

doi:10.3969/j.issn.1673-9833.2019.03.002

# 基于正弦函数的多涡卷吸引子及其动力学分析

彭智俊, 汤琼, 陈硕, 宋爽

(湖南工业大学理学院, 湖南株洲 412007)

**摘要:** 在 tang 设计的一个利用简单的正弦函数生成多涡卷混沌吸引子模型的基础上, 首先, 对该系统进行了基本的动力学分析, 即根据每个平衡点对应的 Jacobian 矩阵计算出的特征值判定平衡点的稳定性, 并利用相空间容积变化率对系统的耗散性进行了分析。然后利用 Lyapunov 指数和维数以及庞加莱截面图对系统进行了数值仿真分析, 探讨了不同的参数变化对系统基本动力学特性的影响, 为合理地选取系统参数提供了理论依据。

**关键词:** 多涡卷混沌吸引子; 动力学特性; 分岔; 正弦函数; 李雅普诺夫指数

**中图分类号:** O415.5

**文献标志码:** A

**文章编号:** 1673-9833(2019)03-0006-10

**引文格式:** 彭智俊, 汤琼, 陈硕, 等. 基于正弦函数的多涡卷吸引子及其动力学分析 [J]. 湖南工业大学学报, 2019, 33(3): 6-15.

## A Dynamic Analysis of Multi-Scroll Attractors Based on the Sinusoidal Function

PENG Zhijun, TANG Qiong, CHEN Shuo, SONG Shuang

(College of Science, Hunan University of Technology, Zhuzhou Hunan 412007, China)

**Abstract:** Based on tang design of a multi-scroll chaotic attractor model using a simple sinusoidal function, firstly, a basic dynamic analysis has been carried out of the system, with the stability of the equilibrium point determined according to the eigenvalues calculated by Jacobian matrix corresponding to each equilibrium point, followed by an analysis of the dissipation of the system by using the phase space volume change rate. Secondly, a numerical simulation analysis of the system can be made by using Lyapunov exponent, dimension and Poincare section diagram, with a tentative inquiry into the influence of different parameters on the basic dynamic characteristics of the system, thus providing a theoretical basis for the reasonable selection of system parameters.

**Keywords:** multi-scroll chaotic attractor; dynamic characteristics; bifurcation; sinusoidal function; Lyapunov exponential

## 0 引言

混沌吸引子的多样性极大地丰富了混沌系统,

相较于双涡卷混沌吸引子, 多涡卷混沌吸引子具有更复杂的混沌动力学行为, 它的应用前景更加广泛。

由于混沌吸引子在混沌信息处理、混沌神经网络以

收稿日期: 2019-01-02

基金项目: 湖南省自然科学基金资助项目(2018JJ4062), 湖南省教育厅创新平台开放基金资助项目(16K026), 湖南省科技厅青年基金资助项目(2018JJ3112), 湖南省研究生科研创新基金资助项目(CX2018B742)

作者简介: 彭智俊(1995-), 女, 湖南株洲人, 湖南工业大学硕士生, 主要研究方向为微分方程与动力系统,

E-mail: 1309581828@qq.com

通信作者: 汤琼(1972-), 女, 湖南浏阳人, 湖南工业大学教授, 博士, 主要从事微分方程与动力系统方面的教学与研究,

E-mail: zzgxsx@163.com

及混沌保密通信等方面有着较高的应用价值, 因此, 关于混沌吸引子的产生、控制等方面的研究已成为混沌领域的一大研究热点。

近年来, 国内外相关研究人员通过构造不同的非线性函数以产生多涡卷混沌吸引子。在该领域中, 科研工作者们先后提出了利用正弦函数、双曲正切函数、阶跃函数序列等构造非线性项以产生多涡卷混沌吸引子<sup>[1-7]</sup>。目前, 采用新型器件忆阻器设计忆阻型混沌电路成为混沌电路设计领域的一大研究热点。文献[8-13]分别在不同的系统中引入了忆阻器, 构造了多涡卷混沌系统。虽然已有大量文献对多涡卷混沌吸引子的产生进行了研究报道, 但对于新构造的多涡卷混沌模型进行动力学分析方面的研究还比较少。因为多涡卷混沌吸引子具有更为复杂的动力学行为, 所以对不同非线性函数构造的多涡卷混沌系统进行动力学分析十分必要。

本文拟对文献[1]中的模型进行基本动力学分析, 并根据参数的范围讨论混沌的形成过程, 探讨不同参数对系统基本动力学特性的影响, 以期为合理选取系统参数提供理论参考依据。

## 1 改进的蔡氏电路模型

根据文献[1], 利用正弦函数代替非线性项改进的蔡氏电路, 其状态方程可表示为

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha(y - f(x)), \\ \dot{y} = x - y + z, \\ \dot{z} = -\beta y. \end{cases} \quad (1)$$

其中

$$f(x) = \begin{cases} \frac{b\pi}{2a}(x - 2ac), & x \geq 2ac; \\ -b \sin\left(\frac{\pi x}{2a} + d\right), & -2ac < x < 2ac; \\ \frac{b\pi}{2a}(x + 2ac), & x \leq -2ac. \end{cases} \quad (2)$$

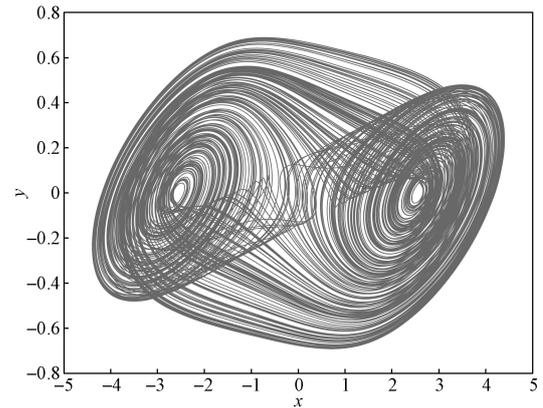
式(1)(2)中:

$\alpha$ 、 $\beta$ 、 $a$ 、 $b$ 、 $c$ 均为大于零的参数;

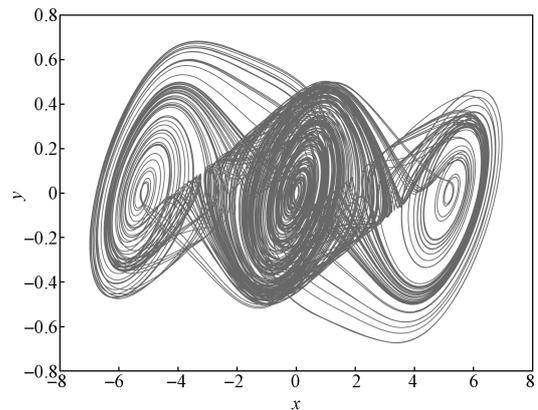
$n=c+1$ , 其中 $n$ 表示该系统产生涡卷的个数;

