doi:10.3969/j.issn.1673-9833.2018.05.014

广义区间直觉梯形模糊优先级加权几何算子及应用

周 娇，成央金

（湘潭大学 数学与计算科学学院，湖南 湘潭 411105）

摘 要：针对决策指标和决策者不在同一优先级下的区间直觉梯形模糊多属性决策问题，提出了广义区间直觉梯形模糊优先级加权几何算子，并推导出其数学表达式，研究了该算子的相关性质和一些特例，探讨了基于广义区间直觉梯形模糊优先级几何算子的多属性群决策方法；最后给出数值实例证明了算子的有效性。

关键词：区间直觉梯形模糊数；优先级集成算子；多属性群决策

中图分类号：C934 **文献标志码**：A **文章编号**：1673-9833(2018)05-0078-09

Generalized Interval-Valued Intuitionistic Trapezoidal Fuzzy Priority Weighted Geometric Operator and Its Applications

ZHOU Jiao，CHENG Yangjin

（School of Mathematics and Computation Science，Xiangtan University，Xiangtan Hunan 411105，China）

Abstract：In view of the multi-attribute decision making problem existing in the interval valued intuitionistic trapezium with decision index and decision maker at different priority levels, a proposal has thus been made of a generalized interval valued intuitionistic trapezoidal fuzzy priority weighted geometric operator, followed by the derivation of the mathematical expressions, as well as a further study on the related properties and some special cases of the operator. Meanwhile, an investigation is to be made of the multi-attribute group decision making method based on generalized interval valued intuitionistic trapezoidal fuzzy priority geometric operators. Finally, a numerical example is given to verify the validity of the operator.

Keywords：interval-valued intuitionistic trapezoidal fuzzy number；prioritized aggregation operator；multi-attribute group decision making

1 研究背景

L. A. Zadeh 1965年提出了模糊集[1]理论，K. T. Atanassov把模糊集推广到直觉模糊集（intuitionistic fuzzy sets，IFS）[2]。因IFS综合考虑隶属度、非隶属度和犹豫度3个方面的信息，能够更加细腻地描述和刻画客观世界的模糊性本质，众多学者对IFS进行了深入研究。目前关于IFS的拓展形式主要有区间直觉模糊集（interval-valued intuitionistic fuzzy set，IVIFS）[3]、三角直觉模糊数（triangular intuitionistic fuzzy number，TIFN）[4]、直觉梯形模糊数（intuitionistic fuzzy number，ITFN）[5]和区间直觉梯形模糊数（interval-valued intuitionistic trapezoidal fuzzy number，IVITFN）[5-9]。

王坚强[5]于2008年首次提出了区间直觉梯形模糊数的概念。万树平[6]研究了区间直觉梯形模糊数的运算法则，定义了其得分函数和精确函数，给出

收稿日期：2017-10-24

基金项目：湖南省自然科学基金资助项目（14JJ2069）

作者简介：周 娇（1992-），女，河南商丘人，湘潭大学硕士生，主要研究方向为不确定性优化理论，E-mail：1039478632@qq.com

了区间直觉梯形模糊数的排序方法，定义了 IVITFN 加权算术平均算子和 IVITFN 加权几何平均算子，并将其运用到多属性群决策（multi-attribute group decision making，MAGDM）问题中。Wu J. 等 [7] 研究了 IVITFN 的加权几何算子和 IVITFN 的混合几何算子，并给出了 MAGDM 法。汪新凡等 [8] 定义了一种新的 IVITFN 加法运算法则，结合 IVITFN 的期望给出了新的 IVITFN 的加权算术平均算子、IVITFN 的有序加权平均算子和 IVITFN 的混合集成算子。周晓辉等 [9] 提出了区间直觉梯形模糊 Bonferroni 平均算子及在多属性群决策中的应用。上述 IVITFN 集成算子都只考虑了指标之间处于同一优先水平，而实际决策中存在指标或专家处于不同优先水平的决策问题。R. R. Yager[10] 首次提出了优先级集成算子。Ye J. [11] 把优先级算子应用到梯形直觉模糊集中。Zhang Z. M. [12] 把优先级集成算子推广到直觉梯形模糊集中，提出了直觉梯形模糊优先级集成（intuitionistic trapezoidal fuzzy prioritized weighted geometric，ITFPWG）算子和区间直觉梯形模糊优先级加权几何集成（interval-valued intuitionistic trapezoidal fuzzy prioritized weighted geometric，IVITFPWG）算子，并把它们运用到多属性决策中。陈华友等 [13] 提出了广义直觉模糊加权交叉影响平均算子，并将其应用在多属性决策问题中。Yu D. J. 等 [14] 提出了区间直觉梯形模糊优先级集成算子并把该算子应用到多属性群决策问题中。Liang C. Y. 等 [15] 把广义算子与优先级集成算子相结合提出了广义的直觉梯形模糊优先级集成算子，并将其运用到多属性群决策中。

在实际 MAGDM 问题中，指标或专家之间并非处于同一优先水平。本文将结合文献 [16] 提出的一种新的乘法运算和幂运算，提出新的区间直觉梯形模糊优先级加权几何集成算子和广义的区间直觉梯形模糊优先级加权几何集成算子，并用数值实例验证该算子的有效性。

2　预备知识

本部分主要介绍区间直觉梯形模糊集的基本定义、运算法则和优先级平均算子的基本概念。

定义 1[6]　设$\tilde{\alpha}$是实数集 **R** 上的直觉模糊数，它的隶属函数为

$$\mu_{\tilde{\alpha}}^{-}(x)=\begin{cases}\dfrac{x-a}{b-a}\mu_{\tilde{\alpha}}^{-}, & a\leqslant x<b;\\ \mu_{\tilde{\alpha}}^{-}, & b\leqslant x\leqslant c;\\ \dfrac{d-x}{d-c}\mu_{\tilde{\alpha}}^{-}, & c<x\leqslant d;\\ 0, & \text{其他。}\end{cases}$$

$$\mu_{\tilde{\alpha}}^{+}(x)=\begin{cases}\dfrac{x-a}{b-a}\mu_{\tilde{\alpha}}^{+}, & a\leqslant x<b;\\ \mu_{\tilde{\alpha}}^{+}, & b\leqslant x\leqslant c;\\ \dfrac{d-x}{d-c}\mu_{\tilde{\alpha}}^{+}, & c<x\leqslant d;\\ 0, & \text{其他。}\end{cases}$$

它的非隶属函数为

$$\nu_{\tilde{\alpha}}^{-}(x)=\begin{cases}\dfrac{b-x+\nu_{\tilde{\alpha}}^{-}(x-a)}{b-a}\nu_{\tilde{\alpha}}^{-}, & a\leqslant x<b;\\ \nu_{\tilde{\alpha}}^{-}, & b\leqslant x\leqslant c;\\ \dfrac{x-c+\nu_{\tilde{\alpha}}^{-}(d-x)}{d-c}\nu_{\tilde{\alpha}}^{-}, & c<x\leqslant d;\\ 0, & \text{其他。}\end{cases}$$

$$\nu_{\tilde{\alpha}}^{+}(x)=\begin{cases}\dfrac{b-x+\nu_{\tilde{\alpha}}^{+}(x-a)}{b-a}\nu_{\tilde{\alpha}}^{+}, & a\leqslant x<b;\\ \nu_{\tilde{\alpha}}^{+}, & b\leqslant x\leqslant c;\\ \dfrac{x-c+\nu_{\tilde{\alpha}}^{+}(d-x)}{d-c}\nu_{\tilde{\alpha}}^{+}, & c<x\leqslant d;\\ 0, & \text{其他。}\end{cases}$$

