsymbol{\Pi}_7^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{\Pi}_8+\boldsymbol{\Pi}_9^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{\Pi}_{10}\right\}+\\&\boldsymbol{\Pi}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{\Pi}_3-\boldsymbol{\Pi}_4^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{\Pi}_4+\boldsymbol{\Pi}_5^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{\Pi}_5-\boldsymbol{\Pi}_6^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{\Pi}_6\Big]\boldsymbol{\xi}(t)-\\&\int_{t-h_1}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{R}_1\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s-\int_{t-h_2}^{t-h_1}\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{R}_2\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s。\end{aligned}$$

由引理 1 可得：

$$\begin{aligned}-\int_{t-h_1}^{t}&\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{R}_1\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s\leqslant\\&-\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{Q}_1^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{Z}_1\boldsymbol{M}+\left(\boldsymbol{Z}_1\boldsymbol{M}\right)^{\mathrm{T}}-h_1\boldsymbol{Z}_1\boldsymbol{R}_z^{-1}\boldsymbol{Z}_1^{\mathrm{T}}\right)\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{\xi}(t),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-\int_{t-h_2}^{t-h_1}&\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{R}_2\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s=\\&-\int_{t-h(t)}^{t-h_1}\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{R}_2\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s-\int_{t-h_2}^{t-h(t)}\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{R}_2\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s\leqslant\\&\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}(t)\Big[-\boldsymbol{Q}_2^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{Z}_2\boldsymbol{M}+\left(\boldsymbol{Z}_2\boldsymbol{M}\right)^{\mathrm{T}}\right)\boldsymbol{Q}_2+\\&\boldsymbol{Q}_2^{\mathrm{T}}\left(h(t)-h_1\right)\boldsymbol{Z}_2\boldsymbol{R}_w^{-1}\boldsymbol{Z}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_2-\\&\boldsymbol{Q}_3^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{Z}_3\boldsymbol{M}+\left(\boldsymbol{Z}_3\boldsymbol{M}\right)^{\mathrm{T}}\right)\boldsymbol{Q}_3+\\&\boldsymbol{Q}_3^{\mathrm{T}}\left(h_2-h(t)\right)\boldsymbol{Z}_3\boldsymbol{R}_w^{-1}\boldsymbol{Z}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_3\Big]\boldsymbol{\xi}(t),\end{aligned}$$

又由于

$$2\xi^{\mathrm{T}}(t)\left(\boldsymbol{N}_1\boldsymbol{g}_1\left(h(t)\right)+\boldsymbol{N}_2\boldsymbol{g}_2\left(h(t)\right)\right)\xi(t)=0,$$

所以有

$$\dot{V}\left(x_t\right)\leqslant\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\Psi}(h(t))\boldsymbol{\xi}(t)。$$

其中：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Psi}(h(t))=\ &\boldsymbol{\Phi}(h(t))+\boldsymbol{Q}_1^{\mathrm{T}}h_1\boldsymbol{Z}_1\boldsymbol{R}_z^{-1}\boldsymbol{Z}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_1+\\&\boldsymbol{Q}_2^{\mathrm{T}}\left(h(t)-h_1\right)\boldsymbol{Z}_2\boldsymbol{R}_{\mathrm{w}}^{-1}\boldsymbol{Z}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_2+\\&\boldsymbol{Q}_3^{\mathrm{T}}\left(h_2-h(t)\right)\boldsymbol{Z}_3\boldsymbol{R}_{\mathrm{w}}^{-1}\boldsymbol{Z}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_3。\end{aligned}$$

应用 Schur 补引理，$\boldsymbol{\Psi}(h(t))$ 等价于不等式（3）与（4），这就意味着 $\dot{V}\left(x_t\right)<0$，所以系统（1）是渐近稳定的。证毕。

4　数值算例

例 1　考虑系统（1），其中：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & -0.9\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}_{\mathrm{d}}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ -1 & -1\end{bmatrix}。$$

这是一个经典的实例，经常出现在其它时滞相关研究文献中，应用本文给出的定理可以看出，当 h_1 给定不同值时，系统（1）在满足约束条件 $0<h_1<h(t)<h_2$ 的情况下，系统的时滞稳定裕度为 h_2。将数值仿真结果与其它相关文献的仿真结果进行对比，结果如表 1 所示。

表 1　给定不同 h_1 的情况下例 1 的最大允许时滞上界 h_2

Table 1　Upper bound of the maximum allowable delay h_2 of case 1 for various given h_1 values

文献	h_1			
	0	0.4	0.7	1.0
[17]	1.86	1.88	1.95	2.06
[18]	2.11	2.17	2.23	2.31
[13]	2.14	2.19	2.24	2.31
[4]	2.18	2.21	2.25	2.32
[19]	2.21	2.25	2.28	2.34
本文	2.22	2.26	2.31	2.40

从表 1 所示仿真结果数据中可以看出，当 h_1 给定不同的值时，系统最大允许时滞上界 h_2 的结果均明显优于其它文献中的结果。可见，通过仿真数值对比，证明了应用本文给出的方法，能让系统（1）具有更小的保守性。

例 2　考虑系统（1），其中：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -10 & -1\end{bmatrix},$$

表 2　给定不同 h_1 的情况下例 2 的最大允许时滞上界 h_2

Table 2　Upper bound of the maximum allowable delay h_2 of case 2 for various given h_1 values