$d$ 为特定常数, 当 $n$ 为奇数时,  $d=\pi$ ; 当 $n$ 为偶数时,  $d=0$ 。

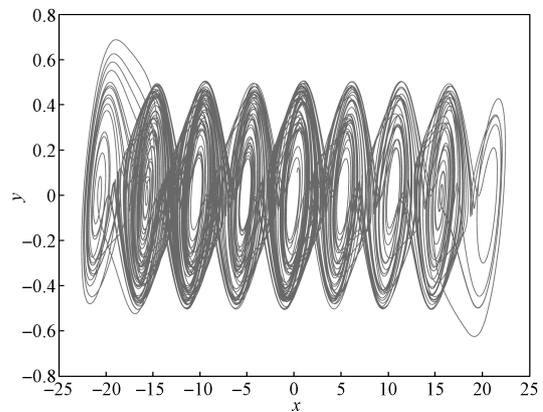
当 $\alpha=10.814$ ,  $\beta=14$ ,  $a=1.3$ ,  $b=0.11$ 时, 该系统可以生成单方向多涡卷混沌吸引子。当 $c$ 分别取1, 2, 8时, 系统(1)分别生成2涡卷、3涡卷和9涡卷的混沌吸引子, 其相图如图1所示。



a) 2 涡卷吸引子



b) 3 涡卷吸引子



c) 9 涡卷吸引子

图1 系统(1)单方向多涡卷混沌吸引子相图

Fig. 1 Unidirectional multi-scroll attractor phase diagram of system (1)

由图1可以得知, 固定其他参数不变, 仅通过改变参数 $c$ 、 $d$ 的取值, 系统(1)能够产生不同涡卷数量的混沌吸引子。

## 2 动力学分析

### 2.1 平衡点稳定性分析

为求解系统的平衡点, 令式(1)右边等于零, 可得到以下方程组:

$$\begin{cases} \alpha(y-f(x))=0, \\ x-y+z=0, \\ -\beta y=0. \end{cases} \quad (3)$$

系统的平衡点为  $(x_{eq}, 0, -x_{eq})$ , 其中  $x_{eq}$  为非线性函数  $f(x)$  的零点。当  $x \geq 2ac$  时,  $x_{eq}=2ac$ , 故平衡点为  $P_1(2ac, 0, -2ac)$ ; 而当  $x \leq -2ac$  时,  $x_{eq}=-2ac$ , 此时的平衡点为  $P_2(-2ac, 0, 2ac)$ ; 当  $|x| < 2ac$  时,  $x_{eq}=2ak - \frac{2ad}{\pi}$ , 则平衡点为  $P_3\left(2ak - \frac{2ad}{\pi}, 0, -2ak + \frac{2ad}{\pi}\right)$ , 其中  $k=0, \pm 1, \dots$ , 且  $k < |c|$ 。

系统 (1) 线性化的 Jacobian 矩阵为

$$J = \begin{bmatrix} -\alpha f'(x) & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & 0 \end{bmatrix}, \quad (4)$$

其中

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{b\pi}{2a}, & |x| \geq 2ac; \\ -\frac{b\pi}{2a} \cos\left(\frac{\pi x}{2a} + d\right), & |x| < 2ac. \end{cases}$$

下面根据每一个平衡点对应的 Jacobian 矩阵计算出相应的特征值, 进而判定平衡点的稳定性<sup>[14]</sup>。

2.1.1 平衡点  $P_1(2ac, 0, -2ac)$  或  $P_2(-2ac, 0, 2ac)$  的稳定性

系统 (1) 在平衡点  $P_1$  或  $P_2$  处的特征方程为

$$\lambda^3 + \left(1 + \frac{\alpha b \pi}{2a}\right) \lambda^2 + \left(\frac{\alpha b \pi}{2a} - \alpha + \beta\right) \lambda + \frac{\alpha \beta b \pi}{2a} = 0. \quad (5)$$

将  $\alpha=10.814$ ,  $\beta=14$ ,  $a=1.3$ ,  $b=0.11$  代入式 (5), 解得其特征值如下:  $\lambda_1=-3.0681$ ,  $\lambda_2=0.3154-2.5415i$ ,  $\lambda_3=0.3154+2.5415i$ 。其中, 一个实特征根小于 0, 两个共轭复特征根的实部都大于 0, 因此, 这两个平衡点都为指标 2 的鞍焦点, 对应的系统轨迹为涡卷。

2.1.2 平衡点为  $P_3\left(2ak - \frac{2ad}{\pi}, 0, -2ak + \frac{2ad}{\pi}\right)$  的稳定性

当  $d=0$  和  $d=\pi$  时, 系统 (1) 在平衡点  $P_3$  处的特征方程相同, 为

$$\lambda^3 + A_1 \lambda^2 + A_2 \lambda + A_3 = 0,$$

式中:  $A_1 = 1 - \frac{\alpha b \pi}{2a} \cos k\pi$ ;

$$A_2 = -\frac{\alpha b \pi}{2a} \cos k\pi - \alpha + \beta;$$

$$A_3 = -\frac{\alpha \beta b \pi}{2a} \cos k\pi.$$

下面考虑  $k$  的取值, 若  $k$  为奇数, 系统的特征方程与式 (5) 一致, 故此时平衡点  $P_3$  为指标 2 的鞍焦

点; 若  $k$  为偶数, 则系统的特征方程为

$$\lambda^3 + \left(1 - \frac{\alpha b \pi}{2a}\right) \lambda^2 + \left(-\frac{\alpha b \pi}{2a} - \alpha + \beta\right) \lambda - \frac{\alpha \beta b \pi}{2a} = 0. \quad (6)$$

将  $\alpha=10.814$ ,  $\beta=14$ ,  $a=1.3$ ,  $b=0.11$  代入式 (6), 解得其特征值如下:  $\lambda_1=2.6476$ ,  $\lambda_2=-1.1051-2.5257i$ ,  $\lambda_3=-1.1051+2.5257i$ 。其中, 一个实特征根大于 0, 两个共轭复特征根的实部均小于 0。因此, 这个平衡点均为指标 1 的鞍焦点, 对应的系统轨迹为连接两个涡卷之间的键带。

综上所述, 可知系统的 3 个平衡点都是不稳定的鞍焦点。

## 2.2 耗散性分析

系统 (1) 的相空间容积变化率为

$$\nabla f = \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial z} = -\alpha f'(x) - 1.$$

当  $|x| \geq 2ac$  时,

$$\nabla f = -\frac{\alpha b \pi}{2a} - 1 < 0,$$

可见, 此时系统是耗散的;

当  $|x| < 2ac$  时,

$$\nabla f = \frac{\alpha b \pi}{2a} \cos\left(\frac{\pi x}{2a} + d\right) - 1,$$

可知系统 (1) 的耗散性与  $x$  的取值有关, 下面讨论  $x$  的取值。其中, 参数  $\alpha=10.814$ ,  $\beta=14$ ,  $a=1.3$ ,  $b=0.11$ 。

1) 当  $d=0$  时,  $n$  为偶数,  $c$  为奇数。这里取  $c=1$ , 则  $|x| < 2.6$ 。当

$$\nabla f = \frac{\alpha b \pi}{2a} \cos \frac{\pi x}{2a} - 1 < 0$$

时, 系统 (1) 是耗散的, 解得:

$$x \in (-2.6, -0.6632) \cup (0.6632, 2.6).$$

同理, 取  $c=1$ , 要使  $\nabla f=0$ , 则应有  $x=-0.6632$  或者  $x=0.6632$ , 此时系统 (1) 是保守的, 而要使得  $\nabla f > 0$ , 则应有  $x \in (-0.6632, 0.6632)$ , 此时系统 (1) 是扩张的。