其中，$0\leqslant\mu_{\tilde{\alpha}}^{-}\leqslant\mu_{\tilde{\alpha}}^{+}\leqslant 1$，$0\leqslant\nu_{\tilde{\alpha}}^{-}\leqslant\nu_{\tilde{\alpha}}^{+}\leqslant 1$，$0\leqslant\mu_{\tilde{\alpha}}^{+}+\nu_{\tilde{\alpha}}^{+}\leqslant 1$，$a,b,c,d\in\mathbf{R}$，则称$\tilde{\alpha}$为区间直觉梯形模糊数。

为方便起见，$\tilde{\alpha}$ 记作

$$\tilde{\alpha}=\left([a,b,c,d];[\mu_{\tilde{\alpha}}^{-},\mu_{\tilde{\alpha}}^{+}],[\nu_{\tilde{\alpha}}^{-},\nu_{\tilde{\alpha}}^{+}]\right)。$$

定义 2[6]　设$\tilde{\alpha}_1$，$\tilde{\alpha}_2$是两个区间直觉梯形模糊数，则区间直觉梯形模糊数的运算法则定义如下：

1）$\tilde{\alpha}_1\oplus\tilde{\alpha}_2=\big([a_1+a_2,b_1+b_2,c_1+c_2,d_1+d_2];[\mu_{\tilde{\alpha}_1}^{-}+\mu_{\tilde{\alpha}_2}^{-}-\mu_{\tilde{\alpha}_1}^{-}\mu_{\tilde{\alpha}_2}^{-},\mu_{\tilde{\alpha}_1}^{+}+\mu_{\tilde{\alpha}_2}^{+}-\mu_{\tilde{\alpha}_1}^{+}\mu_{\tilde{\alpha}_2}^{+}],[\nu_{\tilde{\alpha}_1}^{-}\nu_{\tilde{\alpha}_2}^{-},\nu_{\tilde{\alpha}_1}^{+}\nu_{\tilde{\alpha}_2}^{+}]\big)(a_1,a_2>0)$。

2）$\tilde{\alpha}_1\otimes\tilde{\alpha}_2=\big([a_1a_2,b_1b_2,c_1c_2,d_1d_2];[\mu_{\tilde{\alpha}_1}^{-}\mu_{\tilde{\alpha}_2}^{-},\mu_{\tilde{\alpha}_1}^{+}\mu_{\tilde{\alpha}_2}^{+}],[\nu_{\tilde{\alpha}_1}^{-}+\nu_{\tilde{\alpha}_2}^{-}-\nu_{\tilde{\alpha}_1}^{-}\nu_{\tilde{\alpha}_2}^{-},\nu_{\tilde{\alpha}_1}^{+}+\nu_{\tilde{\alpha}_2}^{+}-\nu_{\tilde{\alpha}_1}^{+}\nu_{\tilde{\alpha}_2}^{+}]\big)(a_1,a_2>0)$。

3）$\lambda\tilde{\alpha}_1=\big([\lambda a_1,\lambda b_1,\lambda c_1,\lambda d_1];[1-(1-\mu_{\tilde{\alpha}_1}^{-})^{\lambda},1-(1-\mu_{\tilde{\alpha}_1}^{+})^{\lambda}],[(\nu_{\tilde{\alpha}_1}^{-})^{\lambda},(\nu_{\tilde{\alpha}_1}^{+})^{\lambda}]\big)(\lambda>0,a_1>0)$。

4）$(\tilde{\alpha}_1)^{\lambda}=\big([a_1^{\lambda},b_1^{\lambda},c_1^{\lambda},d_1^{\lambda}];[(\mu_{\tilde{\alpha}_1}^{-})^{\lambda},(\mu_{\tilde{\alpha}_1}^{+})^{\lambda}],[1-(1-\nu_{\tilde{\alpha}_1}^{-})^{\lambda},1-(1-\nu_{\tilde{\alpha}_1}^{+})^{\lambda}]\big)(\lambda>0,a_1>0)$。

定义 3[12]　设$\tilde{\alpha}$是一个区间直觉梯形模糊数，则它的得分函数$S(\tilde{\alpha})$和精确函数$H(\tilde{\alpha})$定义如下：

$$S(\tilde{\alpha})=\frac{1}{8}(a+b+c+d)\cdot\left(1+\frac{\mu_{\tilde{\alpha}}^{-}-\nu_{\tilde{\alpha}}^{-}+\mu_{\tilde{\alpha}}^{+}-\nu_{\tilde{\alpha}}^{+}}{2}\right)\left(\frac{\mu_{\tilde{\alpha}}^{-}-\nu_{\tilde{\alpha}}^{-}+\mu_{\tilde{\alpha}}^{+}-\nu_{\tilde{\alpha}}^{+}}{2}\right);$$

$$H(\tilde{\alpha})=\frac{1}{8}(a+b+c+d)\cdot\left(1+\frac{\mu_{\tilde{\alpha}}^{-}-\nu_{\tilde{\alpha}}^{-}+\mu_{\tilde{\alpha}}^{+}-\nu_{\tilde{\alpha}}^{+}}{2}\right)\left(\frac{\mu_{\tilde{\alpha}}^{-}+\nu_{\tilde{\alpha}}^{-}+\mu_{\tilde{\alpha}}^{+}+\nu_{\tilde{\alpha}}^{+}}{2}\right)。$$

根据上述定义，可以给出任意两个区间直觉梯形模糊数的排序关系。

定义 4[12] 设 $\tilde{\alpha}_1$ 和 $\tilde{\alpha}_2$ 是任意两个区间直觉梯形模糊数，则

1）如果 $S(\tilde{\alpha}_1)<S(\tilde{\alpha}_2)$，则 $\tilde{\alpha}_1<\tilde{\alpha}_2$。

2）如果 $S(\tilde{\alpha}_1)=S(\tilde{\alpha}_2)$，则

当 $H(\tilde{\alpha}_1)<H(\tilde{\alpha}_2)$ 时，$\tilde{\alpha}_1<\tilde{\alpha}_2$；

当 $H(\tilde{\alpha}_1)=H(\tilde{\alpha}_2)$ 时，$\tilde{\alpha}_1=\tilde{\alpha}_2$。

在多属性决策问题中，当指标或专家之间存在不同的优先级时，传统的信息集成方法不能有效地解决这类问题，R. R. Yager[10] 首先提出了优先级算子。

定义 5[10] 设 $C=\{C_1, C_2, \cdots, C_n\}$ 是指标的集合，且这些指标有一个优先关系，用线性序表示为 $C_1\succ C_2\succ\cdots\succ C_n$，即如果 $j<k$，指标 C_j 的优先级高于指标 C_k。$C_j(x)$ 是任意方案 x 关于指标 C_j 的属性值，如果 $C_j(x)$ 满足

$$PA\left(C_j(x)\right)=\sum\nolimits_{j=1}^{n}\omega_j C_j(x),$$

其中 $\omega_j=\dfrac{T_j}{\sum\nolimits_{j=1}^{n}T_j}$，而 $T_1=1$，$T_j=\prod\limits_{k=1}^{j-1}C_k(x)$ $(j=2, 3,\cdots, n)$，则称 PA 为优先级算子。

例 1 考虑买衣服的问题。假设从以下 3 个方面选择衣服：面料 (C_1)、价格 (C_2) 和外观 (C_3)。这 3 个标准的优先关系为 $C_1\succ C_2\succ C_3$，设 3 个准则的表现值为 $C_1(x)=0$，$C_2(x)=0.9$，$C_3(x)=0.8$。试讨论如何决策。