文献	h_1				
	0	0.3	0.7	1.0	2.0
[18]	1.59	2.01	2.41	2.62	3.59
[13]	1.64	2.13	2.70	2.96	3.63
[4]	1.80	2.19	2.58	2.79	3.68
[19]	1.79	2.23	2.61	2.81	3.76
本文	2.50	2.90	3.28	3.52	4.32

$$\boldsymbol{A}_{\mathrm{d}}=\begin{bmatrix}0 & 0.1\\ 0.1 & 0.2\end{bmatrix}。$$

将数值仿真结果与其它文献的仿真结果进行对比，如表 2 所示。

从表 2 所示的仿真结果中可以得知，应用本文提出的方法能让系统（1）的时滞稳定裕度得到本质上的改善，说明本文方法相比其它文献给出的方法具有显著的优越性。

4　结语

本文基于改进型 Bessel-Legendre 不等式方法，应用此不等式在时变时滞系统中对泛函导数积分项进行界定时不含逆凸性而易于处理的优势，结合经典线性系统模型的一般形式及系统相关约束条件，选取合适的 Lyapunov-Krasovskii 泛函，推导出了系统的一个新的时滞相关稳定判据，再结合数值实例进行仿真验证，参照其它文献中的仿真结果进行对比，得知本文方法的系统最大允许时滞上界 h_2 的结果明显优于其它文献中的结果，即其能让系统的时滞稳定裕度得到本质上的改善，可见本文的方法具有显著的优越性。

参考文献：

[1]　刘晓桂，王　炜，曾红兵，等. 不确定时滞电力系统鲁棒稳定性分析 [J]. 湖南工业大学学报，2018，32(4)：40–44.
LIU Xiaogui，WANG Wei，ZENG Hongbing，et al. Robust Stability Analysis of the Uncertain Time-Delay Power System[J]. Journal of Hunan University of Technology，2018，32(4)：40–44.

[2]　WU L G，SU X J，SHI P，et al. A New Approach to Stability Analysis and Stabilization of Discrete-Time T-S Fuzzy Time-Varying Delay Systems[J]. IEEE Transactions on Systems，Man，and Cybernetics，Part B（Cybernetics），2011，41(1)：273–286.

[3] 陈 刚，王 信 . 分析时变时滞系统稳定性的新判据[J]. 湖南工业大学学报，2017，31(1)：60-63.
CHEN Gang，WANG Xin. A New Criterion for the Stability Analysis of Time Varying Delay Systems[J]. Journal of Hunan University of Technology，2017，31(1)：60-63.

[4] ZENG H B，HE Y，WU M，et al. Free-Matrix-Based Integral Inequality for Stability Analysis of Systems with Time-Varying Delay[J]. IEEE Transactions on Automatic Control，2015，60(10)：2768-2772.

[5] 袁 楠，曾红兵，刘晓桂 . 时滞相关稳定性分析在电力系统中的应用 [J]. 湖南工业大学学报，2018，32(5)：39-43.
YUAN Nan，ZENG Hongbing，LIU Xiaogui. Application of Delay-Dependent Stability Analysis in the Power System[J]. Journal of Hunan University of Technology，2018，32(5)：39-43.

[6] BRIAT C. Linear Parameter-Varying and Time-Delay Systems：Analysis, Observation, Filtering and Control[M]. Springer-Verlag：Silviu-Iulian Niculescu，2015：391-394.

[7] WU M，HE Y，SHE J H，et al. Delay-Dependent Criteria for Robust Stability of Time-Varying Delay Systems[J]. Automatica，2004，40(8)：1435-1439.

[8] GU K Q，KHARITONOV V L，CHEN J. Stability of Time Delay Systems[M]. Boston：Birkhäuser Boston，2003：1-356.

[9] SEURET A，GOUAISBAUT F. Wirtinger-Based Integral Inequality：Application to Time-Delay Systems[J]. Automatica，2013，49(9)：2860-2866.

[10] SEURET A，GOUAISBAUT F. Hierarchy of LMI Conditions for the Stability Analysis of Time-Delay Systems[J]. Systems and Control Letters，2015，81：1-7.

[11] ZENG H B，HE Y，WU M，et al. New Results on Stability Analysis for Systems with Discrete Distributed Delay[J]. Automatica，2015，60：189-192.

[12] HIEN L V，TRINH H. Refined Jensen-Based Inequality Approach to Stability Analysis of Time-Delay Systems[J]. IET Control Theory and Applications，2015，9(14)：2188-2194.

[13] PARK P G，LEE W I，LEE S Y. Auxiliary Function-Based Integral Inequalities for Quadratic Functions and Their Applications to Time-Delay Systems[J]. Journal of the Franklin Institute，2015，352(4)：1378-1396.

[14] PARK P G，LEE W I，LEE S Y. Auxiliary Function-Based Integral/Summation Inequalities：Application to Continuous/Discrete Time-Delay Systems[J]. International Journal of Control，Automation and Systems，2016，14(1)：3-11.

[15] KIM J H. Further Improvement of Jensen Inequality and Application to Stability of Time-Delayed Systems[J]. Automatica，2016，64：121-125.

[16] LEE W I，LEE S Y，PARK P G. Affine Bessel-Legendre Inequality：Application to Stability Analysis for Systems with Time-Varying Delays[J]. Automatica，2018，93(4)：535-539.

[17] PARK P G，KO J W，JEONG C. Reciprocally Convex Approach to Stability of Systems with Time-Varying Delays[J]. Automatica，2011，47(1)：235-238.

[18] SEURET A，GOUAISBAUT F. Wirtinger-Based Integral Inequality：Application to Time-Delay Systems[J]. Automatica，2013，49(9)：2860-2866.

[19] ZHANG C K，HE Y，JIANG L，et al. An Extended Reciprocally Convex Matrix Inequality for Stability Analysis of Systems with Time-Varying Delay[J]. Automatica，2017，85(6)：481-485.

（责任编辑：廖友媛）