综合以上分析, 可以得到如下定理 1。

**定理 1** 当  $\alpha=10.814$ ,  $\beta=14$ ,  $a=1.3$ ,  $b=0.11$ , 并且取  $c=1$ ,  $x=-0.6632$  或  $0.6632$  时, 有  $\nabla f=0$ , 此时系统 (1) 是保守的; 当其他条件不变, 而  $x \in (-\infty, -0.6632) \cup (0.6632, +\infty)$  时, 有  $\nabla f < 0$ , 此时系统 (1) 是耗散的; 当其他条件不变, 而  $x \in (-0.6632, 0.6632)$  时, 有  $\nabla f > 0$ , 此时系统 (1) 是扩张的。

2) 当  $d=\pi$  时,  $n$  为奇数,  $c$  为偶数。这里取  $c=2$ , 则  $|x| < 5.2$ 。当

$$\nabla f = \frac{\alpha b \pi}{2a} \cos\left(\frac{\pi x}{2a} + \pi\right) - 1 < 0$$

时, 系统 (1) 是耗散的, 解得:

$$x \in (-5.2, -3.2632) \cup (-1.9368, 1.9368) \cup (3.2632, 5.2).$$

同理, 取  $c=2$ , 当  $\nabla f=0$ ,  $x$  取  $-3.2632$  或  $-1.9368$  或  $1.9368$  或  $3.2632$  时, 系统 (1) 是保守的; 当  $\nabla f > 0$ ,  $x \in (-3.2632, -1.9368) \cup (1.9368, 3.2632)$  时, 系统 (1) 是扩张的。

综合以上分析, 可以得到如下定理 2。

**定理 2** 当  $\alpha=10.814, \beta=14, a=1.3, b=0.11$  时, 并且取  $c=2, x$  为  $-3.2632$  或  $-1.9368$  或  $1.9368$  或  $3.2632$  时, 有  $\nabla f=0$ , 此时系统 (1) 是保守的; 当其他条件保持不变, 而  $x \in (-\infty, -3.2632) \cup (-1.9368, 1.9368) \cup (3.2632, +\infty)$  时, 有  $\nabla f < 0$ , 此时系统 (1) 是耗散的; 当其他条件不变, 而  $x \in (-3.2632, -1.9368) \cup (1.9368, 3.2632)$  时, 有  $\nabla f > 0$ , 此时系统 (1) 是扩张的。

### 3 数值仿真分析

#### 3.1 李雅普诺夫指数与维数

李雅普诺夫指数是量化动态系统稳定性和确定混沌的重要统计量。若系统中至少有一个李雅普诺夫指数大于零, 则系统处于混沌状态。当参数  $\alpha=10.814, \beta=14, a=1.3, b=0.11, c=1$  时, 可得到系统 (1) 的李雅普诺夫指数分别如下:  $LE_1=0.31568, LE_2=0.31554, LE_3=-3.0686$ ; 并得到如图 2 所示的李雅普诺夫指数图。

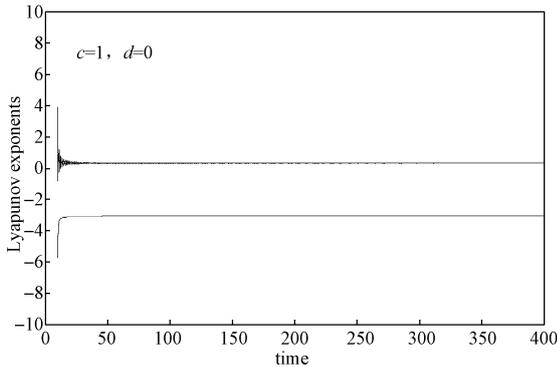


图 2 系统 (1) 的李雅普诺夫指数图

Fig. 2 Lyapunov exponential diagram of system (1)

由图 2 可以看出, 系统 (1) 有正的李雅普诺夫指数, 说明系统对初值极其敏感, 这是混沌状态的一个显著特征。

李雅普诺夫维数定义如下:

$$D = k + \frac{1}{|LE_{k+1}|} \sum_{i=1}^k LE_i.$$

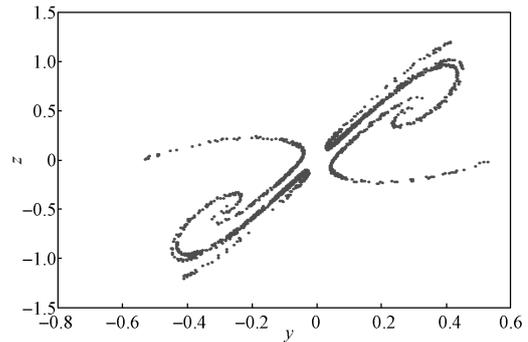
式中  $k$  是满足  $\sum_{i=1}^k LE_i \geq 0$  并且  $\sum_{i=1}^{k+1} LE_i < 0$  的最大整数。

经计算,  $D=2.2057$ 。

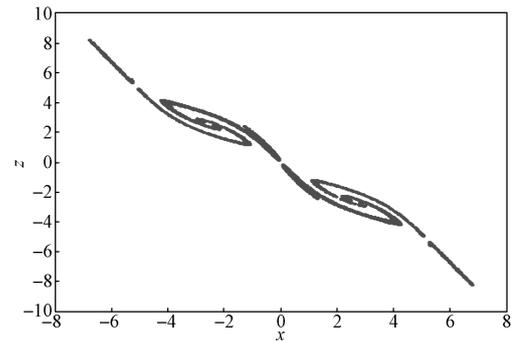
由上式可知该系统的维数是分数维, 即系统 (1) 的混沌吸引子具有复杂的分形结构。

#### 3.2 Poincaré 截面

图 3 所示为系统 (1) 在  $y-z$  及  $x-z$  截面上穿过的点的情况, 取  $c=2$ 。从图 3 中可以看出, 此时的 Poincaré 截面上是一片片密集的点, 并且具有层次结构, 因此该系统是混沌系统。



a) Poincaré 截面  $y-z$



b) Poincaré 截面  $x-z$

图 3  $c=2$  时系统 (1) 的 Poincaré 截面图

Fig. 3 Poincaré section of system (1) with  $c=2$

#### 3.3 系统参数的影响

当改变系统的参数时, 所研究系统的平衡点的稳定性也会随之发生变化, 即系统的运动状态随系统参数的变化而变化。本文拟用 Routh-Hurwitz 判据对系统参数的变化进行理论分析<sup>[15-17]</sup>。

系统 (1) 中的参数  $\alpha, \beta, a, b$  都是大于零的数, 其特征值没有零根, 故只考虑系统的 Hopf 分岔。系统 (1) 发生 Hopf 分岔的条件为  $a_1 a_2 - a_3 = 0$ 。

3.3.1 固定  $\beta=14, a=1.3, b=0.11$ , 讨论参数  $\alpha$  的变化范围

1) 固定参数  $\beta=14, a=1.3, b=0.11$ , 并取  $c=1$ , 利用 Routh-Hurwitz 判据讨论参数  $\alpha$  的变化范围

当  $|x| \geq 2ac$  时, 其特征方程同式 (5), 令

$$a_1 = 1 + \frac{\alpha b \pi}{2a}, \quad a_2 = \frac{a b \pi}{2a} - \alpha + \beta, \quad a_3 = \frac{\alpha \beta b \pi}{2a},$$