解 根据优先级算子可得：

$T_1=1$，$T_2=C_1=0$，$T_3=C_1C_2=0\times0.9=0$。由 $\omega_j=\dfrac{T_j}{\sum\nolimits_{j=1}^{n}T_j}$ 计算出：$\omega_1=1$，$\omega_2=0$，$\omega_3=0$。则方案 x 的综合表现值为

$$C(x)=1\times0+0\times0.9+0\times0.8=0。$$

由于面料的表现值为 0，即使价格和外观的表现值很高，综合表现值仍为 0，因此决策结果是，不买这件衣服。

上述优先级集成算子一般适用于决策信息是清晰数的问题，然而在实际决策问题中，决策信息有时是模糊数，因此要把上述算子推广到决策信息是区间直觉梯形模糊数的问题中。

3 广义的区间直觉梯形模糊优先级加权几何集成算子

本章基于优先级集成算子和广义几何平均算子，研究区间直觉梯形模糊环境下的优先级集成算子。根据文献 [16] 中的直觉模糊集的乘法运算和幂运算，给出了改进的区间直觉梯形模糊集的乘法运算和幂运算，提出了广义的区间直觉梯形模糊优先级加权几何集成（generalized interval-valued intuitionistic trapezoidal fuzzy prioritized weighted geometric，GIVITFPWG）算子。

定义 6 设 $\tilde{\alpha}_1$，$\tilde{\alpha}_2$ 是两个区间直觉梯形模糊数，则改进的区间直觉梯形模糊数的乘法运算和幂运算定义如下：

1）$\tilde{\alpha}_1\otimes\tilde{\alpha}_2=\big([a_1a_2, b_1b_2, c_1c_2, d_1d_2];$
$[(1-\nu_{\tilde{\alpha}_1}^{-})(1-\nu_{\tilde{\alpha}_2}^{-})-(1-\mu_{\tilde{\alpha}_1}^{-}-\nu_{\tilde{\alpha}_1}^{-})(1-\mu_{\tilde{\alpha}_2}^{-}-\nu_{\tilde{\alpha}_2}^{-}),$
$(1-\nu_{\tilde{\alpha}_1}^{+})(1-\nu_{\tilde{\alpha}_2}^{+})-(1-\mu_{\tilde{\alpha}_1}^{+}-\nu_{\tilde{\alpha}_1}^{+})(1-\mu_{\tilde{\alpha}_2}^{+}-\nu_{\tilde{\alpha}_2}^{+})],$
$[\nu_{\tilde{\alpha}_1}^{-}+\nu_{\tilde{\alpha}_2}^{-}-\nu_{\tilde{\alpha}_1}^{-}\nu_{\tilde{\alpha}_2}^{-}, \nu_{\tilde{\alpha}_1}^{+}+\nu_{\tilde{\alpha}_2}^{+}-\nu_{\tilde{\alpha}_1}^{+}\nu_{\tilde{\alpha}_2}^{+}]\big)$
$(a_1, a_2>0)$。

2）$(\tilde{\alpha}_1)^{\lambda}=\big([a_1^{\lambda}, b_1^{\lambda}, c_1^{\lambda}, d_1^{\lambda}];$
$[(1-\nu_{\tilde{\alpha}_1}^{-})^{\lambda}-(1-\mu_{\tilde{\alpha}_1}^{-}-\nu_{\tilde{\alpha}_1}^{-})^{\lambda},$
$(1-\nu_{\tilde{\alpha}_1}^{+})^{\lambda}-(1-\mu_{\tilde{\alpha}_1}^{+}-\nu_{\tilde{\alpha}_1}^{+})^{\lambda}],$
$[1-(1-\nu_{\tilde{\alpha}_1}^{-})^{\lambda}, 1-(1-\nu_{\tilde{\alpha}_1}^{+})^{\lambda}]\big)(a_1>0, \lambda>0)$。

定义 7 设 $\tilde{\alpha}_j(j=1, 2, \cdots, n)$ 是一组区间直觉梯形模糊数，设 GIVITFPWG:$V^n\rightarrow V$，如果

$$\mathrm{GIVITFPWG}_{\lambda}(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \cdots, \tilde{\alpha}_n)=\frac{1}{\lambda}\left(\bigotimes_{j=1}^{n}(\lambda\tilde{\alpha}_j)^{\frac{T_j}{\sum_{j=1}^{n}T_j}}\right),$$

则称函数 为广义的区间直觉梯形模糊优先级加权几何集成算子。其中：$\lambda=0$，$T_1=1$，$T_j=\prod\limits_{k=1}^{j-1}S(\tilde{\alpha}_k)$ $(j=2,3,\cdots,n)$。

根据区间直觉梯形模糊数的运算法则，可以得出定理 1。

定理 1 设 $\tilde{\alpha}_j(j=1, 2, \cdots, n)$ 是一组区间直觉梯形模糊数，则通过 GIVITFPWG 算子集成的结果仍然是区间直觉梯形模糊数，且

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{GIVITFPWG}_{\lambda}(\tilde{\alpha}_1,\tilde{\alpha}_2,\cdots,\tilde{\alpha}_n)=\\
&\left(\left[\prod_{j=1}^{n}a_j^{\frac{T_j}{\sum_{j=1}^{n}T_j}},\prod_{j=1}^{n}b_j^{\frac{T_j}{\sum_{j=1}^{n}T_j}},\prod_{j=1}^{n}c_j^{\frac{T_j}{\sum_{j=1}^{n}T_j}},\prod_{j=1}^{n}d_j^{\frac{T_j}{\sum_{j=1}^{n}T_j}}\right];\right.\\
&\left[1-\left(1-\left(\prod_{j=1}^{n}\left(1-(\nu_{\tilde{\alpha}_j}^{\ -})^{\lambda}\right)^{\frac{T_j}{\sum_{j=1}^{n}T_j}}-\prod_{j=1}^{n}\left((1-\mu_{\tilde{\alpha}_j}^{\ -})^{\lambda}-(\nu_{\tilde{\alpha}_j}^{\ -})^{\lambda}\right)^{\frac{T_j}{\sum_{j=1}^{n}T_j}}\right)\right)^{\frac{1}{\lambda}},\right.\\
&\left.1-\left(1-\left(\prod_{j=1}^{n}\left(1-(\nu_{\tilde{\alpha}_j}^{\ +})^{\lambda}\right)^{\frac{T_j}{\sum_{j=1}^{n}T_j}}-\prod_{j=1}^{n}\left((1-\mu_{\tilde{\alpha}_j}^{\ +})^{\lambda}-(\nu_{\tilde{\alpha}_j}^{\ +})^{\lambda}\right)^{\frac{T_j}{\sum_{j=1}^{n}T_j}}\right)\right)^{\frac{1}{\lambda}}\right],\\
&\left.\left[1-\left(\prod_{j=1}^{n}\left(1-(\nu_{\tilde{\alpha}_j}^{\ -})^{\lambda}\right)^{\frac{T_j}{\sum_{j=1}^{n}T_j}}\right)^{\frac{1}{\lambda}},1-\left(\prod_{j=1}^{n}\left(1-(\nu_{\tilde{\alpha}_j}^{\ +})^{\lambda}\right)^{\frac{T_j}{\sum_{j=1}^{n}T_j}}\right)^{\frac{1}{\lambda}}\right]\right)。
\end{aligned}
$$

其中：$\lambda>0$；$T_1=1$；$T_j=\prod_{k=1}^{j-1}S(\tilde{\alpha}_k)(j=2,3,\cdots,n)$，$S(\tilde{\alpha}_k)$是$\tilde{\alpha}_k$的得分函数。

证　采用数学归纳法。

当$n=1$时，$\frac{T_1}{\sum_{j=1}^{n}T_j}=1$，上式成立。

假设$n=k$时，上式也成立。则当$n=k+1$时，由归纳假设并根据定义 2 和定义 6 可得

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\lambda}\left(\bigotimes_{j=1}^{k+1}(\lambda\tilde{\alpha}_j)^{\frac{T_j}{\sum_{j=1}^{k+1}T_j}}\right)=\frac{1}{\lambda}\left(\bigotimes_{j=1}^{k}(\lambda\tilde{\alpha}_j)^{\frac{T_j}{\sum_{j=1}^{k+1}T_j}}\otimes(\lambda\tilde{\alpha}_{k+1})^{\frac{T_{k+1}}{\sum_{j=1}^{k+1}T_j}}\right)=\\
&\left(\left[\prod_{j=1}^{k}a_j^{\frac{T_j}{\sum_{j=1}^{k+1}T_j}},\prod_{j=1}^{k}b_j^{\frac{T_j}{\sum_{j=1}^{k+1}T_j}},\prod_{j=1}^{k}c_j^{\frac{T_j}{\sum_{j=1}^{k+1}T_j}},\prod_{j=1}^{k}d_j^{\frac{T_j}{\sum_{j=1}^{k+1}T_j}}\right];\right.\\
&\left[1-\left(1-\left(\prod_{j=1}^{k}\left(1-(\nu_{\tilde{\alpha}_j}^{\ -})^{\lambda}\right)^{\frac{T_j}{\sum_{j=1}^{k+1}T_j}}-\prod_{j=1}^{k}\left((1-\mu_{\tilde{\alpha}_j}^{\ -})^{\lambda}-(\nu_{\tilde{\alpha}_j}^{\ -})^{\lambda}\right)^{\frac{T_j}{\sum_{j=1}^{k+1}T_j}}\right)\right)^{\frac{1}{\lambda}},\right.\\
&\left.1-\left(1-\left(\prod_{j=1}^{k}\left(1-(\nu_{\tilde{\alpha}_j}^{\ +})^{\lambda}\right)^{\frac{T_j}{\sum_{j=1}^{k+1}T_j}}-\prod_{j=1}^{k}\left((1-\mu_{\tilde{\alpha}_j}^{\ +})^{\lambda}-(\nu_{\tilde{\alpha}_j}^{\ +})^{\lambda}\right)^{\frac{T_j}{\sum_{j=1}^{k+1}T_j}}\right)\right)^{\frac{1}{\lambda}}\right],\\
&\left.\left[\left(1-\prod_{j=1}^{k}\left(1-(\nu_{\tilde{\alpha}_j}^{\ -})^{\lambda}\right)^{\frac{T_j}{\sum_{j=1}^{k+1}T_j}}\right)^{\frac{1}{\lambda}},\left(1-\prod_{j=1}^{k}\left(1-(\nu_{\tilde{\alpha}_j}^{\ +})\right)^{\lambda\frac{T_j}{\sum_{j=1}^{k+1}T_j}}\right)^{\frac{1}{\lambda}}\right]\right)=\\
&\left(\left[a_{k+1}^{\frac{T_{k+1}}{\sum_{j=1}^{k+1}T_j}},b_{k+1}^{\frac{T_{k+1}}{\sum_{j=1}^{k+1}T_j}},c_{k+1}^{\frac{T_{k+1}}{\sum_{j=1}^{k+1}T_j}},d_{k+1}^{\frac{T_{k+1}}{\sum_{j=1}^{k+1}T_j}}\right];\right.\\
&\left[1-\left(1-\left(1-(\nu_{\tilde{\alpha}_{k+1}}^{\ -})^{\lambda}\right)^{\frac{T_{k+1}}{\sum_{j=1}^{k+1}T_j}}-\left((1-\mu_{\tilde{\alpha}_{k+1}}^{\ -})^{\lambda}-(\nu_{\tilde{\alpha}_{k+1}}^{\ -})^{\lambda}\right)^{\frac{T_{k+1}}{\sum_{j=1}^{k+1}T_j}}\right)^{\frac{1}{\lambda}},\right.\\
&\left.1-\left(1-\left((1-(\nu_{\tilde{\alpha}_{k+1}}^{\ +})^{\lambda}\right)^{\frac{T_{k+1}}{\sum_{j=1}^{k+1}T_j}}-\left((1-\mu_{\tilde{\alpha}_{k+1}}^{\ +})^{\lambda}-(\nu_{\tilde{\alpha}_{k+1}}^{\ +})^{\lambda}\right)^{\frac{T_{k+1}}{\sum_{j=1}^{k+1}T_j}}\right)^{\frac{1}{\lambda}}\right],\\
&\left.\left[\left(1-\left(1-(\nu_{\tilde{\alpha}_{k+1}}^{\ -})^{\lambda}\right)^{\frac{T_j}{\sum_{j=1}^{k+1}T_j}}\right)^{\frac{1}{\lambda}},\left(1-\left(1-(\nu_{\tilde{\alpha}_{k+1}}^{\ +})^{\lambda}\right)^{\frac{T_j}{\sum_{j=1}^{k+1}T_j}}\right)^{\frac{1}{\lambda}}\right]\right)=
\end{aligned}
$$

$$\left(\left[\prod_{j=1}^{k+1} a_j^{\frac{T_j}{\sum_{j=1}^{k+1}T_j}}, \prod_{j=1}^{k+1} b_j^{\frac{T_j}{\sum_{j=1}^{k+1}T_j}}, \prod_{j=1}^{k+1} c_j^{\frac{T_j}{\sum_{j=1}^{k+1}T_j}}, \prod_{j=1}^{k+1} d_j^{\frac{T_j}{\sum_{j=1}^{k+1}T_j}}\right];\right.$$

$$\left[1-\left(1-\left(\prod_{j=1}^{k+1}\left(1-(\nu_{\tilde{\alpha}_j}^{-})^{\lambda}\right)^{\frac{T_j}{\sum_{j=1}^{k+1}T_j}}-\prod_{j=1}^{k+1}\left((1-\mu_{\tilde{\alpha}_j}^{-})^{\lambda}-(\nu_{\tilde{\alpha}_j}^{-})^{\lambda}\right)^{\frac{T_j}{\sum_{j=1}^{k+1}T_j}}\right)\right)^{\frac{1}{\lambda}},\right.$$

$$\left.1-\left(1-\left(\prod_{j=1}^{k+1}\left(1-(\nu_{\tilde{\alpha}_j}^{+})^{\lambda}\right)^{\frac{T_j}{\sum_{j=1}^{k+1}T_j}}-\prod_{j=1}^{k+1}\left((1-\mu_{\tilde{\alpha}_j}^{+})^{\lambda}-(\nu_{\tilde{\alpha}_j}^{+})^{\lambda}\right)^{\frac{T_j}{\sum_{j=1}^{k+1}T_j}}\right)\right)^{\frac{1}{\lambda}}\right],$$

$$\left.\left[\left(1-\prod_{j=1}^{k+1}\left(1-(\nu_{\tilde{\alpha}_j}^{-})^{\lambda}\right)^{\frac{T_j}{\sum_{j=1}^{k+1}T_j}}\right)^{\frac{1}{\lambda}},\left(1-\prod_{j=1}^{k+1}\left(1-(\nu_{\tilde{\alpha}_j}^{+})^{\lambda}\right)^{\frac{T_j}{\sum_{j=1}^{k+1}T_j}}\right)^{\frac{1}{\lambda}}\right]\right)。$$

即当 $n=k+1$ 时，定理 1 中的式子也成立。证毕。

定理 2 设 $\tilde{\alpha}_j\,(j=1,2,\cdots,n)$ 是一组区间直觉梯形模糊数，$\lambda>0$，$T_1=1$，$T_j=\prod_{k=1}^{j-1}S(\tilde{\alpha}_k)\,(j=2,3,\cdots,n)$，$S(\tilde{\alpha}_k)$ 是区间直觉梯形模糊数 $\tilde{\alpha}_k$ 的得分函数，如果所有的 $\tilde{\alpha}_j$ 都相等，即对任意的 j，都有 $\tilde{\alpha}_j=\tilde{\alpha}$，则

$$\mathrm{GIVITFPWG}_{\lambda}(\tilde{\alpha}_1,\tilde{\alpha}_2,\cdots,\tilde{\alpha}_n)=\tilde{\alpha}。$$