根据 Routh-Hurwitz 判据, 当  $a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0$ , 且  $a_1 a_2 - a_3 > 0$  时, 系统 (1) 是渐进稳定的。

经计算, 当  $\alpha \in (0, 7.884 1)$  时, 满足以上条件, 此时系统 (1) 是渐进稳定的。

当  $a_1 a_2 - a_3 = 0$  时,  $\alpha = 7.884 1$ 。将  $\alpha = 7.884 1$  代入式 (5) 中, 可得其特征方程为

$$\lambda^3 + 2.047 9\lambda^2 + 7.163 8\lambda + 14.670 7 = 0,$$

解得其特征根如下:

$$\lambda_1 = -2.047 9, \lambda_2 = 2.676 5i, \lambda_3 = -2.676 5i。$$

可见其特征根中有一个负实根, 并且有一对纯虚根, 此时系统 (1) 发生 Hopf 分岔, 系统的运动趋于一个围绕平衡点  $P_1$  或  $P_2$  的极限环。

当  $|x| < 2ac$  时, 系统的特征方程同式 (6), 令

$$b_1 = 1 - \frac{\alpha b \pi}{2a}, b_2 = -\frac{\alpha b \pi}{2a} - \alpha + \beta, b_3 = -\frac{\alpha \beta b \pi}{2a}。$$

根据 Routh-Hurwitz 判据, 当  $b_1 > 0, b_2 > 0, b_3 > 0$ , 且  $b_1 b_2 - b_3 > 0$  时, 系统 (1) 是渐进稳定的。

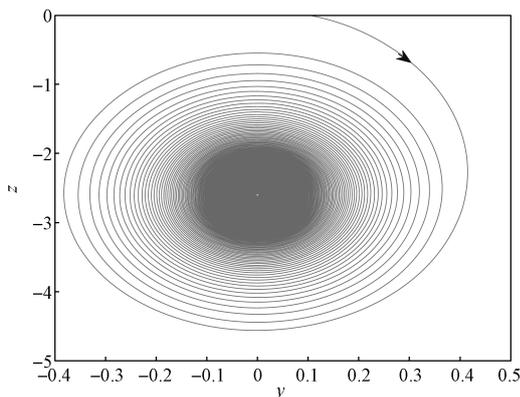
经计算, 当  $\alpha \in (-\infty, 0)$  时, 满足以上条件, 此时系统 (1) 是渐进稳定的。由于  $\alpha$  是一个大于零的数, 故当  $|x| < 2a$  时, 系统 (1) 不稳定。

综上所述, 可得出如下定理 3。

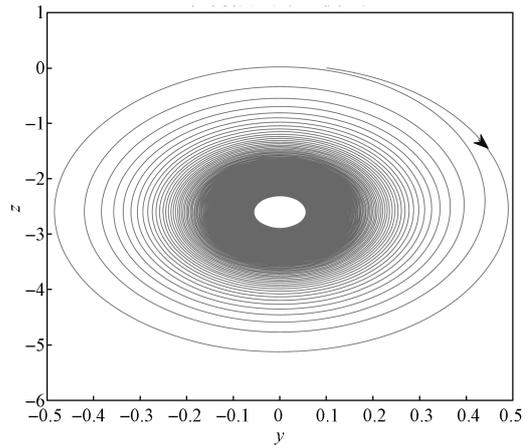
**定理 3** 固定参数  $\beta = 14, a = 1.3, b = 0.11$ , 且当  $\alpha \in (0, 7.884 1)$  时, 系统 (1) 是渐进稳定的。当其他条件不变, 而  $\alpha = 7.884 1$  时, 系统 (1) 在平衡点  $P_1$  或  $P_2$  处发生 Hopf 分岔, 系统的运动趋于一个围绕平衡点  $P_1$  或  $P_2$  的极限环。

2) 数值模拟

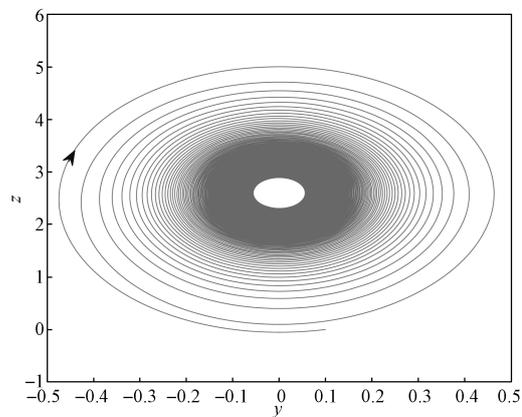
随着参数的变化, 系统可以呈现出不同的动力学状态。现固定参数  $\beta = 14, a = 1.3, b = 0.11$ , 并取  $c = 1$ , 当  $\alpha = 7.85$  时, 得到的系统相图如图 4a 所示, 由图可知系统 (1) 趋于平衡点; 当  $\alpha = 7.884 1$  时, 得到的系统相图如图 4b、c 所示, 由图可知系统 (1) 在平衡点  $P_1$  或  $P_2$  处发生了 Hopf 分岔, 产生了极限环; 当  $\alpha > 7.884 1$  时, 得到的系统相图如图 4d 所示, 由图可知系统开始形成混沌吸引子。



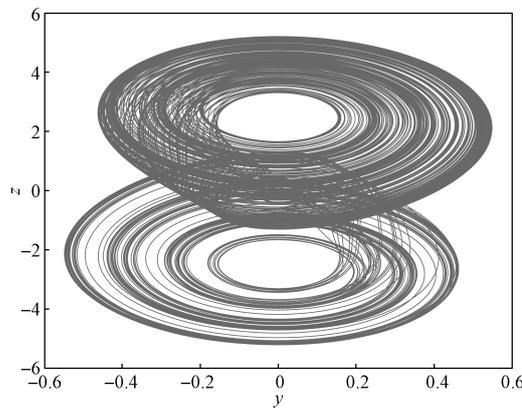
a)  $\alpha = 7.85$



b)  $\alpha = 7.884 1$ , 平衡点  $P_1$



c)  $\alpha = 7.884 1$ , 平衡点  $P_2$



d)  $\alpha = 9.524$

图 4 参数  $\alpha$  变化时系统 (1) 的相图

Fig. 4 Phase diagram of system (1) with a changing parameter  $\alpha$

3.3.2 固定  $\alpha = 10.814, a = 1.3, b = 0.11$ , 讨论参数  $\beta$  的变化范围

1) 固定参数  $\alpha = 10.814, a = 1.3, b = 0.11$ , 取  $c = 1$ , 利用 Routh-Hurwitz 判据, 考虑参数  $\beta$  的取值范围

同理, 当  $|x| \geq 2ac$  时, 系统的特征方程同式 (5), 经过计算,  $\beta \in (22.854, +\infty)$  时, 满足 Routh-Hurwitz

判据条件, 此时系统 (1) 是渐进稳定的。

当  $a_1 a_2 - a_3 = 0$  时,  $\beta = 22.854$ 。将  $\beta = 22.854$  代入式 (5) 中, 可得系统的特征方程为

$$\lambda^3 + 2.4373\lambda^2 + 13.4773\lambda + 32.8487 = 0,$$

解得其特征根如下:

$$\lambda_1 = -2.4373, \lambda_2 = 3.6712i, \lambda_3 = -3.6712i。$$

可见, 系统的特征根中有一个负实根, 并且有一对纯虚根, 此时系统 (1) 在平衡点  $P_1$  或  $P_2$  处发生了 Hopf 分岔, 系统的运动趋于一个围绕平衡点  $P_1$  或  $P_2$  的极限环。