证 已知 $\tilde{\alpha}_j=\tilde{\alpha}$，注意到 $\sum_{j=1}^{n}\frac{T_j}{\sum_{j=1}^{n}T_j}=1$，由定理 1 可得

$$\mathrm{GIVITFPWG}(\tilde{\alpha}_1,\tilde{\alpha}_2,\cdots,\tilde{\alpha}_n)=$$

$$\left(\left[\prod_{j=1}^{n} a^{\frac{T_j}{\sum_{j=1}^{n}T_j}}, \prod_{j=1}^{n} b^{\frac{T_j}{\sum_{j=1}^{n}T_j}}, \prod_{j=1}^{n} c^{\frac{T_j}{\sum_{j=1}^{n}T_j}}, \prod_{j=1}^{n} d^{\frac{T_j}{\sum_{j=1}^{n}T_j}}\right];\right.$$

$$\left[1-\left(1-\left(\prod_{j=1}^{n}\left(1-(\nu_{\tilde{\alpha}}^{-})^{\lambda}\right)^{\frac{T_j}{\sum_{j=1}^{n}T_j}}-\prod_{j=1}^{n}\left((1-\mu_{\tilde{\alpha}}^{-})^{\lambda}-(\nu_{\tilde{\alpha}}^{-})^{\lambda}\right)^{\frac{T_j}{\sum_{j=1}^{n}T_j}}\right)\right)^{\frac{1}{\lambda}},\right.$$

$$\left.1-\left(1-\left(\prod_{j=1}^{n}\left(1-(\nu_{\tilde{\alpha}}^{+})^{\lambda}\right)^{\frac{T_j}{\sum_{j=1}^{n}T_j}}-\prod_{j=1}^{n}\left((1-\mu_{\tilde{\alpha}}^{+})^{\lambda}-(\nu_{\tilde{\alpha}}^{+})^{\lambda}\right)^{\frac{T_j}{\sum_{j=1}^{n}T_j}}\right)\right)^{\frac{1}{\lambda}}\right],$$

$$\left.\left[\left(1-\prod_{j=1}^{n}\left(1-(\nu_{\tilde{\alpha}}^{-})^{\lambda}\right)^{\frac{T_j}{\sum_{j=1}^{n}T_j}}\right)^{\frac{1}{\lambda}},\left(1-\prod_{j=1}^{n}\left(1-(\nu_{\tilde{\alpha}}^{+})^{\lambda}\right)^{\frac{T_j}{\sum_{j=1}^{n}T_j}}\right)^{\frac{1}{\lambda}}\right]\right)=$$

$$\left([a,b,c,d];[\mu_{\tilde{\alpha}}^{-},\mu_{\tilde{\alpha}}^{+}],[\nu_{\tilde{\alpha}}^{-},\nu_{\tilde{\alpha}}^{+}]\right)=\tilde{\alpha}。$$

定理 2 的结论成立。

定理 3 设 $\tilde{\alpha}_j\,(j=1,2,\cdots,n)$ 是一组区间直觉梯形模糊数，$\lambda>0$，$T_1=1$，$T_j=\prod_{k=1}^{j-1}S(\tilde{\alpha}_k)\,(j=2,3,\cdots,n)$，$S(\tilde{\alpha}_k)$ 是区间直觉梯形模糊数 $\tilde{\alpha}_k$ 的得分函数，如果 $\tilde{\alpha}'_j$ 是 $\tilde{\alpha}_j$ 的任意一组置换，则

$$\mathrm{GIVITFPWG}_{\lambda}(\tilde{\alpha}_1,\tilde{\alpha}_2,\cdots,\tilde{\alpha}_n)=\mathrm{GIVITFPWG}_{\lambda}(\tilde{\alpha}'_1,\tilde{\alpha}'_2,\cdots,\tilde{\alpha}'_n)。$$

证 根据定理 1 和条件 $\tilde{\alpha}'_j$ 是 $\tilde{\alpha}_j$ 的任意一组置换，可以直接得到结论成立。

广义的区间直觉梯形模糊优先级加权几何算子最主要的优点是，它不仅考虑了指标之间的优先关系，而且还有一个灵活的参数。下面介绍当参数 λ 取不同值时的广义区间直觉梯形模糊优先级集成算子的一些特例。

1）如果 $\lambda=1$，则广义的区间直觉梯形模糊优先级加权几何集成（GIVITFPWG）算子，就退化为区

间直觉梯形模糊优先级加权几何集成（interval-valued intuitionistic trapezoidal fuzzy prioritized weighted geometric，IVITFPWG）算子：

$$\mathrm{IVITFPWG}(\tilde{\alpha}_1,\tilde{\alpha}_2,\cdots,\tilde{\alpha}_n)=\tilde{\alpha}_1^{\frac{T_j}{\sum_{j=1}^{n}T_j}}\otimes\tilde{\alpha}_2^{\frac{T_j}{\sum_{j=1}^{n}T_j}}\otimes\cdots\otimes\tilde{\alpha}_n^{\frac{T_j}{\sum_{j=1}^{n}T_j}}。$$

2）如果 $\lambda=1$，且集成指标的优先级水平退化到同一水平，则广义的区间直觉梯形模糊优先级加权几何集成（GIVITFPWG）算子就退化为区间直觉梯形模糊加权几何（interval-valued intuitionistic trapezoidal fuzzy weighted geometric，IVITFWG）算子：

$$\mathrm{IVITFWG}(\tilde{\alpha}_1,\tilde{\alpha}_2,\cdots,\tilde{\alpha}_n)=\tilde{\alpha}_1^{\omega_1}\otimes\tilde{\alpha}_2^{\omega_2}\otimes\cdots\otimes\tilde{\alpha}_n^{\omega_n}。$$

3）如果 $\lambda=1$，$\omega=\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n},\cdots,\frac{1}{n}\right)$，且集成指标的优先级水平退化到同一水平，则广义区间直觉梯形模糊优先级几何集成（GIVITFPWG）算子就退化为区间直觉梯形模糊几何平均（interval-valued intuitionistic trapezoidal fuzzy geometric average，IVITFGA）算子：

$$\mathrm{IVITFGA}(\tilde{\alpha}_1,\tilde{\alpha}_2,\cdots,\tilde{\alpha}_n)=(\tilde{\alpha}_1\otimes\tilde{\alpha}_2\otimes\cdots\otimes\tilde{\alpha}_n)^{\frac{1}{n}}。$$

4　区间直觉梯形模糊环境下的多属性群决策方法

本章主要利用前面提出的广义区间直觉梯形模糊优先级加权几何集成算子，解决区间直觉梯形模糊环境下的多属性群决策问题。

现考虑某一多属性群决策问题。设 $X=\{x_1, x_2, \cdots, x_m\}$ 为候选方案集；$C=\{c_1, c_2, \cdots, c_n\}$ 是指标的集合，并且指标之间存在优先级关系，表示为线性序 $c_1\succ c_2\succ\cdots\succ c_n$，即当 $j<i$ 时，c_j 比 c_i 拥有更高的优先级；$E=\{e_1, e_2, \cdots, e_p\}$ 是专家的集合，专家之间也存在优先级关系，表示为 $e_1\succ e_2\succ\cdots\succ e_p$，即当 $l<k$ 时，e_l 比 e_k 拥有更高的优先级。设 $\boldsymbol{D}^{(q)}=\left(\tilde{\alpha}_{ij}^{(q)}\right)_{m\times n}$ $(q=1, 2, \cdots, p)$ 为区间直觉模糊决策矩阵，其中 $\tilde{\alpha}_{ij}^{(q)}$ 是区间直觉梯形模糊数，表示专家 e_q 给出的决策信息。$\left[(\mu_{ij}^{(q)})^-, (\mu_{ij}^{(q)})^+\right]$ 表示专家 e_q 给出的候选方案 x_i 关于属性 c_j 满足梯形模糊数 $\left[a_{ij}^{(q)}, b_{ij}^{(q)}, c_{ij}^{(q)}, d_{ij}^{(q)}\right]$ 程度范围，$\left[(\nu_{ij}^{(q)})^-, (\nu_{ij}^{(q)})^+\right]$ 表示专家 e_q 给出的候选方案 x_i 关于属性 c_j 不满足梯形模糊数 $\left[a_{ij}^{(q)}, b_{ij}^{(q)}, c_{ij}^{(q)}, d_{ij}^{(q)}\right]$ 程度的范围。

$\left[(\mu_{ij}^{(q)})^-, (\mu_{ij}^{(q)})^+\right]\subset[0, 1]$，　$\left[(\nu_{ij}^{(q)})^-, (\nu_{ij}^{(q)})^+\right]\subset[0, 1]$，

$0\leqslant(\mu_{ij}^{(q)})^+ + (\nu_{ij}^{(q)})^+\leqslant 1$ $(i=1, 2, \cdots, m;\ j=1, 2, \cdots, n)$。

如果所有的属性 $c_j(j=1, 2, \cdots, n)$ 都是同一类型的属性，则不需要标准化。然而很多情况下，有些属性是效益型的（指标值越大越好），有些属性是成本型的（指标值越小越好）。在这种情况下，需要把成本型指标转化成效益型指标，进而把区间直觉梯形模糊决策矩阵 $\boldsymbol{D}^{(q)}=\left(\tilde{\alpha}_{ij}^{(q)}\right)_{m\times n}$ 转化为 $\boldsymbol{R}^{(q)}=\left(\tilde{r}_{ij}^{(q)}\right)_{m\times n}$。转化方法参见文献 [12]。

下面用 GIVITFPWG 算子解决区间直觉梯形模糊环境下的多属性群决策问题。

步骤 1　用文献 [12] 的方法把区间直觉梯形模糊决策矩阵 $\boldsymbol{D}^{(q)}$ 标准化为 $\boldsymbol{R}^{(q)}$。

步骤 2　计算 $\boldsymbol{T}^{(q)}=\left(T_{ij}^{(q)}\right)_{m\times n}(q=1, 2, \cdots, p)$，其中 $T_{ij}^{(1)}=1(i=1, 2, \cdots, m;\ j=1, 2, \cdots, n)$，$T_{ij}^{(q)}=\prod_{k=1}^{q-1}S(\tilde{r}_{ij}^{(k)})$ $(q=1, 2, \cdots, p)$。

步骤 3　利用 GIVITFPWG 算子集结决策者给出的区间直觉梯形模糊决策矩阵 $\boldsymbol{R}^{(q)}=\left(\tilde{r}_{ij}^{(q)}\right)_{m\times n}$ $(q=1,2,\cdots,p)$，从而得到综合决策矩阵 $\boldsymbol{R}=\left(\tilde{r}_{ij}\right)_{m\times n}$。

$$\begin{aligned}\tilde{r}_{ij}&=\mathrm{GIVITFPWG}_\lambda(\tilde{r}_{ij}^{(1)}, \tilde{r}_{ij}^{(2)}, \cdots, \tilde{r}_{ij}^{(p)})=\\&\left(\left[\prod_{q=1}^{p}(e_{ij}^{(q)})^{\frac{T_{ij}^{(q)}}{\sum_{q=1}^{p}T_{ij}^{(q)}}}, \prod_{q=1}^{p}(f_{ij}^{(q)})^{\frac{T_{ij}^{(q)}}{\sum_{q=1}^{p}T_{ij}^{(q)}}}, \prod_{q=1}^{p}(g_{ij}^{(q)})^{\frac{T_{ij}^{(q)}}{\sum_{q=1}^{p}T_{ij}^{(q)}}}, \prod_{q=1}^{p}(h_{ij}^{(q)})^{\frac{T_{ij}^{(q)}}{\sum_{q=1}^{p}T_{ij}^{(q)}}}\right];\right.\\&\left[1-\left(1-\left(\prod_{q=1}^{p}\left(1-\left((\nu_{ij}^{(q)})^-\right)^\lambda\right)^{\frac{T_{ij}^{(q)}}{\sum_{q=1}^{p}T_{ij}^{(q)}}}-\prod_{q=1}^{p}\left(\left(1-(\mu_{ij}^{(q)})^-\right)^\lambda-\left((\nu_{ij}^{(q)})^-\right)^\lambda\right)^{\frac{T_{ij}^{(q)}}{\sum_{q=1}^{p}T_{ij}^{(q)}}}\right)\right)^{\frac{1}{\lambda}},\right.\end{aligned}$$

$$1-\left(1-\left(\prod_{q=1}^{p}\left(1-\left(\left(\nu_{ij}{}^{(q)}\right)^{+}\right)^{\lambda}\right)^{\frac{T_{ij}(q)}{\Sigma_{q=1}^{p}T_{ij}(q)}}-\prod_{q=1}^{p}\left(\left(1-\left(\mu_{ij}{}^{(q)}\right)^{+}\right)^{\lambda}-\left(\left(\nu_{ij}{}^{(q)}\right)^{+}\right)^{\lambda}\right)^{\frac{T_{ij}(q)}{\Sigma_{q=1}^{p}T_{ij}(q)}}\right)\right)^{\frac{1}{\lambda}}\Bigg],$$

$$\left[\left(1-\prod_{q=1}^{p}\left(1-\left(\left(\nu_{ij}{}^{(q)}\right)^{-}\right)^{\lambda}\right)^{\frac{T_{ij}(q)}{\Sigma_{q=1}^{p}T_{ij}(q)}}\right)^{\frac{1}{\lambda}},\left(1-\prod_{q=1}^{p}\left(1-\left(\left(\nu_{ij}{}^{(q)}\right)^{+}\right)^{\lambda}\right)^{\frac{T_{ij}(q)}{\Sigma_{q=1}^{p}T_{ij}(q)}}\right)^{\frac{1}{\lambda}}\right]\Bigg)。$$

步骤 4 计算 $\boldsymbol{T}=(T_{ij})_{m\times n}$ 的值，其中 $T_{i1}=1(i=1, 2, \cdots, m)$，$T_{ij}=\prod_{k=1}^{j-1}S(\tilde{r}_{ik})(i=1, 2, \cdots, m;\ j=2, 3, \cdots, n)$ 。

步骤 5 利用 GIVITFPWG 算子集结方案的各属性值 $\tilde{r}_{ij}$，得到方案 x_i 的综合表现值 $\tilde{r}_i(i=1, 2, \cdots, m)$。

$$\tilde{r}_i=\mathrm{GIVITGPWG}_{\lambda}(\tilde{r}_{i1}, \tilde{r}_{i2}, \cdots, \tilde{r}_{in})=$$

$$\Bigg(\left[\prod_{j=1}^{n}e_{ij}^{\frac{T_{ij}}{\Sigma_{j=1}^{n}T_{ij}}}, \prod_{j=1}^{n}f_{ij}^{\frac{T_{ij}}{\Sigma_{j=1}^{n}T_{ij}}}, \prod_{j=1}^{n}g_{ij}^{\frac{T_{ij}}{\Sigma_{j=1}^{n}T_{ij}}}, \prod_{j=1}^{n}h_{ij}^{\frac{T_{ij}}{\Sigma_{j=1}^{n}T_{ij}}}\right];$$

$$\left[1-\left(1-\left(\prod_{j=1}^{n}\left(1-(\nu_{ij}{}^{-})^{\lambda}\right)^{\frac{T_{ij}}{\Sigma_{j=1}^{n}T_{ij}}}-\prod_{j=1}^{n}\left((1-\mu_{ij}{}^{-})^{\lambda}-(\nu_{ij}{}^{-})^{\lambda}\right)^{\frac{T_{ij}}{\Sigma_{j=1}^{n}T_{ij}}}\right)\right)^{\frac{1}{\lambda}},\right.$$

$$\left.1-\left(1-\left(\prod_{j=1}^{n}\left(1-(\nu_{ij}{}^{+})^{\lambda}\right)^{\frac{T_{ij}}{\Sigma_{j=1}^{n}T_{ij}}}-\prod_{j=1}^{n}\left((1-\mu_{ij}{}^{+})^{\lambda}-(\nu_{ij}{}^{+})^{\lambda}\right)^{\frac{T_{ij}}{\Sigma_{j=1}^{n}T_{ij}}}\right)\right)^{\frac{1}{\lambda}}\right],$$

$$\left[\left(1-\prod_{j=1}^{n}\left(1-(\nu_{ij}{}^{-})^{\lambda}\right)^{\frac{T_{ij}}{\Sigma_{j=1}^{n}T_{ij}}}\right)^{\frac{1}{\lambda}},\left(1-\prod_{j=1}^{n}\left(1-(\nu_{ij}{}^{+})^{\lambda}\right)^{\frac{T_{ij}}{\Sigma_{j=1}^{n}T_{ij}}}\right)^{\frac{1}{\lambda}}\right]\Bigg)。$$