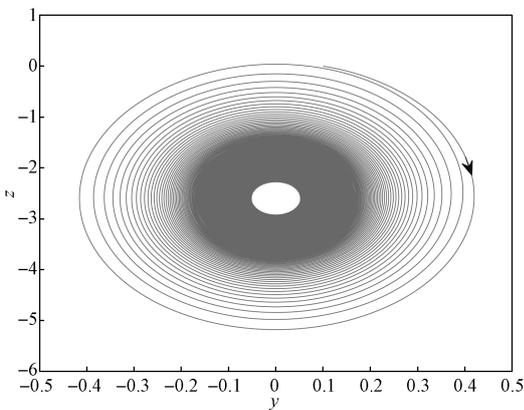
当  $|x| < 2ac$  时, 系统的特征方程同式 (6), 经计算,  $b < 0$ , 不满足 Routh-Hurwitz 判据条件, 此时无论  $\beta$  取何值, 系统 (1) 都不稳定。

综上所述, 可得出如下定理 4。

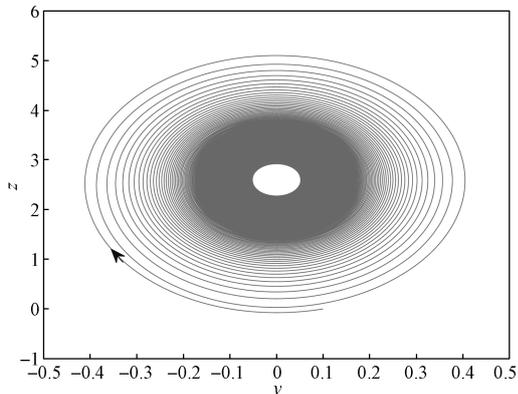
**定理 4** 固定参数  $\alpha = 10.814, a = 1.3, b = 0.11$ , 当  $\beta \in (22.854, +\infty)$  时, 系统 (1) 是渐进稳定的。当其他条件不变, 而  $\beta = 22.854$  时, 系统 (1) 的运动趋于一个围绕平衡点  $P_1$  或  $P_2$  的极限环。

### 2) 数值模拟

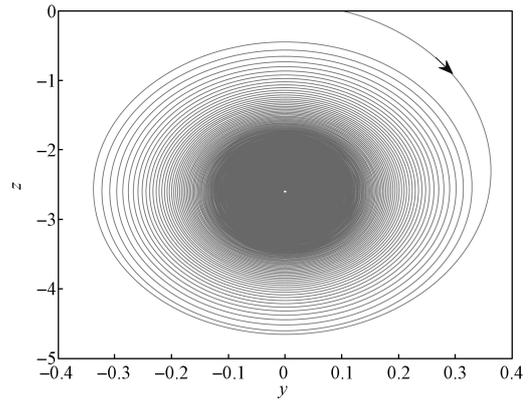
保持其他参数不变, 改变  $\beta$  取值, 观察系统相图, 取  $\beta = 22.854$  时, 系统的相图如图 5a 和 b 所示; 当取  $\beta = 23$  时, 系统的相图如图 5c 所示, 当取  $\beta < 22.854$  时, 系统的相图如图 5d 所示。



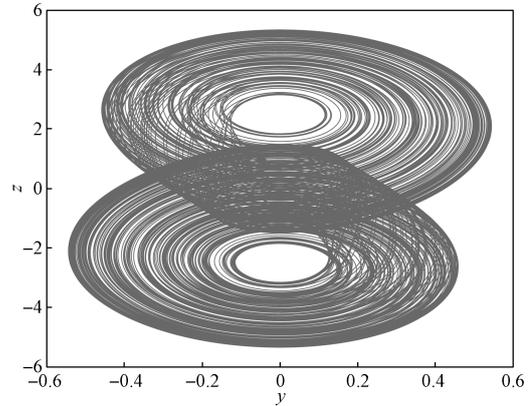
a)  $\beta = 22.854$ , 平衡点  $P_1$



b)  $\beta = 22.854$ , 平衡点  $P_2$



c)  $\beta = 23$



d)  $\beta = 16.51$

图 5 参数  $\beta$  变化时系统 (1) 的相图

Fig. 5 Phase diagram of system (1) with a changing parameter  $\beta$

由图 5a、b 所示的系统相图可知, 保持其他参数不变, 当  $\beta = 22.854$  时, 系统 (1) 在平衡点  $P_1$  或  $P_2$  处发生了 Hopf 分岔, 产生极限环; 由图 5c 所示的系统相图可知, 当  $\beta = 23$  时, 系统 (1) 逐渐趋于一个平衡点; 由图 5d 所示的系统相图可知, 当  $\beta < 22.854$  时, 系统 (1) 处于混沌状态。

### 3.3.3 固定 $\alpha = 10.814, \beta = 14, a = 1.3$ , 讨论参数 $b$ 的变化范围

1) 固定参数  $\alpha = 10.814, \beta = 14, a = 1.3$ , 取  $c = 1$ , 利用 Routh-Hurwitz 判据, 考虑参数  $b$  的取值范围

同理, 当  $|x| \geq 2ac$  时, 系统 (1) 的特征方程同式 (5), 经过计算, 当  $b \in (0, 0.0257) \cup (0.7253, +\infty)$  时, 满足 Routh-Hurwitz 判据的条件, 此时系统 (1) 是渐进稳定的。

当  $a_1 a_2 - a_3 = 0$  时,  $b = 0.0257$  或  $0.7253$ 。分别将  $b = 0.0257$  和  $b = 0.7253$  代入式 (5) 中, 求解方程的特征根。

当  $b = 0.0257$  时, 系统的特征方程为

$$\lambda^3 + 1.3358\lambda^2 + 3.5218\lambda + 4.7014 = 0,$$

解得其特征根如下:

$$\lambda_1 = -1.3358, \lambda_2 = 1.8758i, \lambda_3 = -1.8758i.$$

可见,系统的特征根中有一个负实根,并且有一对纯虚根,此时系统(1)在平衡点  $P_1$  或  $P_2$  处发生了 Hopf 分岔,系统的运动趋于一个围绕平衡点  $P_1$  或  $P_2$  的极限环。

当  $b = 0.7253$  时,系统的特征方程为

$$\lambda^3 + 10.4772\lambda^2 + 12.6632\lambda + 132.6810 = 0,$$

解得其特征根如下:

$$\lambda_1 = -10.4772, \lambda_2 = 3.5586i, \lambda_3 = -3.5586i.$$

可见,系统的特征根中有一个负实根,并且有一对纯虚根,此时系统(1)在平衡点  $P_1$  或  $P_2$  处发生了 Hopf 分岔,系统的运动趋于围绕平衡点  $P_1$  或  $P_2$  的极限环。

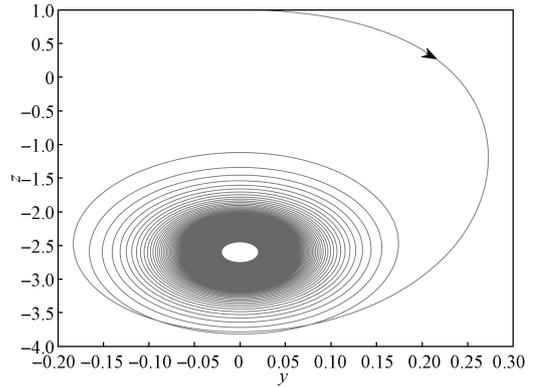
当  $|x| < 2ac$  时,系统的特征方程同式(6)。经过计算,当  $b \in (-\infty, -0.7253) \cup (-0.0257, 0)$  时,满足 Routh-Hurwitz 判据条件,此时系统(1)是渐进稳定的。由于  $b$  是一个大于零的数,故当  $|x| < 2ac$  时,系统(1)不稳定。

综上所述,可得如下定理 5。

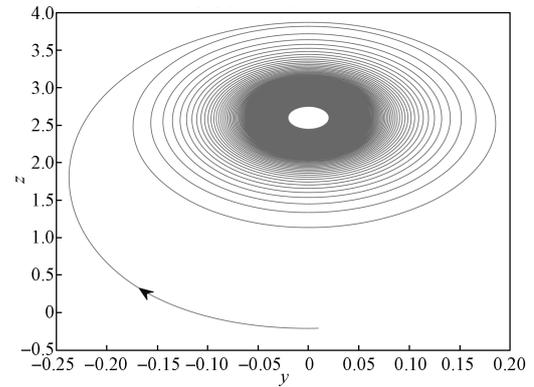
**定理 5** 固定参数  $\alpha = 10.814, \beta = 14, a = 1.3$ , 当  $b \in (0, 0.0257) \cup (0.7253, +\infty)$  时,系统(1)是渐进稳定的;当其他条件不变,而  $b = 0.0257$  时,系统(1)的运动趋于一个围绕平衡点  $P_1$  或  $P_2$  的极限环;保持其他条件不变,而  $b = 0.7253$  时,系统(1)的运动趋于围绕平衡点  $P_1$  或  $P_2$  的极限环。

2) 数值模拟

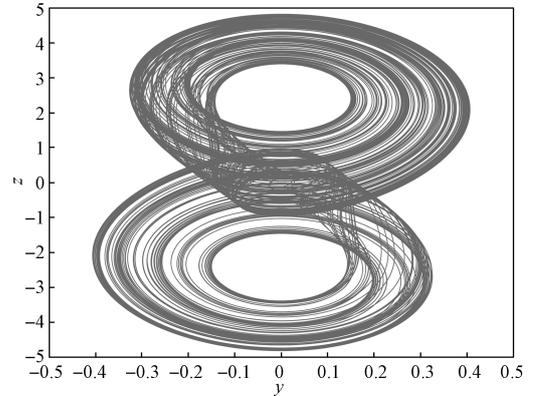
保持其他参数不变,即  $\alpha = 10.814, \beta = 14, a = 1.3$ , 改变  $b$  的取值,观察系统相图。当取  $b = 0.7253$  或  $0.0257$  时,系统的相图如图 6a~c 所示;当取  $b = 0.8$  时,系统的相图如图 6f 所示;当  $b \in (0.0257, 0.7253)$  时,系统的相图如图 6d 和 e 所示。



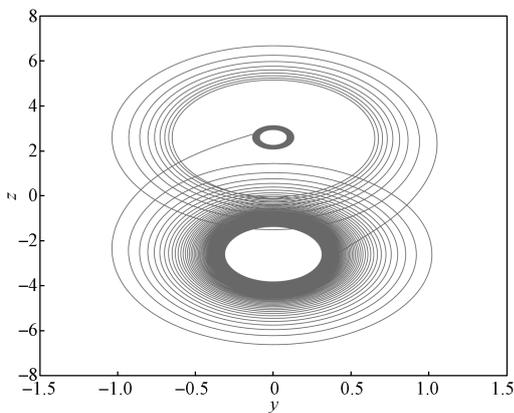
b)  $b = 0.7253$ , 平衡点  $P_1$



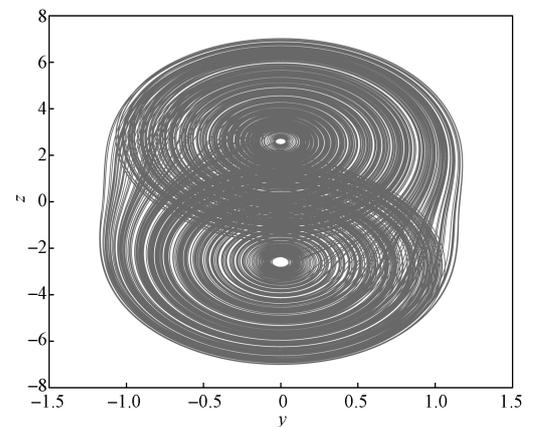
c)  $b = 0.0257$ , 平衡点  $P_2$



d)  $b = 0.0545$



a)  $b = 0.7253$



e)  $b = 0.5881$

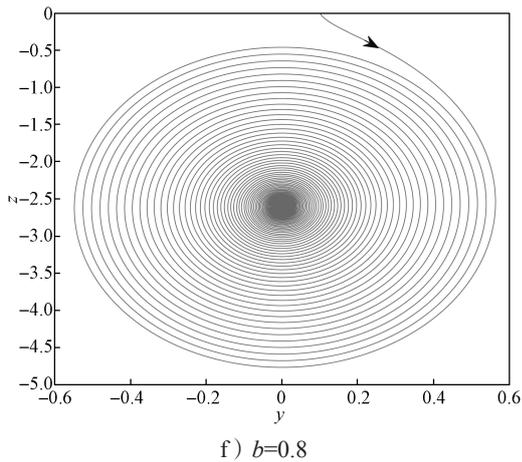


图6 参数  $b$  变化时系统 (1) 的相图  
Fig. 6 Phase diagram of system (1) with a changing parameter  $b$

由图 6a~c 所示系统的相图可知, 保持其他参数不变, 取  $b=0.725\ 3$  或  $0.025\ 7$  时, 系统 (1) 在平衡点  $P_1$  或  $P_2$  处发生了 Hopf 分岔, 产生极限环; 由图 6f 所示的系统相图可知, 取  $b=0.8$  时, 系统 (1) 逐渐趋于一个平衡点; 由图 6d、e 所示的系统相图可知, 当  $b \in (0.025\ 7, 0.725\ 3)$  时, 系统 (1) 处于混沌状态。

3.3.4 固定  $\alpha=10.814, \beta=14, b=0.11$ , 讨论参数  $a$  的变化范围

1) 固定参数  $\alpha=10.814, \beta=14, b=0.11$ , 且取  $c=1$ , 利用 Routh-Hurwitz 判据, 考虑参数  $a$  的取值范围

同理, 当  $|x| \geq 2ac$  时, 其特征方程同式 (5), 经过计算, 当  $a \in (0, 0.197\ 1) \cup (5.558\ 6, +\infty)$  时, 满足 Routh-Hurwitz 判据条件, 此时系统 (1) 是渐进稳定的。

当  $a_1 a_2 - a_3 = 0$  时,  $a=0.197\ 1$  或  $5.558\ 6$ 。分别将  $a=0.197\ 1$  或  $a=5.558\ 6$  代入式 (5) 中, 求解系统的特征根。