步骤 6 根据定义 3 计算 $\tilde{r}_i$ 的得分函数 $S(\tilde{r}_i)$ 和精确函数 $H(\tilde{r}_i)$ 。

步骤 7 根据定义 4 对方案 $x_i(i=1, 2, \cdots, m)$ 进行排序，选出最好的方案。

5 数值实例

下文用数值例子来验证前文所提方法的有效性。

例 2 为了加强基础教育建设，有效提高科研水平，国内某著名高校的管理学院决定开展人才引进工作。学院对这次人才引进工作高度重视，校长 e_1、管理学院院长 e_2、人事处相关人员 e_3 负责这次人才引进工作，且制定了严格的引进准则。他们对 5 个候选人 $x_i(i=1, 2, 3, 4, 5)$，从 4 个方面：职业道德 c_1、科研能力 c_2、教学经验 c_3、教育背景 c_4，进行严格评估。校长有绝对的优先决策权力，管理学院院长次之，即决策者优先关系为 $e_1\succ e_2\succ e_3$ 。在 3 个决策者看来，这 4 个属性（评估的 4 个方面）的优先关系为 $c_1\succ c_2\succ c_3\succ c_4$ 。3 个决策者对 5 个候选人在 4 个属性下的表现值用区间直觉梯形模糊数表示，得到了区间直觉梯形模糊决策矩阵 $\boldsymbol{D}^{(q)}=\left(\tilde{\alpha}_{ij}{}^{(q)}\right)_{5\times 4}(q=1,2,3)$（参见文献 [12]）。试讨论如何决策。

解 步骤 1 用文献 [12] 的方法把区间直觉梯形模糊决策矩阵 $\boldsymbol{D}^{(q)}$ 标准化为 $\boldsymbol{R}^{(q)}$。

步骤 2 计算 $T^{(1)}$，$T^{(2)}$，$T^{(3)}$ 得

$$\boldsymbol{T}^{(1)}=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{T}^{(2)}=\begin{bmatrix}0.0591&0.1060&0.0300&0.2571\\0.0300&0.3900&0.2700&0.1698\\0.0257&0.1323&0.0657&0.2400\\0.0342&0.4357&0.3281&0.1074\\0.0506&0.1800&0.0928&0.1097\end{bmatrix},$$

$$
\boldsymbol{T}^{(3)}=\begin{bmatrix}0.0215 & 0.0099 & 0.0004 & 0.0412\\ 0.0017 & 0.0156 & 0.0251 & 0.0491\\ 0.0060 & 0.0055 & 0.0035 & 0.0365\\ 0.0015 & 0.0057 & 0.0328 & 0.0453\\ 0.0077 & 0.0054 & 0.0040 & 0.0357\end{bmatrix}。
$$

步骤 3　利用 GIVITFPWG 算子 (λ=1)，集结决策者给出的所有的区间直觉梯形模糊决策矩阵 $\boldsymbol{R}^{(q)}=\left(\tilde{r}_{ij}^{(q)}\right)_{5\times4}(q=1,2,3)$，得到如表 1 所示的综合决策矩阵 $\boldsymbol{R}=\left(\tilde{r}_{ij}\right)_{5\times4}$。

表 1　区间直觉梯形模糊矩阵 $\boldsymbol{R}$

Table 1　Interval-valued intuitionistic trapezoidal fuzzy decision matrix $\boldsymbol{R}$

	c_1	c_2	c_3	c_4
x_1	([0,0.1546,0.3038,0.5936]; [0.6075,0.7030],[0.2925,0.2970])	([0,0.5003,0.7720,0.9685]; [0.6080,0.6079,],[0.2920,0.3921])	([0,0.1458,0.2916,0.5783]; [0.4040,0.5969],[0..4000,0.4031])	([0.1824,0.4559,0.6002,1.000]; [0.6857,0.7791],[0.1437,0.2209])
x_2	([0,0.1299,0.2565,0.6312]; [0.5009,0.6001],[0.3969,0.3999])	([0,0.6304,0.7713,0.9052]; [0.6392,0.7386],[0.1985,0.2614])	([0,0.4343,0.5735,0.8319]; [0.6568,0.7760],[0.1238,0.2240])	([0.3334,0.6402,0.8718,01.000]; [0.5155,0.7035],[0.1211,0.2965])
x_3	([0,0.1480,0.2946,0.4388]; [0.5024,0.6043],[0.2956,0.3957])	([0,0.4867,0.6426,0.9026]; [0.5237,0.6995],[0.2128,0.3005])	([0,0.1667,0.6667,1.000]; [0.4140,0.6929],[0.1149,0.3071])	([0.3333,0.5000,0.6667,0.8333]; [0.6644,0.7802],[0.1197,0.2198])
x_4	([0,0.1305,0.2573,0.5120]; [0.5965,0.6000],[0.3036,0.4000])	([0,0.6291,0.7659,0.9513]; [0.6959,0.6940],[0.2038,0.3060])	([0,0.3431,0.5600,0.6978]; [0.7521,0.8420],[0.1277,0.1580])	([0.3458,0.6231,0.7634,1.000]; [0.6044,0.6133],[0.2928,0.3867])
x_5	([0,0.1596,0.2997,0.4444]; [0.5928,0.6983],[0.2955,0.3017])	([0,0.4633,0.6219,0.8065]; [0.5831,0.6833],[0.2165,0.3167])	([0,0.1522,0.4398,1.000]; [0.5900,0.6906],[0.3000,0.3095])	([0.1630,0.3107,0.5866,0.8741]; [0.5209,0.7119],[0.1879,0.2880])

步骤 4　计算矩阵 $\boldsymbol{T}=(T_{ij})_{5\times4}$，得

$$
T=\begin{bmatrix}1 & 0.0645 & 0.0061 & 0.0001\\ 1 & 0.0311 & 0.0060 & 0.0012\\ 1 & 0.0276 & 0.0034 & 0.0004\\ 1 & 0.0346 & 0.0064 & 0.0014\\ 1 & 0.0530 & 0.0063 & 0.0006\end{bmatrix}。
$$

步骤 5　利用 GIVITFPWG 算子，集结区间直觉梯形模糊决策矩阵 $\boldsymbol{R}=(\tilde{r}_{ij})_{5\times4}$ 第 i 行的值 $\tilde{r}_{ij}\,(j=1,2,3,4)$，得到方案 x_i 的综合偏好值 $\tilde{r}_i\,(i=1,2,3,4,5)$。

$\tilde{r}_1=([0,0.1659,0.3257,0.6113];[0.6064,0.6962],[0.2931,0.3038])$，

$\tilde{r}_2=([0,0.1374,0.2667,0.6394];[0.5056,0.6048],[0.3901,0.3952])$，

$\tilde{r}_3=([0,0.1529,0.3017,0.4499];[0.5031,0.6070],[0.2929,0.3630])$，

$\tilde{r}_4=([0,0.1386,0.2685,0.5241];[0.6005,0.6011],[0.2995,0.3989])$，

$\tilde{r}_5=([0,0.1624,0.3117,0.4602];[0.5985,0.6975],[0.2917,0.3025])$。

步骤 6　计算 $\tilde{r}_i(1,2,3,4,5)$ 的得分函数，得 $S(\tilde{r}_1)=0.0658$，$S(\tilde{r}_2)=0.0246$，$S(\tilde{r}_3)=0.0291$，$S(\tilde{r}_4)=0.0367$，$S(\tilde{r}_5)=0.0555$。

步骤 7　由于 $S(\tilde{r}_1)\succ S(\tilde{r}_5)\succ S(\tilde{r}_4)\succ S(\tilde{r}_3)\succ S(\tilde{r}_2)$，从而 $\tilde{r}_1\succ\tilde{r}_5\succ\tilde{r}_4\succ\tilde{r}_3\succ\tilde{r}_2$，所以最好的方案是 x_1。

当参数 λ 取不同值时能得到不同的结果，表 2 给出了不同参数值 λ 所对应的不同方案的得分情况和排序结果。

表 2　参数 λ 取不同值时对应的方案得分和排序结果

Table 2　Scores and ranking results of different values of the parameter λ

λ 取值	方案得分情况					排序结果
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0.1	0.0664	0.0244	0.0294	0.0377	0.0557	$x_1\succ x_5\succ x_4\succ x_3\succ x_2$
1.0	0.0658	0.0246	0.0291	0.0367	0.0555	$x_1\succ x_5\succ x_4\succ x_3\succ x_2$
2.0	0.0647	0.0239	0.0287	0.0367	0.0550	$x_1\succ x_5\succ x_4\succ x_3\succ x_2$
3.0	0.0642	0.0235	0.0284	0.0364	0.0547	$x_1\succ x_5\succ x_4\succ x_3\succ x_2$
5.0	0.0630	0.0232	0.0279	0.0358	00540	$x_1\succ x_5\succ x_4\succ x_3\succ x_2$
10.0	0.0588	0.0230	0.0275	0.0346	0.0497	$x_1\succ x_5\succ x_4\succ x_3\succ x_2$
20.0	0.0487	0.0228	0.0274	0.0354	0.0373	$x_1\succ x_5\succ x_4\succ x_3\succ x_2$

由表 2 可知，随着参数 λ 的增大，各个方案的得分函数值减小，但是各个方案的排序相同，决策结果不变。因此参数值 λ 的波动对决策结果并没有大的影响，即参数 λ 对决策结果不敏感，鲁棒性较好。在实际决策过程中，决策者可以根据自己的偏好程度选择不同的参数值 λ。

6　结语

本文研究了区间直觉梯形模糊环境下，指标或专家不在同一优先级水平情况下的多属性群决策问题。在区间直觉模糊集上改进乘法运算和幂运算的基础上，结合传统的优先级集成算子，提出了广义区间直觉梯形模糊优先级加权几何集成算子，给出了该算子的具体计算公式，研究了算子的性质并给出了参

数 λ 取一些特殊值的例子；探讨了属性不在同一优先水平的区间直觉模糊多属性群决策方法，最后用具体实例验证了该决策方法在实际决策问题中的有效性。广义区间直觉梯形模糊优光级加权几何集成算子的意义在于它考虑了属性之间的优先关系。

参考文献：

[1] ZADEH L A. Fuzzy Sets[J]. Information and Control，1965，8(3)：338–353.

[2] ATANASSOV K T. Intuitionistic Fuzzy Sets[J]. Fuzzy Sets and Systems，1986，20(1)：87–96.

[3] 徐泽水 . 区间直觉模糊信息的集成方法及其在决策中的应用 [J]. 控制与决策，2007，22(2)：215–219.
XU Zeshui. Method for Aggregating Interval-Valued Intuitionistic Fuzzy Information and Its Application to Decision Making[J]. Control and Decision，2007，22(2)：215–219.

[4] WAN S P. Multi-Attribute Decision Making Method Based on Possibility Variance Coefficient of Triangular Intuitionistic Fuzzy Number[J]. International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems，2013，21(2)：223–243.

[5] 王坚强 . 模糊多准则决策方法研究综述 [J]. 控制与决策，2008，23(6)：601–606.
WANG Jianqiang. Overview on Fuzzy Multi-Criteria Decision Making Approach[J]. Control and Decision，2008，23(6)：601–606.

[6] 万树平 . 基于区间直觉梯形模糊数的多属性决策方法 [J]. 控制与决策，2011，26(6)：857–860.
WAN Shuping. Multiple-Attribute Decision Making Method Based on Interval-Valued Intuitionistic Trapezoidal Fuzzy Numbers[J]. Control and Decision，2011，26(6)：857–860.

[7] WU J，LIU Y J. An Approach for Multiple Attribute Group Decision Making Problems with Interval-Valued Intuitionistic Trapezoidal Fuzzy Numbers[J]. Computers and Industrial Engineering，2013，66(2)：311–324.

[8] 汪新凡，杨小娟 . 基于区间直觉梯形模糊数的群决策方法 [J]. 湖南工业大学学报，2012，26(3)：1–8.
WANG Xinfan，YANG Xiaojuan. Approach to Group Decision Making Based on Interval-Valued Intuitionistic Trapezoidal Fuzzy Number[J]. Journal of Hunan University of Technology，2012，26(3)：1–8.

[9] 周晓辉，姚 俭，吴天魁 . 区间直觉梯形模糊 Bonferroni 平均算子及在多属性群决策中的应用 [J]. 运筹与管理，2016，25(3)：132–139.
ZHOU Xiaohui，YAO Jian，WU Tiankui. Interval-Valued Intuitionistic Trapezoidal Fuzzy Bonferroni Means and Its Application in Multi-Attribute Group Decision Making[J]. Operations Research and Management Science，2016，25(3)：132–139.

[10] YAGER R R. Prioritized Aggregation Operators[J]. International Journal of Approximate Reasoning，2008，48(1)：263–274.

[11] YE J. Prioritized Aggregation Operators of Trapezoidal Intuitionistic Fuzzy Sets and Their Application to Multi-Criteria Decision-Making[J]. Neural Computing Application，2014，25(6)：1447–1454.

[12] ZHANG Z M. Intuitionistic Trapezoidal Fuzzy Prioritized Operators and Their Application to Multiple Attribute Group Decision Making[J]. British Journal of Mathematics & Computer Science，2014，4(14)：1951–1998.

[13] 陈华友，何迎东，周礼刚，等 . 广义直觉模糊加权交叉影响平均算子及其在多属性决策中的应用 [J]. 控制与决策，2014，29(7)：1251–1256.
CHEN Huayou，HE Yingdong，ZHOU Ligang，et al. Generalized Intuitionistic Fuzzy Interaction Averaging Operators and Their Applications to Multi-Attribute Decision Making[J]. Control and Decision，2014，29(7)：1251–1256.

[14] YU D J，WU Y Y，LU T. Interval-Valued Intuitionistic Fuzzy Prioritized Operators and Their Application in Group Decision Making[J]. Knowledge-Based Systems，2012，30(6)：57–66.

[15] LIANG C Y ，ZHAO S P，ZHANG J L. Multi-Criteria Group Decision Making Method Based on Generalized Intuitionistic Trapezoidal Fuzzy Prioritized Aggregation Operators[J]. International Journal of Machine Learning and Cybernetics，2017，8(2)：597–610.

[16] CHEN S M，TSAI W H. Multiple Attribute Decision Making Based on Novel Interval-Valued Intuitionistic Fuzzy Geometric Averaging Operators[J]. Information Sciences，2016，367/368：1045–1065.

（责任编辑：邓光辉）