当  $a=0.197\ 1$  时, 系统的特征方程为

$$\lambda^3 + 10.480\ 1\lambda^2 + 12.666\ 1\lambda + 132.721\ 2 = 0,$$

解得其特征根如下:  
 $\lambda_1 = -10.480\ 1, \lambda_2 = 3.556\ 1i, \lambda_3 = -3.556\ 1i$ 。  
可见, 系统的特征根中有一个负实根, 并且有一对纯虚根, 此时系统 (1) 在平衡点  $P_1$  或  $P_2$  处发生了 Hopf 分岔, 系统的运动趋于围绕平衡点  $P_1$  或  $P_2$  的极限环。

当  $a=5.558\ 6$  时, 系统的特征方程为

$$\lambda^3 + 1.336\ 2\lambda^2 + 3.522\ 2\lambda + 4.706\ 1 = 0,$$

解得其特征根如下:  
 $\lambda_1 = -1.336\ 2, \lambda_2 = 1.876\ 7i, \lambda_3 = -1.876\ 7i$ 。  
可见, 系统的特征根中有一个负实根, 并且有一

对纯虚根, 此时系统 (1) 在平衡点  $P_1$  或  $P_2$  处发生了 Hopf 分岔, 系统的运动趋于一个围绕平衡点  $P_1$  或  $P_2$  的极限环。

当  $|x| < 2ac$  时, 系统的特征方程同式 (6), 经过计算, 当  $a \in (-\infty, -5.558\ 6) \cup (-0.197\ 1, 0)$  时, 满足 Routh-Hurwitz 判据条件, 此时系统 (1) 是渐进稳定的, 由于  $a$  是一个大于零的数, 故当  $|x| < 2ac$  时, 系统 (1) 不稳定。

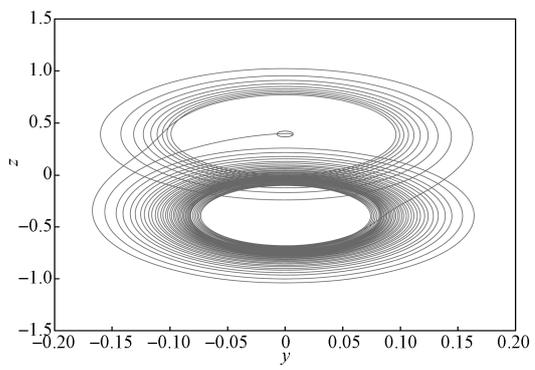
综上所述, 可得如下定理 6。

**定理 6** 固定参数  $\alpha=10.814, \beta=14, b=0.11$ , 当  $a \in (0, 0.197\ 1) \cup (5.558\ 6, +\infty)$  时, 系统 (1) 是渐进稳定的。当其他条件不变, 而  $a=5.558\ 6$  或  $a=0.197\ 1$  时, 系统 (1) 的运动趋于一个围绕平衡点  $P_1$  或  $P_2$  的极限环。

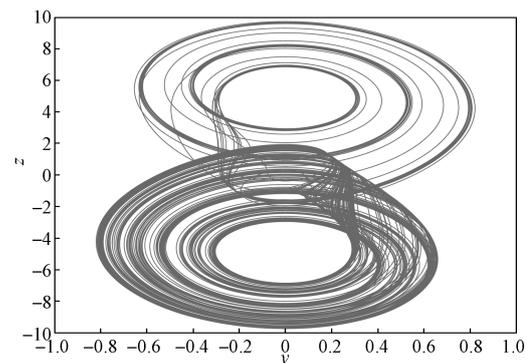
2) 数值模拟

保持其他参数不变, 取  $a=5.558\ 6$  或  $0.197\ 1$  时, 系统相图如图 7a、d、e 所示; 取  $a > 5.558\ 6$  时, 系统相图如图 7f 所示; 当  $a \in (0, 5.558\ 6)$  时, 系统相图如图 7b、c 所示。

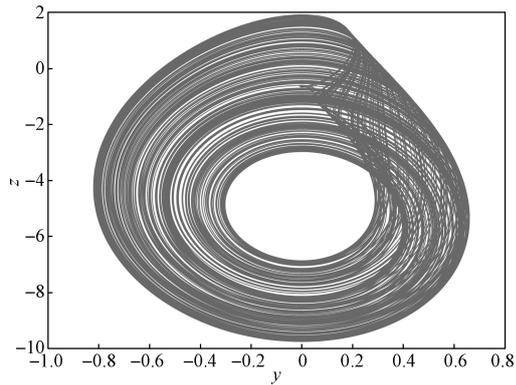
由图 7a、d、e 所示的系统相图可知, 保持其他参数不变, 取  $a=5.558\ 6$  或  $0.197\ 1$  时, 系统 (1) 在平衡点  $P_1$  或  $P_2$  处发生了 Hopf 分岔, 产生极限环; 由图 7f 所示系统相图可知, 取  $a > 5.558\ 6$  时, 系统 (1) 逐渐趋于一个平衡点; 由图 7b、c 所示系统相图可知, 当  $a \in (0, 5.558\ 6)$  时, 系统 (1) 处于混沌状态。



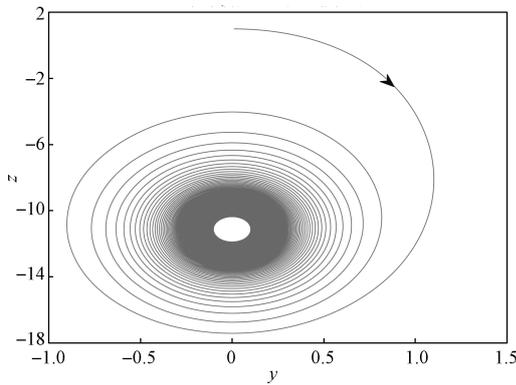
a)  $a=0.197\ 1$



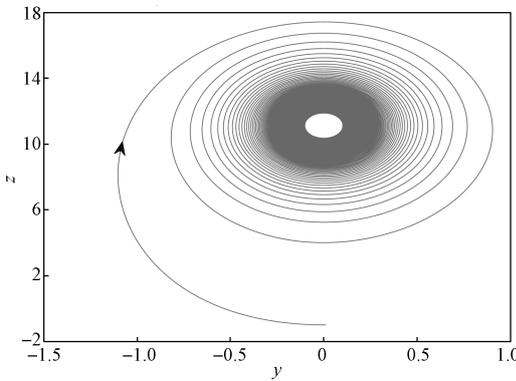
b)  $a=2.62$



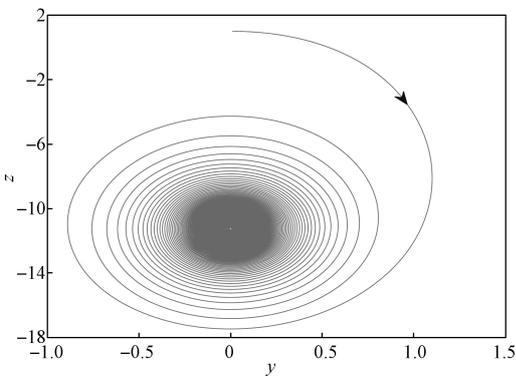
c)  $a=2.63$



d)  $a=5.5586$ , 平衡点  $P_1$



e)  $a=5.5586$ , 平衡点  $P_2$



f)  $a=5.63$

图7 参数  $a$  变化时系统 (1) 的相图  
Fig. 7 Phase diagram of system (1) with a changing parameter  $a$

## 4 结论

本文对改进的蔡氏电路模型进行了平衡点稳定性分析、耗散性分析、李雅普诺夫指数与维数等基本动力学行为分析,着重讨论了不同参数对系统的基本动力学特性的影响。

1) 平衡点稳定性分析结果表明,系统的3个平衡点都是不稳定的鞍焦点。

2) 根据系统(1)相空间容积变化率情况进行了耗散性分析,得知当  $|x| \geq 2ac$  时,系统是耗散的;当  $|x| < 2ac$  时,系统的耗散性与  $x$  的取值有关。

3) 李雅普诺夫指数与维数分析结果表明,系统有正的李雅普诺夫指数,说明系统对初值极其敏感,且该系统的维数是分数维,即系统的混沌吸引子具有复杂的分形结构。

4) 固定其他参数不变,当  $\alpha \in (9.1, 11.0489)$  或  $\beta \in (13.6454, 19)$  或  $a \in (0.1974, 3.5)$  或  $b \in (0.04, 0.7252)$  时,该系统处于混沌状态,其 Poincaré 截面上是一片片密集的点,并且具有层次结构。

5) 利用 Routh-Hurwitz 判据对系统参数变化进行理论分析,发现改变系统的参数时,所研究系统的平衡点的稳定性也随之变化,即系统的运动状态随之发生变化。

以上结论为正确选取系统参数提供了理论参考依据。

### 参考文献:

[1] TANG W K S, ZHONG G Q, CHEN G, et al. Generation of N-Scroll Attractors Via Sine Function[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications, 2001, 48(11): 1369-1372.

[2] XU F, YU P. Global Stabilization and Synchronization of N-Scroll Chaotic Attractors in a Modified Chua's Circuit with Hyperbolic Tangent Function[J]. International Journal of Bifurcation and Chaos, 2009, 19(8): 2563-2572.

[3] 孙克辉, 艾星星, 左婷, 等. 多涡卷 Chua 混沌吸引子的设计与性能分析[J]. 动力学与控制学报, 2015, 13(1): 11-17.  
SUN Kehui, AI Xingxing, ZUO Ting, et al. Design of Chua Multi-Scroll Chaotic Attractor and Its Performance Analysis[J]. Journal of Dynamics and Control, 2015, 13(1): 11-17.

[4] 马英杰, 李彦兵, 杨亚涛. 变形蔡氏混沌系统及其电路实现[J]. 北京邮电大学学报, 2015, 38(1): 36-39.  
MA Yingjie, LI Yanbing, YANG Yatao. Modified

- Chua's Chaotic System and Its Circuit Implementation[J]. Journal of Beijing University of Posts and Telecommunications, 2015, 38(1): 36-39.
- [5] 俞清, 姜盼, 陆菱, 等. 基于 Jerk 形式的多涡卷混沌电路[J]. 常州大学学报(自然科学版), 2016, 28(2): 83-87.  
YU Qing, JIANG Pan, LU Ling, et al. Jerk-Type Based Multi-Scroll Chaotic Circuit[J]. Journal of Changzhou University(Natural Science Edition), 2016, 28(2): 83-87.
- [6] 张朝霞, 禹思敏. 用时滞和阶跃序列组合生成网格多涡卷蔡氏混沌吸引子[J]. 物理学报, 2009, 58(1): 120-130.  
ZHANG Chaoxia, YU Simin. Generation of Grid Multi-Scroll Chua's Chaotic Attractors with Combination of Hysteresis and STEP SERIES[J]. Acta Physica Sinica, 2009, 58(1): 120-130.
- [7] 王振宇, 苏咏梅. 一种网格多涡卷混沌 Colpitts 振荡器及其电路实现[J]. 电子器件, 2017, 40(6): 1441-1444.  
WANG Zhenyu, SU Yongmei. A Grid Multi-Scroll Chaotic Attractor and Its Circuit Implementation Based on Colpitts Oscillator Model[J]. Chinese Journal of Electron Devices, 2017, 40(6): 1441-1444.
- [8] 吴秋杰. 基于忆阻器的多涡卷混沌电路设计及应用[D]. 武汉: 华中科技大学, 2016.  
WU Qiujie. The Design and Application of Memristor-Based Multi-Scroll Chaotic Circuits[D]. Wuhan: Huazhong University of Science & Technology, 2016.
- [9] 王廷江. 基于荷控忆阻器的蔡氏对偶混沌电路分析[J]. 西南大学学报(自然科学版), 2016, 38(4): 144-149.  
WANG Tingjiang. Analysis of Chua's Dual Chaotic Circuit About Charge-Controlled Memristor[J]. Journal of Southwest University(Natural Science), 2016, 38(4): 144-149.
- [10] 张琳琳, 张烁, 常文亭, 等. 基于蔡氏对偶电路的四阶忆阻混沌电路[J]. 中国科技论文, 2017, 12(8): 946-951.  
ZHANG Linlin, ZHANG Shuo, CHANG Wenting, et al. A New Fourth-Order Memristor Chaotic Circuit Based on Chua's Dual Circuit[J]. China Sciencepaper, 2017, 12(8): 946-951.
- [11] 闫登卫, 王丽丹, 段书凯. 基于忆阻器的多涡卷混沌系统及其脉冲同步控制[J]. 物理学报, 2018, 67(11): 50-63.  
YAN Dengwei, WANG Lidan, DUAN Shukai. Memristor-Based Multi-Scroll Chaotic System and Its Pulse Synchronization Control[J]. Acta Physica Sinica, 2018, 67(11): 50-63.
- [12] 肖利全, 段书凯, 王丽丹. 基于 Julia 分形的多涡卷忆阻混沌系统[J]. 物理学报, 2018, 67(9): 55-64.  
XIAO Liquan, DUAN Shukai, WANG Lidan. Julia Fractal Based Multi-Scroll Memristive Chaotic System[J]. Acta Physica Sinica, 2018: 67(9): 55-64.
- [13] 夏虎. 基于忆阻的多涡卷超混沌系统的设计与实现[D]. 长沙: 湖南大学, 2017.  
XIA Hu. Research and Design of Memristor: Based Multi-Scroll Hyper Chaotic System[D]. Changsha: Hunan University, 2017.
- [14] 马知恩, 周义仓, 李承治. 常微分方程定性方法与稳定性方法[M]. 北京: 科学出版社, 2001: 77.  
MA Zhi'en, ZHOU Yicang, LI Chengzhi. Qualitative and Stability Methods for Ordinary Differential Equations[M]. Beijing: Science Press, 2001: 77.
- [15] 王高雄, 周之铭, 朱思铭, 等. 常微分方程[M]. 北京: 高等教育出版社, 1978: 259.  
WANG Gaoxiong, ZHOU Zhiming, ZHU Siming, et al. Ordinary Differential Equations[M]. Beijing: Higher Education Press, 1978: 259.
- [16] LIU B, HILL D J, SUN Z J. Input-to-State Exponents and Related ISS for Delayed Discrete-Time Systems with Application to Impulsive Effects[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2018, 28(2): 640-660.
- [17] LIU B, HILL D J, SUN Z J. Input-to-State-KL-Stability with Criteria for a Class of Hybrid Dynamical Systems[J]. Applied Mathematics and Computation, 2018, 326: 124-140.

(责任编辑: 廖友媛)